TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

VIENNA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

DIPLOMARBEIT

Direkte und inverse Spektraltheorie von Sturm-Liouville Differentialoperatoren

Ausgeführt am Institut für

Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Woracek

durch

Jonathan Eckhardt
Matr. Nr. 0308366

Heimgasse 4
7210 Mattersburg

Wien, am 21. Oktober 2009

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die zeitunabhängige, eindimensionale Schrödingergleichung für ein Teilchen, das zwischen zwei undurchdringbaren Barrieren bei 0 und bei π in einem Potential V eingeschlossen ist, ist die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad x \in (0,\pi),$$

zusammen mit den Randbedingungen

$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0.$$

Dabei ist $\hbar$ das reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum, m die Masse des Teilchens und E ein reeller Parameter. Das Problem besteht nun darin, bei gegebenem, reellwertigem Potential $V \in L^1(0,\pi)$, diejenigen Werte E zu bestimmen, für die eine nichttriviale Lösung dieser Gleichung existiert. Diese Werte sind die Energieeigenwerte dieses Teilchens, die zugehörigen Lösungen sind die Eigenzustände. Es stellt sich heraus, dass abzählbar unendlich viele Energieeigenwerte existieren und dass diese sich nur bei ∞ häufen.

Das dazu inverse Problem besteht hingegen darin, zu einer gegebenen Folge reeller Zahlen E_n, $n \in \mathbb{N}$, ein reellwertiges Potential $V \in L^1(0,\pi)$ so zu bestimmen, dass die Energieeigenwerte zu diesem Potential genau die Zahlen E_n, $n \in \mathbb{N}$ sind. Dass dieses Problem nicht für jede beliebige Folge lösbar ist, sieht man schon daran, dass diese Folge notwendigerweise gegen unendlich streben muss. Tatsächlich stellt sich heraus, dass die Lösbarkeit dieses Problems nur vom asymptotischen Verhalten der Zahlen E_n, $n \in \mathbb{N}$ abhängt und dass, falls es lösbar ist, eine Vielzahl von Lösungen existiert.

Mit solchen und ähnlichen Problemen beschäftigt sich die vorliegende Arbeit. In Kapitel 1 zeigen wir zur Vorbereitung einige Existenz- und Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Verbindung mit dem formalen Sturm-Liouville Differentialausdruck

$$\tau = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

auf (a,b). Dabei ist (a,b) ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall und q eine lokal integrierbare, reellwertige Funktion auf (a,b).

In Kapitel 2 betrachten wir Realisierungen des Differentialausdrucks τ als Operatoren im Hilbertraum $L^2(a,b)$, insbesondere solche, die selbstadjungiert sind. Es stellt sich heraus, dass stets selbstadjungierte Realisierungen von τ existieren. Das entscheidende Hilfsmittel zu deren Bestimmung ist die Weyl'sche Alternative und damit die Klassifikation der Randpunkte in Grenzkreis- und Grenzpunktfall. Im Folgenden charakterisieren wir die selbstadjungierten Realisierungen auf zwei verschiedene Weisen; zum einen über die Wronskideterminante und zum anderen durch die sogenannten Anfangszahlen. In beiden Fällen stellt sich heraus, dass die selbstadjungierten Realisierungen von τ durch Einschränkung der maximal definierten Realisierung durch Randbedingungen bei a und bei b entstehen. Wir beschließen dieses Kapitel mit der Bestimmung der Resolventen der selbstadjungierten Realisierungen, die, wie sich herausstellt, Integraloperatoren sind.

Im folgenden Kapitel 3 beginnen wir damit, eine Spektraltheorie für selbstadjungierte Realisierungen, die regulär bei a sind, zu entwickeln. Dazu führen wir zuerst die Weyl-Titchmarsh m-Funktion und das zugehörige Spektralmaß ein. Mit Hilfe dieser Objekte erhalten wir eine Spektraldarstellung dieser Operatoren. Der restliche Teil dieses Kapitels beschäftigt sich mit der Eindeutigkeit des inversen Problems von der Weyl-Titchmarsh m-Funktion. Nach einigen Vorbereitungen über Jost-Lösungen und die Asymptotik der m-Funktion, beweisen wir den Hauptsatz dieses Kapitels; einen lokalen Eindeutigkeitssatz. Er besagt, dass zwei selbstadjungierte Realisierungen lokal um den Randpunkt a übereinstimmen, falls sich die m-Funktionen asymptotisch ähnlich verhalten. Als einfache Folgerung dieses Satzes erhält man, dass die m-Funktion den Operator eindeutig bestimmt.

Kapitel 4 beschäftigt sich schließlich mit der direkten und inversen Spektraltheorie im regulären Fall. In diesem Fall besteht das Spektrum der selbstadjungierten Realisierungen nur aus Eigenwerten. Da sich herausstellt, dass die Eigenwerte den Operator nicht eindeutig bestimmen, führen wir zusätzlich die sogenannten Normierungskonstanten ein. Diese Zahlen, zusammen mit den Eigenwerten, nennen wir die Spektraldaten. Das Hauptziel dieses Kapitels sind Existenz- und Eindeutigkeitssätze für das inverse Problem von den Spektraldaten. Wir zeigen, dass die Spektraldaten das Potential und den Operator eindeutig bestimmen und geben notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass zwei Zahlenfolgen die Spektraldaten einer selbstadjungierten Realisierung mit quadratisch integrierbarem Potential sind. Dazu verwenden wir die Theorie der Transformationsoperatoren und die Gel'fand-Levitan Integralgleichung, der die Kerne dieser Operatoren genügen. Es stellt sich dabei heraus, dass für die Lösbarkeit des inversen Problems von den Spektraldaten nur das asymptotische Verhalten dieser Folgen entscheidend ist. Wir beschließen das Kapitel mit einigen inversen und halbinversen Eindeutigkeitssätzen. Das sind beispielsweise Eindeutigkeitssätze, bei denen das Potential lokal um einen Randpunkt bekannt ist.

Im Anhang stellen wir schließlich noch einige benötigte Ergebnisse aus der Funktionentheorie zusammen.

KAPITEL 1

Sturm-Liouville Differentialausdrücke

Ist (a,b) ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall und $p \in [1,\infty)$, so bezeichnen wir mit $L^p(a,b)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von Borel-messbaren, komplexwertigen Funktionen auf (a,b), die absolut p-fach über (a,b) bezüglich des Lebesguemaßes integrierbar sind. Der Einfachheit halber schreiben wir für ein Teilintervall $(\alpha,\beta) \subseteq (a,b)$ und eine messbare Funktion f auf (a,b)

$$f \in L^p(\alpha,\beta), \quad \text{falls} \quad f|_{(\alpha,\beta)} \in L^p(\alpha,\beta).$$

Eine messbare Funktion f auf (a,b) ist lokal integrierbar, falls für alle kompakten Teilintervalle $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$, $f \in L^1(\alpha,\beta)$ gilt. Mit $L^1_{loc}(a,b)$ bezeichnen wir den Raum aller lokal integrierbaren Funktionen.

Ist (α,β) ein beschränktes Teilintervall von (a,b), so bezeichnen wir mit $AC[\alpha,\beta]$ die Menge aller absolut stetigen, komplexwertigen Funktionen auf $[\alpha,\beta]$. Eine komplexwertige Funktion f auf (a,b) ist lokal absolut stetig, falls für jedes kompakte Teilintervall $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$, $f \in AC[\alpha,\beta]$ gilt, wobei wir der Einfachheit halber wieder

$$f \in AC[\alpha,\beta] \quad \text{schreiben, falls} \quad f|_{[\alpha,\beta]} \in AC[\alpha,\beta].$$

Den Raum der lokal absolut stetigen Funktionen auf (a,b) bezeichnen wir mit $AC_{loc}(a,b)$. Ist $f \in AC_{loc}(a,b)$, so ist f fast überall differenzierbar und wir bezeichnen mit f' die Ableitung von f.

1.1. Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Zur Vorbereitung werden wir einige Existenz- und Eindeutigkeitssätze über Systeme gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungen erster Ordnung beweisen. Sei dazu in diesem Abschnitt $n \in \mathbb{N}$, (a,b) ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall und $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{C}^n$. Die dazugehörige Operatornorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ bezeichnen wir ebenfalls mit $\|\cdot\|$. Außerdem sei in diesem Abschnitt F stets eine $\mathbb{C}^n$-wertige Funktion auf (a,b), deren Komponenten lokal integrierbar sind und M eine $\mathbb{C}^{n\times n}$-wertige Funktion auf (a,b), deren Komponenten ebenfalls lokal integrierbar sind.

Unter einer Lösung der Gleichung $Y' = MY + F$ verstehen wir eine $\mathbb{C}^n$-wertige Funktion Y auf (a,b), deren Komponenten lokal absolut stetig sind und die

$$Y' = MY + F$$

fast überall auf (a,b) erfüllt.

Satz 1.1.1. *Für jedes $c \in (a,b)$ und $Y_c \in \mathbb{C}^n$ existiert eine eindeutige Lösung von*

$$Y' = MY + F \quad \textit{mit} \quad Y(c) = Y_c.$$

Sind M, F und Y_c reell, so ist auch die Lösung reell.

Beweis. Sei Y eine Lösung von $Y' = MY + F$ mit $Y(c) = Y_c$. Dann sieht man durch Integration, dass Y auch die Integralgleichung

$$(*) \qquad Y(x) = Y_c + \int_c^x M(t)Y(t) + F(t)dt, \quad x \in (a,b),$$

erfüllt. Ist umgekehrt eine Funktion Y eine Lösung von $(*)$, so ist Y als Integral von lokal integrierbaren Funktionen lokal absolut stetig und man sieht durch Differenzieren von $(*)$ und Einsetzen des Wertes c, dass Y eine Lösung von $Y' = MY + F$ mit $Y(c) = Y_c$ ist. Eine Funktion Y ist also genau dann eine Lösung von $Y' = MY + F$ mit $Y(c) = Y_C$, wenn sie Lösung der Integralgleichung $(*)$ ist. Es genügt daher die eindeutige Lösbarkeit dieser Integralgleichung zu zeigen.

Seien α, $\beta \in (a,b)$, $\alpha < \beta$ mit $c \in [\alpha, \beta]$ und $B = C([\alpha,\beta];\mathbb{C}^n)$ der Raum der stetigen, $\mathbb{C}^n$-wertigen Funktionen auf $[\alpha,\beta]$. Bezeichne mit $\|\cdot\|_\infty$

$$\|Y\|_\infty = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} \{\|Y(x)\|\}, \quad Y \in B$$

die Supremumsnorm, die B zu einem Banachraum macht. Weiters definieren wir für $Y \in B$

$$\|Y\|_B = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} \left\{ e^{-2\left|\int_c^x \|M(t)\|dt\right|} \|Y(x)\| \right\}.$$

Dann ist $\|\cdot\|_B$ eine Norm auf B, die wegen der Ungleichung

$$e^{-2\int_\alpha^\beta \|M(t)\|dt} \|Y\|_\infty \leq \|Y\|_B \leq \|Y\|_\infty, \quad Y \in B,$$

B zu einem Banachraum macht. Sei die Abbildung $T : B \to B$ definiert durch

$$TY(x) = Y_c + \int_c^x M(s)Y(s) + F(s)ds, \quad x \in [\alpha,\beta],\ Y \in B.$$

Da mit $Y \in B$ auch TY stetig auf $[\alpha,\beta]$ ist, ist T wohldefiniert. Für zwei Funktionen Y, $Z \in B$ gilt dann für alle $x \in [\alpha,\beta]$

$$\begin{aligned} \|TY(x) - TZ(x)\| &= \left\| \int_c^x M(s)\left(Y(s) - Z(s)\right) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_c^x \|M(s)\|\, \|Y(s) - Z(s)\|\, ds \right| \\ &\leq \|Y - Z\|_B \left| \int_c^x \|M(s)\|\, e^{2\left|\int_c^s \|M(t)\|dt\right|} ds \right| \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} e^{-2\left|\int_c^x \|M(t)\|dt\right|} &\|TY(x) - TZ(x)\| \leq \\ &\leq \|Y - Z\|_B \left| \int_c^x \|M(s)\| e^{-2\left|\int_s^x \|M(t)\|dt\right|} ds \right| \\ &= \frac{1}{2}\|Y - Z\|_B e^{-2\left|\int_c^x \|M(t)\|dt\right|} \\ &\leq \frac{1}{2}\|Y - Z\|_B. \end{aligned}$$

Bildet man das Supremum über alle $x \in [\alpha, \beta]$, so erhält man

$$\|TY - TZ\|_B \leq \frac{1}{2}\|Y - Z\|_B.$$

T ist also eine Kontraktion im Banachraum $(B, \|\cdot\|_B)$ und hat als solche einen eindeutigen Fixpunkt, der die Integralgleichung auf $[\alpha, \beta]$ erfüllt. Die Gleichung $Y' = MY + F$ mit $Y(c) = Y_c$ hat daher auf jedem kompakten Teilintervall (α, β) eine eindeutige Lösung und damit auch auf dem ganzen Intervall (a, b).

Seien nun M, F und Y_c reell. Dann ist TY reell, falls nur Y reell ist. Ist nun $Y \in B$ eine beliebige reelle Funktion, so ist $T^n Y$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge reeller Funktionen die für $n \to \infty$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_B$ und damit gleichmäßig auf $[\alpha, \beta]$ gegen die Lösung konvergiert. Also ist die Lösung reell auf $[\alpha, \beta]$ und damit auch auf dem ganzen Intervall. □

Sind die Funktionen $\|M(\cdot)\|$ und $\|F(\cdot)\|$ sogar bis zu einem Randpunkt integrierbar, so können Lösungen stets stetig in diesen Randpunkt fortgesetzt werden.

Satz 1.1.2. *Falls $\|M(\cdot)\|$, $\|F(\cdot)\| \in L^1(a, c)$ für ein (und damit alle) $c \in (a, b)$, so existiert für jede Lösung Y von $Y' = MY + F$ der Grenzwert*

$$Y(a) := \lim_{x \searrow a} Y(x)$$

und ist endlich.

Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

Beweis. Sei Y eine Lösung von $Y' = MY + F$. Wir zeigen zunächst, dass Y in einer Umgebung von a beschränkt ist. Sei dazu $c \in (a, b)$, sodass $\int_a^c \|M(s)\| ds < 1/2$, was nach Voraussetzung möglich ist. Wäre Y nicht beschränkt auf $(a, c]$, so gäbe es eine monoton fallende Folge $x_n \in (a, c)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \to a$ für $n \to \infty$, sodass für alle $x \in [x_n, c]$, $\|Y(x_n)\| \geq \|Y(x)\|$ gilt. Integriert man die Gleichung $Y' = MY + F$, so erhält man

$$Y(x_n) = Y(c) - \int_{x_n}^c M(s)Y(s) + F(s) ds, \quad n \in \mathbb{N}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\|Y(x_n)\| &\leq \|Y(c)\| + \int_{x_n}^c \|M(s)\|\|Y(s)\| + \|F(s)\| ds \\
&\leq \|Y(c)\| + \|Y(x_n)\| \int_a^c \|M(s)\| ds + \int_a^c \|F(s)\| ds \\
&\leq \|Y(c)\| + \frac{1}{2}\|Y(x_n)\| + \int_a^c \|F(s)\| ds, \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

und damit

$$\|Y(x_n)\| \leq 2\|Y(c)\| + 2\int_a^c \|F(s)\| ds, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Funktion Y ist also in einer Umgebung von a beschränkt. Um die Behauptung einzusehen, zeigen wir dass $Y(x)$ für $x \searrow a$ ein Cauchynetz ist.

Die Lösung Y erfüllt für alle x_1, $x_2 \in (a,b)$

$$Y(x_1) = Y(x_2) - \int_{x_1}^{x_2} M(s)Y(s) + F(s)ds$$

und damit

$$\|Y(x_1) - Y(x_2)\| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} \|M(s)\|\|Y(s)\| + \|F(s)\|ds \right|.$$

Da der rechte Ausdruck beliebig klein wird, wenn man nur x_1 und x_2 nahe genug bei a wählt, ist $Y(x)$ ein Cauchynetz für $x \searrow a$ und daher konvergent. □

Satz 1.1.3. *Falls $\|M(\cdot)\|$, $\|F(\cdot)\| \in L^1(a,c)$ für ein $c \in (a,b)$, so existiert für jedes $Y_a \in \mathbb{C}^n$ eine eindeutige Lösung Y der Gleichung*

$$Y' = MY + F \quad \textit{mit} \quad Y(a) = Y_a.$$

Sind M, F und Y_a reell, so ist auch die Lösung reell.

Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Satz 1.1.1, wenn man $c = a$ setzt und für jedes $\beta \in (a,b)$, für B den Raum der $\mathbb{C}^n$-wertigen, stetigen, beschränkten Funktionen auf $(a,\beta]$ wählt. □

Seien nun im Folgenden in diesem Abschnitt M_1, M_2 zwei $\mathbb{C}^{n\times n}$-wertige Funktionen auf (a,b), deren Komponenten lokal integrierbar sind und für jedes $z \in \mathbb{C}$ sei

$$M_z = M_1 + zM_2.$$

Wir wollen zeigen, dass dann die Lösungen Y_z, $z \in \mathbb{C}$ von

$$Y' = M_zY + F$$

mit den selben Anfangswerten analytisch von $z \in \mathbb{C}$ abhängen.

Satz 1.1.4. *Sei $c \in (a,b)$, $Y_c \in \mathbb{C}^n$ und Y_z für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Lösung von*

$$Y' = M_zY + F \quad \textit{mit} \quad Y(c) = Y_c.$$

Dann sind die Komponenten von $Y_z(x_0)$ für jedes $x_0 \in (a,b)$ ganze Funktionen in z.

Beweis. Seien α, $\beta \in (a,b)$ mit $\alpha < \beta$, sodass $c \in [\alpha,\beta]$ und wie im Beweis von Satz 1.1.1, $B = C([\alpha,\beta];\mathbb{C}^n)$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ sei weiters $Y_{z,0}$ die konstante Funktion

$$Y_{z,0}(x) = Y_c, \quad x \in [\alpha,\beta]$$

auf $[\alpha,\beta]$ und T_z die entsprechende Abbildung, wie aus dem Beweis von Satz 1.1.1. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei weiters

$$Y_{z,N} = T_z^N Y_{z,0}.$$

Aus dem Beweis von Satz 1.1.1 folgt, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Folge $Y_{z,N}$ für $N \to \infty$ auf $[\alpha,\beta]$ gleichmäßig gegen die Lösung Y_z konvergiert. Wir wollen zunächst zeigen, dass die Funktionen $Y_{z,N}$, $N \in \mathbb{N}_0$ Polynome in z sind, also

$$Y_{z,N}(x) = \sum_{k=0}^{N} a_{N,k}(x)z^k, \quad x \in [\alpha,\beta],$$

für bestimmte Funktionen $a_{N,k} \in C([\alpha,\beta];\mathbb{C}^n)$, $N \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0,\dots,N\}$. Offensichtlich gilt das, falls $N = 0$. Für $N \in \mathbb{N}$ folgt die Behauptung induktiv durch

$$\begin{aligned}
Y_{z,N}(x) &= Y_c + \int_c^x (M_1(t) + zM_2(t))\, Y_{z,N-1}(t) + F(t)dt \\
&= Y_c + \sum_{k=0}^{N-1} \int_c^x M_1(t) a_{N-1,k}(t)dt\ z^k + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \int_c^x M_2(t) a_{N-1,k}(t)dt\ z^{k+1} + \int_c^x F(t)dt, \quad x \in [\alpha,\beta].
\end{aligned}$$

Insbesondere sind also die Komponenten von $Y_{z,N}(x)$ ganze Funktionen in z, für alle $x \in [\alpha,\beta]$, $N \in \mathbb{N}_0$. Es bleibt zu zeigen, dass die Folge $Y_{z,N}$ für $N \to \infty$ sogar lokal gleichmäßig in z gegen $Y_z|_{[\alpha,\beta]}$ konvergiert. Wir betrachten dazu die Teleskopsummen

$$Y_z|_{[\alpha,\beta]} = Y_{z,0} + \sum_{N=0}^{\infty} Y_{z,N+1} - Y_{z,N}, \quad z \in \mathbb{C}$$

und zeigen, dass die Summe lokal gleichmäßig in z konvergiert. Sei dazu $R \in \mathbb{R}$ eine beliebige positive Zahl und

$$C = e^{2\int_\alpha^\beta \|M_1(t)\| + R\|M_2(t)\| dt}.$$

Dann folgt aus dem Beweis von Satz 1.1.1

$$\begin{aligned}
\|Y_{z,N+1} - Y_{z,N}\|_\infty &\leq C \left\| T_z^{N+1} Y_{z,0} - T_z^N Y_{z,0} \right\|_{B,z} \\
&\leq \frac{C}{2^N} \|T_z Y_{z,0} - Y_{z,0}\|_{B,z} \\
&\leq \frac{C}{2^N} \|T_z Y_{z,0} - Y_{z,0}\|_\infty
\end{aligned}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$. Dabei ist für jedes $z \in \mathbb{C}$, $\|\cdot\|_{B,z}$ die Norm auf B wie im Beweis von Satz 1.1.1. Weiters gilt für alle $x \in [\alpha,\beta]$

$$\begin{aligned}
\|T_z Y_{z,0}(x) - Y_{z,0}(x)\| &= \left\| \int_c^x M_z(t) Y_c + F(t)dt \right\| \\
&\leq \int_\alpha^\beta \|M_1(t)\|\|Y_c\| + |z|\|M_2(t)\|\|Y_c\| + \|F(t)\|dt \\
&\leq \max\left(\|Y_c\|, 1\right) \int_\alpha^\beta \|M_1(t)\| + R\|M_2(t)\| + \|F(t)\|dt,
\end{aligned}$$

woraus man mit der vorigen Ungleichung sieht, dass die Teleskopsumme sogar lokal gleichmäßig konvergiert. □

Gilt sogar $\|M_1(\cdot)\|$, $\|M_2(\cdot)\|$, $\|F(\cdot)\| \in L^1(a,c)$ für ein $c \in (a,b)$, so gilt Satz 1.1.4 auch für den Fall $c = a$, sowie für $x_0 = a$. Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

1.2. Sturm-Liouville Differentialausdrücke

Sei (a,b) wieder ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall.

Definition 1.2.1. Ein Sturm-Liouville Differentialausdruck auf (a,b) ist ein gewöhnlicher Differentialausdruck der Form

$$-\frac{d^2}{dx^2}+q(x),$$

wobei q eine lokal integrierbare, reellwertige Funktion auf (a,b) ist. Die Funktion q nennen wir das Potential dieses Sturm-Liouville Differentialausdrucks.

Wir setzen im Folgenden stets voraus, dass τ ein Sturm-Liouville Differentialausdruck auf dem Intervall (a,b) mit Potential q ist. Um diesen Differentialausdruck sinnvoll auf eine Funktion u auf (a,b) anwenden zu können, muss nicht nur u lokal absolut stetig sein, sondern auch die Ableitung u'. Ist $AC_{loc}^2(a,b)$ der Raum

$$AC_{loc}^2(a,b)=\left\{u\in AC_{loc}(a,b)\mid u'\in AC_{loc}(a,b)\right\},$$

so gilt für alle $u\in AC_{loc}^2(a,b)$ also

$$\tau u(x)=-u''(x)+q(x)u(x),$$

für fast alle $x\in(a,b)$. Die Funktion τu ist in diesem Fall dann eine fast überall definierte, lokal integrierbare Funktion auf (a,b).

Die Voraussetzung, dass das Potential reellwertig ist, hat zur Folge, dass es sich bei τ um einen reellen Differentialausdruck handelt, womit wir meinen, dass

$$\tau\overline{u}=\overline{\tau u},\quad u\in AC_{loc}^2(a,b)$$

gilt. Für Kapitel 1 ist diese Voraussetzung, dass q reell ist nicht notwendig. Sämtliche Aussagen und Beweise dieses Kapitels gelten auch ohne diese Voraussetzung. Die Voraussetzung, dass q lokal integrierbar ist, ist die minimale Anforderung an das Potential, in dem Sinne, dass das Potential eines Sturm-Liouville Differentialausdrucks, für den Korollar 1.2.4 gilt, notwendigerweise lokal integrierbar ist.

Wir sagen τ ist regulär bei a, falls a endlich ist und

$$q\in L^1(a,c)$$

für ein $c\in(a,b)$. Anderenfalls sagen wir τ ist singulär bei a. Entsprechend definieren wir regulär und singulär für den Randpunkt b. Ist τ regulär bei a und bei b, so sagen wir τ ist regulär. Anderenfalls sagen wir τ ist singulär.

Oft ist es nützlich τ auf ein Teilintervall von (a,b) einzuschränken. Ist $\alpha,\ \beta\in[a,b]$, $\alpha<\beta$ so ist $\tau|_{(\alpha,\beta)}$ der Sturm-Liouville Differentialausdruck auf (α,β) zum Potential $q|_{(\alpha,\beta)}$. Gilt insbesondere $\alpha,\ \beta\in(a,b)$, so ist $\tau|_{(\alpha,b)}$ regulär bei α, $\tau|_{(a,\beta)}$ regulär bei β und $\tau|_{(\alpha,\beta)}$ regulär.

Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf (a,b) und $z\in\mathbb{C}$. Unter einer Lösung der Gleichung $(\tau-z)u=f$ verstehen wir eine Funktion $u\in AC_{loc}^2(a,b)$, die

$$(\tau-z)u=\tau u-zu=f$$

fast überall auf (a,b) erfüllt. Aus den Ergebnissen aus Abschnitt 1.1 erhalten wir nun folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz über Lösungen dieser Gleichung. Die Voraussetzung, dass f lokal integrierbar ist, ist dabei notwendig da für jedes $u \in AC^2_{loc}(a,b)$ die Funktion $(\tau - z)u$ stets lokal integrierbar ist.

SATZ 1.2.2. *Sei $z \in \mathbb{C}$, $f \in L^1_{loc}(a,b)$, $c \in (a,b)$ und d_1, $d_2 \in \mathbb{C}$. Dann existiert eine eindeutige Lösung u von*

$$(\tau - z)u = f \quad \textit{mit} \quad u(c) = d_1 \quad \textit{und} \quad u'(c) = d_2.$$

Sind q, f, d_1, d_2 und z reell, so ist auch die Lösung reell.

BEWEIS. Setzt man

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q - z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},$$

so sind die Komponenten dieser Funktionen lokal integrierbar. Es existiert also eine Lösung

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{von} \quad Y' = MY + F \quad \text{mit} \quad Y(c) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion y_1 ist dann eine Lösung von $(\tau - z)u = f$ mit $y_1(c) = d_1$ und $y_1'(c) = y_2(c) = d_2$, also existiert eine Lösung. Umgekehrt ist für jede Lösung u von $(\tau - z)u = f$ mit $u(c) = d_1$ und $u'(c) = d_2$, die Funktion

$$Y = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \quad \text{eine Lösung von} \quad Y' = MY + F \quad \text{mit} \quad Y(c) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

woraus die Eindeutigkeit folgt. Sind q, f, d_1, d_2 und z reell, so ist wegen Satz 1.1.1 auch die Lösung reell. □

Für f, $g \in AC^2_{loc}(a,b)$ sei $W(f,g)$ die Wronskideterminante

$$W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x), \quad x \in (a,b).$$

Wir sammeln ein paar einfache Eigenschaften der Wronskideterminante.

PROPOSITION 1.2.3. *Für alle f, $g \in AC^2_{loc}(a,b)$ gilt:*

(1) *$W(f,g) \in AC_{loc}(a,b)$ und $W(f,g)' = \tau f g - f \tau g$.*
(2) *W ist linear in beiden Argumenten.*
(3) *W ist antisymmetrisch, also $W(f,g) = -W(g,f)$.*
(4) *Sind u_1 und u_2 Lösungen von $(\tau - z)u = 0$, so ist $W(u_1,u_2)$ konstant und es gilt*

$$W(u_1,u_2) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1,\ u_2 \ \textit{linear unabhängig}.$$

BEWEIS. Da Produkte und Summen von absolut stetigen Funktionen auf Kompakta wieder absolut stetig sind ist $W(f,g) \in AC_{loc}(a,b)$. Weiters ist

$$\begin{aligned} W(f,g)' &= (fg' - f'g)' = f'g' + fg'' - f''g - f'g' \\ &= g(-f'' + qf) - f(-g'' + qg) = \tau f g - f \tau g \end{aligned}$$

was (1) zeigt. Die Eigenschaften (2) und (3) sind offensichtlich. Um (4) einzusehen seien u_1 und u_2 Lösungen von $(\tau - z)u = 0$. Aus (1) folgt $W(u_1,u_2)' = 0$. $W(u_1,u_2)$ ist also konstant. Seien nun u_1, u_2 linear abhängig.

Ist $u_2 = 0$ so gilt offensichtlich $W(u_1, u_2) = 0$. Ist $u_2 \neq 0$, so gilt für ein $C \in \mathbb{C}$, $u_1 = Cu_2$ und daher

$$W(u_1, u_2) = u_1 u_2' - u_1' u_2 = C u_2 u_2' - C u_2' u_2(x) = 0.$$

Sei umgekehrt $W(u_1, u_2) = 0$ und $c \in (a, b)$. Gilt $u_2(c) = u_2'(c) = 0$, so folgt aus der Eindeutigkeit von Lösungen $u_2 = 0$, also sind u_1, u_2 linear abhängig. Ist $(u_2(c), u_2'(c)) \neq 0$, so existiert wegen

$$0 = W(u_1, u_2)(c) = \begin{vmatrix} u_1(c) & u_2(c) \\ u_1'(c) & u_2'(c) \end{vmatrix}$$

ein $C \in \mathbb{C}$ sodass $u_1(c) = Cu_2(c)$ und $u_1'(c) = Cu_2'(c)$. Da mit u_2 auch Cu_2 eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$ ist folgt aus der Eindeutigkeit von Lösungen $u_1 = Cu_2$ also, dass u_1 und u_2 linear abhängig sind. □

Ist $z \in \mathbb{C}$, so nennen wir zwei linear unabhängige Lösungen u_1, u_2 der Gleichung $(\tau - z)u = 0$ ein Fundamentalsystem dieser Gleichung. Folgendes Korollar zeigt, dass Fundamentalsysteme stets existieren.

KOROLLAR 1.2.4. *Sei $z \in \mathbb{C}$ und $c \in (a, b)$. Dann existiert ein Fundamentalsystem u_1, u_2 der Gleichung $(\tau - z)u = 0$ mit*

$$u_1(c) = u_2'(c) = 1 \quad \textit{und} \quad u_1'(c) = u_2(c) = 0,$$

und damit auch mit $W(u_1, u_2) = 1$.

BEWEIS. Seien u_1 und u_2 Lösungen von $(\tau - z)u = 0$ mit

$$u_1(c) = u_2'(c) = 1 \quad \text{und} \quad u_1'(c) = u_2(c) = 0.$$

Wegen $W(u_1, u_2) = W(u_1, u_2)(c) = 1$ sind nach Proposition 1.2.3, u_1 und u_2 linear unabhängig und daher ein Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$. □

Mit Hilfe von Fundamentalsystemen kann man nun beliebige Lösungen der Gleichung $(\tau - z)u = f$ darstellen.

PROPOSITION 1.2.5. *Sei $z \in \mathbb{C}$ und u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$. Weiters sei $c \in (a, b)$, d_1, $d_2 \in \mathbb{C}$ und $f \in L^1_{loc}(a, b)$. Dann existieren c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$, sodass die Lösung u von*

$$(\tau - z)u = f \quad \textit{mit} \quad u(c) = d_1 \quad \textit{und} \quad u'(c) = d_2,$$

dargestellt werden kann als

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \int_c^x \frac{u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)}{W(u_1, u_2)(c)} f(t)dt,$$

$$u'(x) = c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) + \int_c^x \frac{u_1'(x)u_2(t) - u_2'(x)u_1(t)}{W(u_1, u_2)(c)} f(t)dt,$$

$x \in (a, b)$. Ist u_1, u_2 ein Fundamentalsystem mit

$$u_1(c) = u_2'(c) = 1 \quad \textit{und} \quad u_2(c) = u_1'(c) = 0,$$

so gilt $c_1 = d_1$ und $c_2 = d_2$.

Beweis. Seien c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ und für $x \in (a,b)$ sei

$$\tilde{u}(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \int_c^x \frac{u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t)}{W(u_1,u_2)(c)} f(t)dt.$$

Dann rechnet man unmittelbar nach, dass für alle $x \in (a,b)$

$$\tilde{u}'(x) = c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) + \int_c^x \frac{u_1'(x)u_2(t) - u_2'(x)u_1(t)}{W(u_1,u_2)(c)} f(t)dt$$

gilt und weiters, dass $(\tau - z)\tilde{u} = f$ gilt. Außerdem gilt

$$\tilde{u}(c) = c_1 u_1(c) + c_2 u_2(c) \quad \text{und} \quad \tilde{u}'(c) = c_1 u_1'(c) + c_2 u_2'(c).$$

Da die Vektoren

$$\begin{pmatrix} u_1(c) \\ u_1'(c) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u_2(c) \\ u_2'(c) \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, existieren c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$, sodass

$$\tilde{u}(c) = c_1 u_1(c) + c_2 u_2(c) = d_1 \quad \text{und} \quad \tilde{u}'(c) = c_1 u_1'(c) + c_2 u_2'(c) = d_2.$$

Wegen der Eindeutigkeit von Lösungen gilt damit $u = \tilde{u}$. Ist nun u_1, u_2 ein Fundamentalsystem mit

$$u_1(c) = u_2'(c) = 1 \quad \text{und} \quad u_2(c) = u_1'(c) = 0,$$

so gilt

$$\begin{aligned} d_1 &= u(c) = c_1 u_1(c) + c_2 u_2(c) = c_1 \\ \text{und} \quad d_2 &= u'(c) = c_1 u_1'(c) + c_2 u_2'(c) = c_2. \end{aligned}$$

□

Korollar 1.2.6. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Menge aller Lösungen der Gleichung $(\tau - z)u = 0$ ein zweidimensionaler linearer Teilraum von $AC^2_{loc}(a,b)$.*

Beweis. Wegen Korollar 1.2.4 ist dieser Teilraum mindestens zweidimensional, wegen Proposition 1.2.5 ist er genau zweidimensional. □

Auch die Aussagen von Satz 1.1.2 und Satz 1.1.3 übertragen sich, durch Anwendung auf das äquivalente System, sofort auf Sturm-Liouville Differentialausdrücke.

Satz 1.2.7. *Sei τ regulär bei a, $z \in \mathbb{C}$ und f eine lokal integrierbare auf (a,b), sodass $f \in L^1(a,c)$ für alle $c \in (a,b)$. Dann existieren für alle Lösungen u der Gleichung $(\tau - z)u = f$ die Grenzwerte*

$$u(a) := \lim_{x \searrow a} u(x) \quad \textit{und} \quad u'(a) := \lim_{x \searrow a} u'(x)$$

und sind endlich. Weiters existiert für alle d_1, $d_2 \in \mathbb{C}$ eine eindeutige Lösung u der Gleichung $(\tau - z)u = f$ mit den Anfangswerten

$$u(a) = d_1 \quad \textit{und} \quad u'(a) = d_2.$$

Sind q, f, d_1, d_2 und z reell, so ist auch die Lösung reell.

Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

Man sieht leicht, dass unter den Voraussetzungen von Satz 1.2.7, sowohl Korollar 1.2.4 als auch Proposition 1.2.5 auch im Fall $c = a$ gültig sind.

Wir wollen nun schließlich auch noch Satz 1.1.4 auf Sturm-Liouville Differentialausdrücke übertragen.

Satz 1.2.8. *Sei $c \in (a,b)$, d_1, $d_2 \in \mathbb{C}$ und für jedes $z \in \mathbb{C}$ sei u_z die Lösung von*

$$(\tau - z)u = 0 \quad \textit{mit} \quad u(c) = d_1 \quad \textit{und} \quad u'(c) = d_2.$$

Dann sind $u_z(x_0)$ und $u_z'(x_0)$ für jedes $x_0 \in (a,b)$ ganze Funktionen von Ordnung höchstens $1/2$ in z. Sind α, $\beta \in (a,b)$ mit $\alpha < \beta$, so gilt sogar

$$|u_z(x)| + |u_z'(x)| \leq Ce^{B\sqrt{|z|}}, \quad x \in [\alpha,\beta], \; z \in \mathbb{C}$$

für bestimmte Konstanten C, $B \in \mathbb{R}$.

Beweis. Dass diese Punktauswertungen analytisch sind folgt durch Anwenden von Satz 1.1.4 auf das äquivalente System aus dem Beweis von Satz 1.2.2. Seien α, $\beta \in (a,b)$, $\alpha < \beta$, sodass $c \in [\alpha,\beta]$ und f_z, $z \in \mathbb{C}$ die Funktionen

$$f_z(x) = |z|\,|u_z(x)|^2 + |u_z'(x)|^2, \quad x \in (a,b), \; z \in \mathbb{C}$$

auf (a,b). Für jedes $z \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt dann wegen der elementaren Ungleichung

$$2\,|st| \leq \frac{|z|\,|s|^2 + |t|^2}{\sqrt{|z|}}, \quad s,\; t \in \mathbb{C}$$

und, da die Funktion u_z eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$ ist

$$\begin{aligned} f_z'(x) &\leq |z|\,4\,|u_z'(x)|\,|u_z(x)| + |q(x)|\,|u_z(x)|\,|u_z'(x)| \\ &\leq \frac{|z|\,|u_z(x)|^2 + |u_z'(x)|^2}{\sqrt{|z|}}\left(2|z| + |q(x)|\right), \end{aligned}$$

für fast alle $x \in (a,b)$. Da wir uns auf den Fall $|d_1| + |d_2| > 0$ einschränken können, erhält man damit

$$\begin{aligned} \log f_z(x) &= \log f_z(c) + \int_c^x \frac{f_z'(t)}{f_z(t)}dt \\ &\leq \log\left(|z||d_1|^2 + |d_2|^2\right) + \int_\alpha^\beta \frac{2|z| + |q(t)|}{\sqrt{|z|}}dt \\ &\leq \log\left(|z||d_1|^2 + |d_2|^2\right) + (\beta-\alpha)2\sqrt{|z|} + \int_\alpha^\beta \frac{|q(t)|}{\sqrt{|z|}}dt, \quad x \in [\alpha,\beta], \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}^\times$ und daraus

$$f_z(x) \leq \left(|z||d_1|^2 + |d_2|^2\right) e^{(\beta-\alpha)2\sqrt{|z|} + \int_\alpha^\beta \frac{|q(t)|}{\sqrt{|z|}}dt} \leq Ce^{B\sqrt{|z|}}, \quad x \in [\alpha,\beta],$$

für bestimmte Konstanten C, $B \in \mathbb{R}$. □

Ist τ regulär bei a, so gilt Satz 1.2.8 auch in den Fällen $c = a$, $x_0 = a$ sowie $\alpha = a$. Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

KAPITEL 2

Sturm-Liouville Differentialoperatoren

Sei in diesem Kapitel (a,b) wieder ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall und τ ein Sturm-Liouville Differentialausdruck auf (a,b) mit Potential q, wie in Abschnitt 1.2. Wir wollen τ in diesem Kapitel als Operator im Hilbertraum $L^2(a,b)$ realisieren. Das Skalarprodukt in diesem Raum bezeichnen wir mit

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt, \quad f,\ g \in L^2(a,b),$$

die Norm mit $\|\cdot\|$. Ist T ein Operator in $L^2(a,b)$ so bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(T)$ den Definitionsbereich von T. Die Konjugation $f \mapsto \overline{f}$ auf $L^2(a,b)$ bezeichnen wir als die natürliche Konjugation.

2.1. Sturm-Liouville Differentialoperatoren

Der maximale, durch den Differentialausdruck τ induzierte Operator $T_{\max}$ in $L^2(a,b)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{D}(T_{\max}) = \left\{ f \in L^2(a,b) \mid f \in AC^2_{loc}(a,b),\ \tau f \in L^2(a,b) \right\}$$

und $T_{\max} f = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$. Der Definitionsbereich von $T_{\max}$ ist der maximal mögliche Definitionsbereich, um einen Operator in $L^2(a,b)$ zu erhalten. Wir führen weiters den präminimalen, durch den Differentialausdruck τ induzierten Operator T_0 in $L^2(a,b)$ ein. Er ist gegeben durch

$$\mathcal{D}(T_0) = \{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \mid \operatorname{supp} f \text{ kompakt in } (a,b) \}$$

und $T_0 f = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(T_0)$. Da sogar beliebig oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^2(a,b)$ liegen, sind die Operatoren $T_{\max}$ und T_0 dicht definiert. Weil mit $f \in AC^2_{loc}(a,b)$ auch $\overline{f}$ in $AC^2_{loc}(a,b)$ liegt und $\tau\overline{f} = \overline{\tau f}$ gilt, sieht man, dass $T_{\max}$ reell bezüglich der natürlichen Konjugation ist. Da mit f auch $\overline{f}$ kompakten Träger hat, ist auch T_0 reell bezüglich der natürlichen Konjugation.

Wir sagen eine messbare Funktion f auf (a,b) liegt in $L^2(a,b)$ bei a, falls $f \in L^2(a,c)$ für alle $c \in (a,b)$. Außerdem sagen wir eine Funktion $f \in AC^2_{loc}(a,b)$ liegt in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a, falls f und τf in $L^2(a,b)$ bei a liegen. Entsprechendes definieren wir für den Randpunkt b. Offenbar liegt eine Funktion genau dann in $L^2(a,b)$, wenn sie in $L^2(a,b)$ bei a und bei b liegt. Liegt eine Funktion f in $L^2(a,b)$ bei einem Randpunkt, so liegt auch $\overline{f}$ in $L^2(a,b)$ bei diesem Randpunkt. Weiters sieht man unmittelbar, dass eine Funktion genau dann in $\mathcal{D}(T_{\max})$ liegt, wenn sie in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a und bei b liegt. Liegt eine Funktion f in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei einem Randpunkt, so liegt auch $\overline{f}$ in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei diesem Randpunkt. Die folgende Proposition zeigt, dass sich Funktionen, die in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei einem regulären Randpunkt liegen, stets stetig in diesen Randpunkt fortsetzen lassen.

Proposition 2.1.1. *Sei τ regulär bei a und liege f in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a. Dann existieren die Grenzwerte*

$$f(a) := \lim_{x \searrow a} f(x) \quad \text{und} \quad f'(a) := \lim_{x \searrow a} f'(x)$$

und sind endlich. Weiters ist $f,\ f' \in AC[a,c]$ für alle $c \in (a,b)$. Entsprechendes gilt für den Randpunkt b. Ist τ sogar regulär und $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$, so ist $f, f' \in AC[a,b]$.

Beweis. Sei τ regulär bei a, f in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a und $g = \tau f$. Dann liegt g in $L^2(a,b)$ bei a und daher $g \in L^2(a,c)$ für alle $c \in (a,b)$. Da (a,c) ein endliches Intervall ist, gilt außerdem $g \in L^1(a,c)$. Da f eine Lösung der Gleichung $\tau f = g$ ist, folgt die stetige Fortsetzbarkeit aus Satz 1.2.7. Wegen $\tau f = g \in L^1(a,c)$ gilt $-f'' + qf \in L^1(a,c)$. Da $q \in L^1(a,c)$ und f auf (a,c) beschränkt ist, ist $f'' \in L^1(a,c)$ und daher $f' \in AC[a,c]$. Damit ist $f' \in L^1(a,c)$ und daher $f \in AC[a,c]$. Analog beweist man die Behauptungen für den Randpunkt b. Ist τ regulär, so folgt die Behauptung unmittelbar aus dem bereits Gezeigten. □

Lemma 2.1.2. *Es gilt:*

(1) *Für alle $f,\ g \in AC^2_{loc}(a,b)$ und $\alpha,\ \beta \in (a,b)$ mit $\alpha < \beta$ gilt die Lagrange-Identität*

$$\int_\alpha^\beta \tau f(t)\overline{g(t)} - f(t)\overline{\tau g(t)} dt = W(f,\overline{g})(\beta) - W(f,\overline{g})(\alpha).$$

(2) *Liegen f und g in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a, so existiert der Grenzwert*

$$W(f,\overline{g})(a) := \lim_{\alpha \searrow a} W(f,\overline{g})(\alpha)$$

und ist endlich. Entsprechendes gilt für den Randpunkt b.

(3) *Sind $f,\ g \in \mathcal{D}(T_{\max})$, so gilt*

$$(T_{\max} f, g) - (f, T_{\max} g) = W(f,\overline{g})(b) - W(f,\overline{g})(a) =: W_a^b(f,\overline{g}).$$

Beweis. Wegen Proposition 1.2.3 (1) gilt

$$W(f,\overline{g})(\beta) - W(f,\overline{g})(\alpha) = \int_\alpha^\beta W(f,\overline{g})'(t)dt = \int_\alpha^\beta \tau f(t)\overline{g(t)} - f(t)\overline{\tau g(t)} dt,$$

was (1) zeigt. Liegen nun f und g in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a, so existiert in der Gleichung aus (1) der Grenzwert für $\alpha \to a$. Also existiert auch der Grenzwert aus der Behauptung. Genauso sieht man die Behauptung für den Randpunkt b ein. Sind nun $f,\ g \in \mathcal{D}(T_{\max})$, so existieren die Grenzwerte aus (2). Lässt man in der Gleichung aus (1) α gegen a und β gegen b streben, so erhält man die Gleichung aus (3). □

Falls τ bei a regulär ist und $f,\ g$ in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a liegen, so gilt für den Grenzwert

$$W(f,\overline{g})(a) = f(a)\overline{g'(a)} - f'(a)\overline{g(a)},$$

da f und g stetig nach a fortgesetzt werden können.

Wir werden im Folgenden oft Funktionen aus $\mathcal{D}(T_{\max})$ mit speziellen Eigenschaften benötigen. Folgende Proposition stellt dann die Existenz solcher Funktionen sicher.

PROPOSITION 2.1.3. *Es gilt:*

(1) *Ist τ regulär und d_1, d_2, d_3, $d_4 \in \mathbb{C}$, so existiert ein $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $f(a) = d_1$, $f'(a) = d_2$, $f(b) = d_3$ und $f'(b) = d_4$.*
(2) *Sei τ regulär bei a und $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ dann existiert ein $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $f(a) = d_1$ und $f'(a) = d_2$. Entsprechende Aussage gilt für den Randpunkt b.*
(3) *Sei f_a in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a und f_b in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei b. Dann existiert ein $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $f = f_a$ in einer Umgebung von a und $f = f_b$ in einer Umgebung von b.*

BEWEIS. Sei τ regulär und u_1, u_2 das Fundamentalsystem von $\tau u = 0$ mit $u_1(a) = u_2'(a) = 0$ und $u_2(a) = u_1'(a) = 1$. Da diese Funktionen stetig auf $[a, b]$ fortgesetzt werden können, liegen u_1 und u_2 in $L^2(a, b)$ und damit in $\mathcal{D}(T_{\max})$. Sei $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} (u_1, u_1) & (u_2, u_1) \\ (u_1, u_2) & (u_2, u_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

So eine Lösung existiert, da die Determinante der Matrix wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung genau dann nicht verschwindet, wenn u_1, u_2 linear unabhängig sind, was der Fall ist. Sei $f = c_1 u_1 + c_2 u_2$ und v die Lösung von $\tau v = f$ mit $v(b) = v'(b) = 0$. Da v beschränkt ist, liegt v in $\mathcal{D}(T_{\max})$ und

$$\begin{aligned} v(a) &= W(v, \overline{u_1})(a) = W(v, \overline{u_1})(a) - W(v, \overline{u_1})(b) \\ &= (v, T_{\max} u_1) - (T_{\max} v, u_1) = -(f, u_1) \\ &= -c_1(u_1, u_1) - c_2(u_2, u_1) = d_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v'(a) &= -W(v, \overline{u_2})(a) = W(v, \overline{u_2})(b) - W(v, \overline{u_2})(a) \\ &= (T_{\max} v, u_2) - (v, T_{\max} u_2) = (f, u_2) \\ &= c_1(u_1, u_2) + c_2(u_2, u_2) = d_2. \end{aligned}$$

Analog konstruiert man eine Funktion $w \in \mathcal{D}(T_{\max})$, die bei a verschwindet und die geforderten Werte bei b annimmt. Die Funktion $v + w$ leistet dann das Gewünschte, womit (1) gezeigt ist.

Sei nun τ regulär bei a, dann ist für $c \in (a, b)$, $\tau|_{(a,c)}$ regulär. Wegen (1) existiert dann eine Funktion g auf $[a, c]$, sodass

$$g,\ g' \in AC[a, c], \quad g,\ \tau|_{(a,c)} g \in L^2(a, c),$$

$$g(a) = d_0, \quad g'(a) = d_1, \quad g(c) = 0 \quad \text{und} \quad g'(c) = 0$$

gilt. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \le c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $f \in AC^2_{loc}(a, b)$ und f, $\tau f \in L^2(a, b)$, also $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$.

Um (3) einzusehen sei f_a in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a und f_b in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei b. Weiters seien $\alpha,\ \beta \in (a,b)$ mit $\alpha < \beta$. Wegen (1) existiert eine Funktion g auf $[\alpha,\beta]$, sodass

$$g,\ g' \in AC[\alpha,\beta], \quad g,\ \tau|_{(\alpha,\beta)}g \in L^2(\alpha,\beta),$$

$$g(\alpha) = f_a(\alpha), \quad g'(\alpha) = f_a'(\alpha), \quad g(\beta) = f_b(\beta) \quad \text{und} \quad g'(\beta) = f_b'(\beta)$$

gilt. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} f_a(x) & \text{falls } x \le \alpha \\ g(x) & \text{falls } \alpha < x < \beta \\ f_b(x) & \text{falls } \beta \le x. \end{cases}$$

Dann ist $f \in AC^2_{loc}(a,b)$ und $f,\ \tau f \in L^2(a,b)$, also $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$. □

Wir wollen als nächstes zeigen, dass der maximale Operator $T_{\max}$ die Adjungierte des präminimalen Operators T_0 ist. Dazu benötigen wir zuerst noch die folgenden zwei Lemmata.

Lemma 2.1.4. *Sei $z \in \mathbb{C}$, dann ist*

$$\operatorname{ran}(T_0 - z) = \left\{ f \in L^2_{00}(a,b) \,\middle|\, \forall u \in \ker(\tau - \overline{z}) : \int_a^b f(t)\overline{u(t)}dt = 0 \right\}.$$

Dabei ist $L^2_{00}(a,b)$ der Raum aller Funktionen aus $L^2(a,b)$ mit kompaktem Träger in (a,b) und

$$\ker(\tau - \overline{z}) = \left\{ u \in AC^2_{loc}(a,b) \,|\, (\tau - \overline{z})\, u = 0 \right\}.$$

Beweis. Ist $f \in \operatorname{ran}(T_0 - z)$, so gilt $(\tau - z)g = f$ für ein bestimmtes $g \in \mathcal{D}(T_0)$. Da g außerhalb eines kompakten Intervalls $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$ verschwindet, verschwindet auch f außerhalb von $[\alpha,\beta]$ fast überall. Also liegt f in $L^2_{00}(a,b)$. Ist nun $u \in \ker(\tau - \overline{z})$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\overline{u(t)}dt &= \int_\alpha^\beta f(t)\overline{u(t)}dt = \int_\alpha^\beta \tau g(t)\overline{u(t)}dt - \int_\alpha^\beta z g(t)\overline{u(t)}dt \\ &= \int_\alpha^\beta g(t)\left(\overline{\tau u(t)} - z\overline{u(t)}\right)dt + \underbrace{W(u,g)(\beta) - W(u,g)(\alpha)}_{=0} \\ &= \int_\alpha^\beta \overline{(\tau - \overline{z})u(t)}g(t)dt = 0. \end{aligned}$$

Sei umgekehrt $f \in L^2_{00}(a,b)$, sodass für alle $u \in \ker(\tau - \overline{z})$,

$$\int_a^b \overline{u(t)}f(t)dt = 0$$

erfüllt ist. Weiters seien $\alpha,\ \beta \in (a,b)$, sodass $\operatorname{supp} f \subseteq [\alpha,\beta]$ und g die Lösung von $(\tau - z)g = f$ mit $g(\alpha) = 0$ und $g'(\alpha) = 0$. Dann gilt wegen Proposition 1.2.5

$$g(x) = u_1(x)\int_\alpha^x u_2(t)f(t)dt - u_2(x)\int_\alpha^x u_1(t)f(t)dt,$$

wobei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$ mit

$$u_1(\alpha) = u_2'(\alpha) = 1 \quad \text{und} \quad u_1'(\alpha) = u_2(\alpha) = 0$$

ist. Aus dieser Darstellung sieht man, dass g auf $(a, \alpha]$ verschwindet. Ist $x \in (\beta, b)$ so gilt

$$g(x) = u_1(x) \int_\alpha^\beta u_2(t) f(t) dt - u_2(x) \int_\alpha^\beta u_1(t) f(t) dt = 0.$$

Also verschwindet g außerhalb von $[\alpha, \beta]$, liegt also in $\mathcal{D}(T_0)$ und es gilt $f \in \operatorname{ran}(T_0 - z)$. □

Lemma 2.1.5. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $F_1, \ldots, F_n, F \in V^*$ lineare Funktionale auf V. Dann gilt*

$$F \in \operatorname{span}\{F_1, \ldots, F_n\} \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^n \ker F_i \subseteq \ker F.$$

Beweis. Angenommen $\bigcap_{i=1}^n \ker F_i \subseteq \ker F$. Sei Φ definiert durch

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl} V & \to & \mathbb{C}^n \\ v & \mapsto & (F_1(v), \ldots, F_n(v)) \end{array} \right. .$$

Wir definieren ein lineares Funktional g auf $\Phi(V)$ durch $g(\Phi(v)) = F(v)$. Da wegen der Annahme aus $\Phi(v_1) = \Phi(v_2)$ folgt, dass $F(v_1) = F(v_2)$ gilt, ist dieses Funktional wohldefiniert. Sei $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ eine lineare Fortsetzung von g. Dann existieren Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$G(v_1, \ldots, v_n) = (v_1, \ldots, v_n) \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \quad v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}.$$

Für ein beliebiges $v \in V$ gilt dann

$$F(v) = G(\Phi(v)) = G(F_1(v), \ldots, F_n(v)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(v).$$

Also ist $F \in \operatorname{span}\{F_1, \ldots, F_n\}$. Die Umkehrung ist offensichtlich. □

Satz 2.1.6. *Die Adjungierte des präminimalen Operators ist der maximale Operator,*

$$T_0^* = T_{\max}.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{D}(T_0)$ und $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ dann gilt wegen Lemma 2.1.2 und weil f und damit $W(f, \overline{g})$ nahe bei a und nahe bei b verschwinden

$$\begin{aligned} (T_0 f, g) - (f, T_{\max} g) &= W(f, \overline{g})(b) - W(f, \overline{g})(a) \\ &= \lim_{\beta \nearrow b} W(f, \overline{g})(\beta) - \lim_{\alpha \searrow a} W(f, \overline{g})(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Es gilt also $T_{\max} \subseteq T_0^*$. Zu zeigen bleibt, dass $\mathcal{D}(T_0^*) \subseteq \mathcal{D}(T_{\max})$. Sei dazu ein $f \in \mathcal{D}(T_0^*)$ gegeben und g eine Lösung von $\tau g = T_0^* f$. Wir definieren ein lineares Funktional F auf $L^2_{00}(a, b)$ durch

$$F(k) = \int_a^b \overline{(f(t) - g(t))} k(t) dt, \quad k \in L^2_{00}(a, b).$$

Sei weiters u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $\tau u = 0$ und F_1, F_2 die linearen Funktionale auf $L^2_{00}(a, b)$, definiert durch

$$F_j(k) = \int_a^b \overline{u_j(t)} k(t) dt, \quad k \in L^2_{00}(a, b), \ j \in \{1, 2\}.$$

Sei nun $h \in \ker F_1 \cap \ker F_2$, dann ist nach Lemma 2.1.4 auch $h \in \operatorname{ran} T_0$. Also existiert ein $k \in \mathcal{D}(T_0)$ mit $T_0 k = h$ und daher

$$\begin{aligned} F(h) &= \int_a^b \overline{(f(t)-g(t))} T_0 k(t) dt = (T_0 k, f) - \int_a^b k(t) \overline{\tau g(t)} dt \\ &= (k, T_0^* f) - \int_a^b k(t) \overline{T_0^* f(t)} dt = 0. \end{aligned}$$

Also ist $h \in \ker F$ und daher $\ker F_1 \cap \ker F_2 \subseteq \ker F$. Nach Lemma 2.1.5 ist also $F = c_1 F_1 + c_2 F_2$ mit geeigneten c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ und damit

$$\int_a^b \overline{(f(t)-g(t)-c_1 u_1(t) - c_2 u_2(t))} k(t) dt = 0 \quad k \in L^2_{00}(a,b).$$

Damit gilt notwendigerweise $f = g + c_1 u_1 + c_2 u_2$ fast überall. Es ist also $f \in AC^2_{loc}(a,b)$ und $\tau f = \tau g \in L^2(a,b)$, also $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$. □

Da $T_{\max}$ eine Erweiterung von T_0 ist, ist T_0 symmetrisch und damit abschließbar. Den Abschluss des präminimalen Operators nennen wir den minimalen, durch den Differentialausdruck τ induzierten Operator $T_{\min}$ in $L^2(a,b)$,

$$T_{\min} = \overline{T_0}.$$

Wir stellen nun einige Eigenschaften der Operatoren $T_{\min}$ und $T_{\max}$ in folgendem Korollar zusammen.

Korollar 2.1.7. *Es gilt:*

(1) *Der minimale Operator $T_{\min}$ ist dicht definiert, abgeschlossen und symmetrisch.*
(2) *Der maximale Operator $T_{\max}$ ist dicht definiert und abgeschlossen.*
(3) *Es gilt* $T_0 \subseteq T_{\min} \subseteq T_{\max}$, $T_{\max} = T^*_{\min}$ *und* $T_{\min} = T^*_{\max}$.
(4) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt* $\operatorname{ran}(T_{\min} - z)^\perp = \ker(T_{\max} - \overline{z})$.

Beweis. Da $T_{\min}$ als Abschluss eines symmetrischen Operators dicht definiert, abgeschlossen und symmetrisch ist gilt (1). $T_{\max}$ ist dicht definiert, da er eine Erweiterung von T_0 ist und als Adjungierte des präminimalen Operators abgeschlossen. Offenbar gilt $T_0 \subseteq \overline{T_0} = T_{\min}$ und $T_0 \subseteq T_{\max}$. Da $T_{\max}$ abgeschlossen ist, gilt damit auch $T_{\min} = \overline{T_0} \subseteq T_{\max}$. Weiters ist $T^*_{\min} = \overline{T_0}^* = T_0^* = T_{\max}$ und $T_{\min} = \overline{T_0} = T_0^{**} = T^*_{\max}$. (4) gilt, da allgemein für dicht definierte Operatoren T, $\operatorname{ran} T^\perp = \ker T^*$ gilt. □

Da der präminimale Operator reell bezüglich der natürlichen Konjugation ist, ist auch sein Abschluss $T_{\min}$ reell bezüglich der natürlichen Konjugation. Der minimale Operator kann auch explizit angegeben werden.

Satz 2.1.8. *Der minimale Operator ist gegeben durch*

$$\mathcal{D}(T_{\min}) = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \mid \forall g \in \mathcal{D}(T_{\max}) : W(f,g)(a) = W(f,g)(b) = 0\}$$

und $T_{\min} f = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(T_{\min})$.

Beweis. Ist $f \in \mathcal{D}(T_{\min}) = \mathcal{D}(T^*_{\max}) \subseteq \mathcal{D}(T_{\max})$ so gilt

$$0 = (T_{\max} f, g) - (f, T_{\max} g) = W(f, \overline{g})(b) - W(f, \overline{g})(a)$$

für alle $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$. Ist ein beliebiges $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ gegeben, so existiert ein $g_a \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $\overline{g_a} = g$ in einer Umgebung von a und $g_a = 0$ in einer Umgebung von b. Daraus folgt

$$W(f,g)(a) = W(f,\overline{g_a})(a) - W(f,\overline{g_a})(b) = 0.$$

Analog sieht man, dass $W(f,g)(b) = 0$ für alle $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ gilt. Ist umgekehrt $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$, sodass

$$W(f,g)(a) = W(f,g)(b) = 0, \quad g \in \mathcal{D}(T_{\max})$$

gilt, so ist auch

$$(T_{\max}f, g) - (f, T_{\max}g) = W(f,\overline{g})(b) - W(f,\overline{g})(a) = 0,$$

also ist $f \in \mathcal{D}(T_{\max}^*) = \mathcal{D}(T_{\min})$. Da $T_{\min}$ eine Einschränkung von $T_{\max}$ ist der Satz damit bewiesen. □

Falls τ bei einem Randpunkt regulär ist, so kann der minimale Operator auch einfacher angegeben werden.

KOROLLAR 2.1.9. *Ist τ regulär bei a, so gilt*

$$\mathcal{D}(T_{\min}) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 = f(a) = f'(a), \\ 0 = W(f,g)(b), \quad g \in \mathcal{D}(T_{\max}) \end{array} \right\}.$$

Entsprechende Aussage gilt für den Randpunkt b. Ist τ regulär, so gilt

$$\mathcal{D}(T_{\min}) = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \mid f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\}.$$

BEWEIS. Sei $f \in \mathcal{D}(T_{\min})$ und v, $w \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit

$$v(a) = w'(a) = 1 \quad \text{und} \quad v'(a) = w(a) = 0.$$

Wegen $0 = W(f,v)(a) = f(a)$ und $0 = W(f,w)(a) = f'(a)$ folgt die erste Behauptung. Analog zeigt man die Behauptung für den Randpunkt b. Die restliche Behauptung folgt nun direkt aus dem bereits Gezeigten. □

SATZ 2.1.10. *Die Defektzahlen des minimalen Operators $T_{\min}$ sind gleich und maximal 2, also*

$$n(T_{\min}) := \dim\ker(T_{\max} - i) = \dim\ker(T_{\max} + i) \leq 2.$$

BEWEIS. Weil es jeweils genau zwei linear unabhängige Lösungen von $(\tau - i)u = 0$ und von $(\tau + i)u = 0$ gibt, sind $\ker(T_{\max} - i)$ und $\ker(T_{\max} + i)$ höchstens zweidimensional. Weiters gilt

$$u \in \ker(T_{\max} - i) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{u} \in \ker(T_{\max} + i).$$

Da aus u_1 und u_2 linear unabhängig folgt, dass auch $\overline{u_1}$ und $\overline{u_2}$ linear unabhängig sind, folgt damit die Behauptung. □

Nach den von Neumann'schen Formeln (siehe beispielsweise [1], [4]) gilt

$$\mathcal{D}(T_{\max}) = \mathcal{D}(T_{\min}) \dotplus \ker(T_{\max} - i) \dotplus \ker(T_{\max} + i).$$

Der maximale Operator $T_{\max}$ ist also eine $2\,n(T_{\min})$-dimensionale Erweiterung von $T_{\min}$. Da die Defektzahlen von $T_{\min}$ gleich sind, existieren selbstadjungierte Erweiterungen von $T_{\min}$. Diese sind genau die $n(T_{\min})$-dimensionalen, symmetrischen Erweiterungen von $T_{\min}$. Weiters folgt aus der Endlichkeit der Defektzahlen, dass die selbstadjungierten Erweiterungen halbbeschränkt nach unten sind, falls $T_{\min}$ es ist. Ist τ regulär, so ist das immer der Fall.

Proposition 2.1.11. *Ist τ regulär, so ist der minimale Operator $T_{\min}$ halbbeschränkt nach unten, also*

$$(T_{\min}f, f) \geq C \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{D}(T_{\min})$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{D}(T_{\min})$. Dann gilt für alle x, $y \in (a,b)$

$$\begin{aligned}|f(x)|^2 &\leq (|f(y)| + |f(y) - f(x)|)^2 \leq 2|f(y)|^2 + 2\left|\int_x^y f'(t)dt\right|^2 \\ &\leq 2|f(y)|^2 + 2\,|y-x| \int_x^y \left|f'(t)\right|^2 dt \leq 2|f(y)|^2 + 2\,|y-x|\,\|f'\|^2.\end{aligned}$$

Ist $0 < \varepsilon < b - a$, so gilt dann für alle $x \in (a,b)$

$$\begin{aligned}|f(x)|^2\varepsilon &= \int_x^{x+\varepsilon} |f(x)|^2 dy \leq 2\int_x^{x+\varepsilon} |f(y)|^2 + 2\|f'\|^2 \int_x^{x+\varepsilon} |y-x|\,dy \\ &\leq 2\|f\|^2 + \varepsilon^2\|f'\|^2.\end{aligned}$$

Setzt man $q_- = \min(0,q)$, so erhält man mit partieller Integration, da f und f' am Rand verschwinden

$$\begin{aligned}(T_{\min}f, f) &= \int_a^b -f''(x)\overline{f(x)} + q(x)|f(x)|^2 dx \\ &= \int_a^b |f'(x)|^2 + q(x)|f(x)|^2 dx \\ &\geq \|f'\|^2 + \int_a^b q_-(x)|f(x)|^2 dx \\ &\geq \|f'\|^2 + \int_a^b q_-(x)\left(\frac{2}{\varepsilon}\|f\|^2 + \varepsilon\|f'\|^2\right) dx \\ &= \|f'\|^2\left(1 + \varepsilon\int_a^b q_-(x)dx\right) + \frac{2}{\varepsilon}\int_a^b q_-(x)dx\|f\|^2 \\ &\geq \frac{2}{\varepsilon}\int_a^b q_-(x)dx\|f\|^2,\end{aligned}$$

falls man nur $\varepsilon < -\left(\int_a^b q_-(x)dx\right)^{-1}$ wählt. □

2.2. Weyl'sche Alternative

Wir sagen τ ist bei a im Grenzkreisfall (GKF), falls für alle $z \in \mathbb{C}$, alle Lösungen der Gleichung $(\tau - z)u = 0$ in $L^2(a,b)$ bei a liegen. Weiters sagen wir, τ ist bei a im Grenzpunktfall (GPF), falls für alle $z \in \mathbb{C}$, eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$ nicht in $L^2(a,b)$ bei a liegt. Entsprechend definiert man Grenzkreis- und Grenzpunktfall für den Randpunkt b. Man sieht unmittelbar, dass sich Grenzkreis- und Grenzpunktfall gegenseitig ausschließen. Dass bei jedem Randpunkt stets einer der beiden Fälle vorliegt, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 2.2.1. *Existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$, sodass alle Lösungen der Gleichung $(\tau - z_0)u = 0$ in $L^2(a,b)$ bei a liegen, so ist τ bei a im Grenzkreisfall. Entsprechende Aussage gilt für den Randpunkt b.*

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ und u eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$. Ist u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $(\tau - z_0)u = 0$ mit $W(u_1, u_2) = 1$, so liegen u_1 und u_2 nach Voraussetzung in $L^2(a,b)$ bei a. Es existiert daher ein $c \in (a,b)$, sodass für die Funktion $v = |u_1| + |u_2|$

$$|z - z_0| \int_a^c v(t)^2 dt \leq 1/2$$

gilt. Da u Lösung der inhomogenen Gleichung $(\tau - z_0)u = (z - z_0)u$ ist, gilt nach Proposition 1.2.5 mit geeigneten Konstanten c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$, für $x \in (a,b)$

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + (z - z_0) \int_c^x (u_1(x)u_2(t) - u_2(x)u_1(t))\, u(t) dt.$$

Also hat man, mit $C = \max(|c_1|, |c_2|)$

$$|u(x)| \leq Cv(x) + |z - z_0| v(x) \int_x^c v(t)|u(t)| dt, \quad x \in (a,c)$$

und mit der Ungleichung $(d_1 + d_2)^2 \leq 2d_1^2 + 2d_2^2$ für d_1, $d_2 \in \mathbb{R}$, sowie der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|u(x)|^2 \leq 2C^2 v(x)^2 + 2|z - z_0|^2 v(x)^2 \int_x^c v(t)^2 dt \int_x^c |u(t)|^2 dt, \quad x \in (a,c).$$

Integriert man diese Ungleichung von $s \in (a,c)$ nach c, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_s^c |u(t)|^2 dt &\leq 2C^2 \int_a^c v(t)^2 dt + 2|z - z_0|^2 \left(\int_a^c v(t)^2 dt \right)^2 \int_s^c |u(t)|^2 dt \\ &\leq 2C^2 \int_a^c v(t)^2 dt + \frac{1}{2} \int_s^c |u(t)|^2 dt \end{aligned}$$

und daher

$$\int_s^c |u(t)|^2 dt \leq 4C^2 \int_a^c v(t)^2 dt < \infty.$$

Weil $s \in (a,c)$ beliebig war, gilt auch

$$\int_a^c |u(t)|^2 dt \leq 4C^2 \int_a^c v(t)^2 dt < \infty.$$

Da u stetig ist liegt u in $L^2(a,b)$ bei a. □

Aus Lemma 2.2.1 folgt nun direkt die Weyl'sche Alternative.

Satz 2.2.2 (Weyl'sche Alternative). *τ ist bei jedem Randpunkt entweder im Grenzkreisfall oder im Grenzpunktfall.*

Proposition 2.2.3. *Ist τ regulär bei a, so ist τ bei a im Grenzkreisfall. Entsprechende Aussage gilt für den Randpunkt b.*

Beweis. Sei τ regulär bei a und u eine Lösung von $\tau u = 0$. Dann ist u nach Satz 1.2.7 stetig in a fortsetzbar und damit beschränkt in einer Umgebung von a. Da a endlich ist, liegt u in $L^2(a,b)$ bei a. □

Liegt bei einem Randpunkt der Grenzkreisfall vor, so sagt man auch τ sei quasiregulär bei diesem Randpunkt. Proposition 2.2.3 rechtfertigt diese Bezeichnung.

Wir bezeichnen mit $\Gamma(T_{\min})$ den Regularitätsbereich von $T_{\min}$

$$\Gamma(T_{\min}) = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists C > 0 : \forall f \in \mathcal{D}(T_{\min}) : \|(T_{\min} - z)f\| \geq C \|f\|\}.$$

LEMMA 2.2.4. *Ist $z \in \Gamma(T_{\min})$ so existiert eine nichttriviale Lösung u von $(\tau - z)u = 0$, die in $L^2(a,b)$ bei a liegt. Entsprechende Aussage gilt für den Randpunkt b.*

BEWEIS. Sei zunächst vorausgesetzt, dass τ bei b regulär ist. Falls keine nichttriviale Lösung von $(\tau - z)u = 0$ in $L^2(a,b)$ bei a liegt, so ist $\ker(T_{\max} - z) = \{0\}$ und daher $n(T_{\min}) = 0$, also $T_{\min} = T_{\max}$. Um den Widerspruch zu sehen betrachten wir Funktionen $f,\ g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit

$$f(b) = g'(b) = 1 \quad \text{und} \quad f'(b) = g(b) = 0.$$

Wegen

$$W(f,\overline{g})(b) = f(b)g'(b) - g(b)f'(b) = 1 \neq 0$$

ist $f \notin \mathcal{D}(T_{\min})$, was ein Widerspruch zu $T_{\min} = T_{\max}$ ist.

Falls τ bei b nicht regulär ist betrachten wir für ein $c \in (a,b)$, den bei c regulären Differentialausdruck $\tau|_{(a,c)}$. Sei T_c der, durch den Differentialausdruck $\tau|_{(a,c)}$ induzierte minimale Operator. Setzt man eine Funktion $f_c \in \mathcal{D}(T_c)$ durch Null auf ganz (a,b) fort, so liegt diese Fortsetzung f in $\mathcal{D}(T_{\min})$ und es gilt

$$\|(T_c - z)f_c\|_c = \|(T_{\min} - z)f\| \geq C\|f\| = C\|f_c\|_c,$$

für eine positive Konstante C, wobei $\|\cdot\|_c$ die Norm auf $L^2(a,c)$ ist. Die Zahl z ist also im Regularitätsbereich von T_c. Nach dem bereits Gezeigten und da die Lösungen von $(\tau|_{(a,c)} - z)u = 0$ genau die Lösungen von $(\tau - z)u = 0$ eingeschränkt auf (a,c) sind, existiert eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$, die in $L^2(a,b)$ bei a liegt. □

KOROLLAR 2.2.5. *Ist $z \in \Gamma(T_{\min})$ und liegt bei a der Grenzpunktfall vor, so existiert eine, bis auf skalare Vielfache eindeutige, nichttriviale Lösung der Gleichung $(\tau - z)u = 0$, die in $L^2(a,b)$ bei a liegt. Entsprechend Aussage gilt für den Randpunkt b.*

BEWEIS. Nach Lemma 2.2.4 existiert eine nichttriviale Lösung der Gleichung $(\tau - z)u = 0$, die in $L^2(a,b)$ bei a liegt. Läge eine weitere, linear unabhängige Lösung in $L^2(a,b)$ bei a, so würden bereits alle Lösungen in $L^2(a,b)$ bei a liegen, was nicht möglich ist, da τ bei a im Grenzpunktfall ist. □

Folgendes Lemma zeigt, dass man Grenzkreisfall und Grenzpunktfall auch mit Hilfe der Wronskideterminante charakterisieren kann.

LEMMA 2.2.6. *τ ist bei a genau dann im Grenzpunktfall, wenn*

$$W(f,g)(a) = 0, \quad \textit{für alle } f,\ g \in \mathcal{D}(T_{\max}).$$

τ ist bei a genau dann im Grenzkreisfall, wenn ein $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ existiert, sodass

$$W(f,\overline{f})(a) = 0 \quad \textit{und} \quad W(f,g)(a) \neq 0, \quad \textit{für ein } g \in \mathcal{D}(T_{\max}).$$

Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

Beweis. Sei τ bei a im Grenzkreisfall und u_1, u_2 ein reelles Fundamentalsystem der Gleichung $\tau u = 0$ mit $W(u_1, u_2) = 1$. u_1 und u_2 liegen in $L^2(a,b)$ bei a und damit auch in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a. Dann existieren f, $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $f = u_1$ und $g = u_2$ nahe bei a und $f = g = 0$ nahe bei b. Es gilt dann

$$W(f,g)(a) = W(u_1,u_2)(a) = 1 \neq 0$$

und

$$W(f,\overline{f})(a) = W(u_1,\overline{u_1})(a) = 0$$

da u_1 reell ist.

Liege nun bei a der Grenzpunktfall vor. Sei zunächst angenommen, dass τ bei b regulär ist. Dann ist $T_{\max}$ eine 2-dimensionale Erweiterung von $T_{\min}$, da nach Korollar 2.2.5, $\dim\ker(T_{\max} - i) = 1$ gilt. Seien v, $w \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $v = w = 0$ in einer Umgebung von a und

$$v(b) = w'(b) = 1 \quad \text{und} \quad v'(b) = w(b) = 0.$$

Dann ist

$$\mathcal{D}(T_{\max}) = \mathcal{D}(T_{\min}) + \operatorname{span}\{v, w\},$$

da v, w linear unabhängig sind und nicht in $\mathcal{D}(T_{\min})$ liegen. Seien nun f, $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$ dann existieren f_0, $g_0 \in \mathcal{D}(T_{\min})$, sodass $f = f_0$ und $g = g_0$ in einer Umgebung von a und daher

$$W(f,g)(a) = W(f_0,g_0)(a) = 0.$$

Falls nun τ bei b nicht regulär ist, betrachtet man für ein $c \in (a,b)$, den bei c regulären Differentialausdruck $\tau|_{(a,c)}$ und verwendet, dass für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$, $f|_{(a,c)}$ im Definitionsbereich des maximalen von $\tau|_{(a,c)}$ induzierten Operators liegt. □

Liegt bei a und bei b der Grenzpunktfall vor, so zeigt Korollar 2.2.5, dass es für jedes $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ Lösungen von $(\tau - z)u = 0$ gibt, die in $L^2(a,b)$ bei a oder bei b liegen. Folgendes Lemma zeigt, dass es jedoch keine nichttrivialen Lösungen geben kann, die in $L^2(a,b)$ liegen.

Lemma 2.2.7. *Sei τ bei a und bei b im Grenzpunktfall und $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Dann liegt keine nichttriviale Lösung von $(\tau - z)u = 0$ in $L^2(a,b)$.*

Beweis. Ist $u \in L^2(a,b)$ eine Lösung der Gleichung $(\tau - z)u = 0$, so ist $\overline{u} \in L^2(a,b)$ eine Lösung von $(\tau - \overline{z})\overline{u} = 0$. Beide Funktionen, u und $\overline{u}$ liegen in $\mathcal{D}(T_{\max})$. Für $\alpha, \beta \in (a,b)$, $\alpha < \beta$ gilt dann, wegen der Lagrange-Identität

$$W(u,\overline{u})(\beta) - W(u,\overline{u})(\alpha) = (z - \overline{z}) \int_\alpha^\beta u(t)\overline{u(t)}dt = 2i\operatorname{Im}(z) \int_\alpha^\beta |u(t)|^2 dt.$$

Wegen Lemma 2.2.6 konvergiert die linke Seite gegen 0 falls $\alpha \to a$ und $\beta \to b$. Da die rechte Seite dann gegen $2i\operatorname{Im}(z)\|u\|^2$ konvergiert, gilt $\|u\|^2 = 0$ und daher $u = 0$. □

Satz 2.2.8. *Für die Defektzahlen des minimalen Operators $T_{\min}$ gilt:*

$$n(T_{\min}) = \begin{cases} 2 & \textit{falls } \tau \textit{ an beiden Randpunkten im GKF ist.} \\ 1 & \textit{falls } \tau \textit{ an genau einem Randpunkt im GKF ist.} \\ 0 & \textit{falls } \tau \textit{ an keinem Randpunkt im GKF ist.} \end{cases}$$

Beweis. Liegt bei a und bei b der Grenzkreisfall vor, so liegen die zwei linear unabhängigen Lösungen von $(\tau - i)u = 0$ in $L^2(a,b)$ bei a und bei b, daher auch in $L^2(a,b)$ und damit in $\mathcal{D}(T_{\max})$. Daher gilt also

$$n(T_{\min}) = \dim\ker(T_{\max} - i) = 2.$$

Liegt nun bei einem Randpunkt der Grenzkreisfall und beim anderen der Grenzpunktfall vor, so existiert nach Lemma 2.2.5, bis auf skalare Vielfache genau eine nichttriviale Lösung von $(\tau - i)u = 0$ die in $L^2(a,b)$ bei dem GPF-Randpunkt liegt und damit in $L^2(a,b)$ und daher auch in $\mathcal{D}(T_{\max})$. Es gilt daher $n(T_{\min}) = 1$.

Liegt an beiden Randpunkten der Grenzpunktfall vor, so ist wegen Lemma 2.2.7, $\ker(T_{\max} - i) = \{0\}$ und daher $n(T_{\min}) = 0$. □

2.3. Selbstadjungierte Realisierungen

Ein Operator S in $L^2(a,b)$ ist eine selbstadjungierte Realisierung von τ, falls S eine selbstadjungierte Einschränkung des maximalen Operators $T_{\max}$ ist. Jede solche selbstadjungierte Realisierung von τ ist notwendigerweise eine Erweiterung des minimalen Operators $T_{\min}$. Aus $S \subseteq T_{\max}$ folgt nämlich, da die Adjungierten der umgekehrten Inklusion genügen, $T_{\min} = T_{\max}^* \subseteq S^* = S$.

Folgender Satz ist oft nützlich, um zu überprüfen, ob ein Operator eine selbstadjungierte Realisierung von τ ist. Man beachte, dass der Definitionsbereich des Operators dabei nicht explizit angegeben wird.

Satz 2.3.1. *Ein Operator S ist genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn*

$$\mathcal{D}(S) = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \mid \forall g \in \mathcal{D}(S) : W(f,\overline{g})(b) - W(f,\overline{g})(a) = 0\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$.

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir

$$D = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \mid \forall g \in \mathcal{D}(S) : W(f,\overline{g})(b) - W(f,\overline{g})(a) = 0\}.$$

Sei zuerst S eine selbstadjungierte Realisierung von τ. Da S dann eine Einschränkung von $T_{\max}$ ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{D}(S) = D$ gilt. Sei dazu $f \in \mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(T_{\max})$ und $g \in \mathcal{D}(S)$. Dann gilt, da S selbstadjungiert ist und wegen Lemma 2.1.2

$$0 = (Sf,g) - (f,Sg) = (T_{\max}f,g) - (f,T_{\max}g) = W(f,\overline{g})(b) - W(f,\overline{g})(a)$$

und damit $f \in D$. Sei umgekehrt ein $f \in D$ gegeben, dann gilt für alle $g \in \mathcal{D}(S)$

$$0 = W(f,\overline{g})(b) - W(f,\overline{g})(a) = (T_{\max}f,g) - (f,T_{\max}g) = (Sf,g) - (f,Sg).$$

Also liegt f im Definitionsbereich der Adjungierten $S^* = S$.

Gelte umgekehrt $\mathcal{D}(S) = D$ und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$. S ist eine Einschränkung von $T_{\max}$, es bleibt daher zu zeigen dass S selbstadjungiert ist. S ist symmetrisch da für alle f, $g \in \mathcal{D}(S)$ gilt, dass $(Sf,g) = (f,Sg)$. Es bleibt also $\mathcal{D}(S^*) \subseteq \mathcal{D}(S)$ zu zeigen. Sei dazu $f \in \mathcal{D}(S^*)$. Da Funktionen aus $\mathcal{D}(T_{\min})$ auch in D und damit in $\mathcal{D}(S)$ liegen, ist S eine Fortsetzung von

$T_{\min}$ und es gilt daher $S^* \subseteq T_{\min}^* = T_{\max}$, also $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$. Für Funktionen $g \in \mathcal{D}(S)$ gilt dann

$$0 = (Sf, g) - (f, S^*g) = (T_{\max}f, g) - (f, T_{\max}g) = W(f, \overline{g})(b) - W(f, \overline{g})(a),$$

also ist $f \in D = \mathcal{D}(S)$. □

Wir wollen im Folgenden die selbstadjungierten Realisierungen von τ bestimmen. Dabei ist der einfachste Fall derjenige, wenn an beiden Randpunkten der Grenzpunktfall vorliegt.

Satz 2.3.2. *Liegt bei a und bei b der Grenzpunktfall vor, so gilt*

$$T_{\min} = T_{\max}.$$

$T_{\max}$ *ist die einzige selbstadjungierte Realisierung von τ.*

Beweis. Nach Satz 2.2.8 ist in diesem Fall $T_{\min} = T_{\max}$, also ist $T_{\max}$ selbstadjungiert. Wegen $T_{\min} \subseteq S \subseteq T_{\max}$ ist $T_{\max}$ die einzige selbstadjungierte Realisierung von τ. □

Als nächstes wollen wir die selbstadjungierten Realisierungen von τ bestimmen, falls τ bei einem Randpunkt im Grenzkreisfall und beim anderen Randpunkt im Grenzpunktfall ist. Wir sagen eine Funktion $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ erfüllt (2.1a), falls

$$\text{(2.1a)} \qquad W(v, \overline{v})(a) = 0 \quad \text{und} \quad W(h, \overline{v})(a) \neq 0, \quad \text{für ein } h \in \mathcal{D}(T_{\max}).$$

Entsprechend sagen wir v erfüllt (2.1b), falls

$$\text{(2.1b)} \qquad W(v, \overline{v})(b) = 0 \quad \text{und} \quad W(h, \overline{v})(b) \neq 0, \quad \text{für ein } h \in \mathcal{D}(T_{\max}).$$

τ ist bei a nach Lemma 2.2.6 genau dann im Grenzkreisfall, wenn eine Funktion $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ existiert, die (2.1a) erfüllt. Ist τ bei a im Grenzkreisfall und bei b im Grenzpunktfall, so gilt (2.1a) genau dann, wenn $v \notin \mathcal{D}(T_{\min})$ und $W(v, \overline{v})(a) = 0$.

Proposition 2.3.3. *Es gilt:*

(1) *Für alle Funktionen f_1, f_2, f_3, $f_4 \in AC^2_{loc}(a, b)$ gilt auf (a, b) die Plücker'sche Identität*

$$W(f_1, f_2)W(f_3, f_4) + W(f_1, f_3)W(f_4, f_2) + W(f_1, f_4)W(f_2, f_3) = 0.$$

(2) *Sei $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a), dann gilt für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$*

$$W(f, \overline{v})(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(\overline{f}, \overline{v})(a) = 0.$$

(3) *Sei $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a), dann gilt für f, $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$*

$$W(f, \overline{v})(a) = W(g, \overline{v})(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(f, g)(a) = 0.$$

Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

Beweis. Die linke Seite in (1) ist gleich der Determinante

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_1' & f_2' & f_3' & f_4' \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_1' & f_2' & f_3' & f_4' \end{vmatrix},$$

die offensichtlich verschwindet, was (1) zeigt.

Sei nun $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a). Dann existiert ein $h \in \mathcal{D}(T_{\max})$, sodass $W(h, \overline{v})(a) \neq 0$. Setzt man in (1) $f_1 = v$, $f_2 = \overline{v}$, $f_3 = h$ und $f_4 = \overline{h}$, so sieht man, dass dann auch $W(h, v)(a) \neq 0$ ist. (2) folgt nun aus (1) mit $f_1 = f$, $f_2 = v$, $f_3 = \overline{v}$, $f_4 = h$ und (3) folgt mit $f_1 = f$, $f_2 = g$, $f_3 = \overline{v}$, $f_4 = h$. □

Wir können nun die selbstadjungierten Realisierungen angeben, falls an einem Randpunkt der Grenzkreisfall und an dem anderen der Grenzpunktfall vorliegt.

Satz 2.3.4. *Ist τ bei a im Grenzkreisfall und bei b im Grenzpunktfall, so ist ein Operator S genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn ein $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit* (2.1a) *existiert, sodass*

$$\mathcal{D}(S) = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \mid W(f, \overline{v})(a) = 0\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$.

Entsprechende Aussagen gelten falls τ bei a im Grenzpunktfall und bei b im Grenzkreisfall ist.

Beweis. Da in diesem Fall $n(T_{\min}) = 1$ ist, sind die selbstadjungierten Fortsetzungen von $T_{\min}$ genau die eindimensionalen, symmetrischen Fortsetzungen von $T_{\min}$. Man sieht also, dass ein Operator S genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ ist, wenn ein $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a) existiert, sodass

$$\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T_{\min}) + \operatorname{span}\{v\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$. Es bleibt daher zu zeigen, dass

$$\mathcal{D}(T_{\min}) + \operatorname{span}\{v\} = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \mid W(f, \overline{v})(a) = 0\}$$

gilt. Dass der linke im rechten Teilraum enthalten ist, folgt aus Satz 2.1.8 und da $W(v, \overline{v})(a) = 0$ gilt. Der rechte Teilraum kann aber auch nicht mehr sein, da er sonst gleich $\mathcal{D}(T_{\max})$ wäre, woraus mit Proposition 2.3.3 (3) folgen würde, dass $W(f, g)(a) = 0$ für alle f, $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$, was ein Widerspruch dazu ist, dass τ bei a im Grenzkreisfall ist. □

Aus dem Beweis von Satz 2.3.4 ersieht man unmittelbar, dass zwei selbstadjungierte Realisierungen genau dann verschieden sind, wenn die entsprechenden Funktionen v aus Satz 2.3.4 linear unabhängig modulo $\mathcal{D}(T_{\min})$ sind. Die Funktion v kann stets so gewählt werden, dass v in einer Umgebung von a eine reelle Lösung von $(\tau - z)u = 0$ mit $z \in \mathbb{R}$ ist.

Mit Proposition 2.3.3 (2) sieht man, dass in diesem Fall jede selbstadjungierte Realisierung reell bezüglich der natürlichen Konjugation ist.

Als nächstes werden wir die selbstadjungierten Realisierungen von τ angeben, falls τ bei beiden Randpunkten im Grenzkreisfall ist.

Satz 2.3.5. *Ist τ bei a und bei b im Grenzkreisfall, so ist ein Operator S genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn modulo $\mathcal{D}(T_{\min})$ linear unabhängige v, $w \in \mathcal{D}(T_{\max})$ existieren, die*

$$W_a^b(v, \overline{v}) = W_a^b(w, \overline{w}) = W_a^b(v, \overline{w}) = 0 \tag{2.2}$$

erfüllen, sodass

$$\mathcal{D}(S) = \left\{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \mid W_a^b(f, \overline{v}) = W_a^b(f, \overline{w}) = 0\right\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$.

Beweis. Da in diesem Fall $n(T_{\min}) = 2$ ist, sind die selbstadjungierten Fortsetzungen von $T_{\min}$ genau die zweidimensionalen, symmetrischen Fortsetzungen von $T_{\min}$. Ein Operator S ist daher genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn modulo $\mathcal{D}\,(T_{\min})$ linear unabhängige v, $w \in \mathcal{D}\,(T_{\max})$ mit (2.2) existieren, sodass

$$\mathcal{D}\,(S) = \mathcal{D}\,(T_{\min}) + \operatorname{span}\{v, w\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}\,(S)$. Es bleibt daher zu zeigen, dass

$$\mathcal{D}\,(T_{\min}) + \operatorname{span}\{v, w\} = \Big\{ f \in \mathcal{D}\,(T_{\max})\,|W_a^b(f, \overline{v}) = W_a^b(f, \overline{w}) = 0 \Big\} = D$$

gilt, wobei wir den rechten Teilraum zur Abkürzung mit D bezeichnen. Dass der linke Teilraum in D enthalten ist, ist klar wegen Satz 2.1.8 und (2.2). Um zu sehen, dass D auch nicht größer sein kann, betrachten wir die linearen Funktionale F_v, F_w auf $\mathcal{D}\,(T_{\max})$, definiert durch

$$F_v(f) = W_a^b(f, \overline{v}) \quad \text{und} \quad F_w(f) = W_a^b(f, \overline{w}) \quad \text{für } f \in \mathcal{D}\,(T_{\max})\,.$$

Der Durchschnitt der Kerne dieser Funktionale ist genau D. Diese Funktionale sind linear unabhängig, denn sind $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und $c_1 F_v + c_2 F_w = 0$, so ist für alle $f \in \mathcal{D}\,(T_{\max})$

$$0 = c_1 F_v(f) + c_2 F_w(f) = c_1 W_a^b(f, \overline{v}) + c_2 W_a^b(f, \overline{w}) = W_a^b(f, c_1\overline{v} + c_2\overline{w}).$$

Da für jedes $f \in \mathcal{D}\,(T_{\max})$ ein $\tilde{f} \in \mathcal{D}\,(T_{\max})$ existiert, dass bei a mit f übereinstimmt und bei b verschwindet, gilt auch

$$W(f, c_1\overline{v} + c_2\overline{w})(a) = 0 \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}\,(T_{\max})\,.$$

Da das gleiche auch für b gilt, ist nach Satz 2.1.8, $c_1\overline{v} + c_2\overline{w} \in \mathcal{D}\,(T_{\min})$. Da v und w linear unabhängig modulo $\mathcal{D}\,(T_{\min})$ sind, folgt $c_1 = c_2 = 0$, also sind F_v, F_w linear unabhängig. Aus Lemma 2.1.5 folgt nun

$$\ker F_v \not\subseteq \ker F_w \quad \text{und} \quad \ker F_w \not\subseteq \ker F_v.$$

Es existieren also $f_v, f_w \in \mathcal{D}\,(T_{\max})$ sodass $W_a^b(f_v, \overline{v}) = W_a^b(f_w, \overline{w}) = 0$ aber $W_a^b(f_v, \overline{w}) \neq 0$ und $W_a^b(f_w, \overline{v}) \neq 0$. f_v und f_w sind linear unabhängig und liegen nicht in D. D kann also höchstens eine zweidimensionale Erweiterung von $\mathcal{D}\,(T_{\min})$ sein, was die Behauptung zeigt. □

Falls τ bei beiden Randpunkten im Grenzkreisfall ist, so kann man die selbstadjungierten Realisierungen in zwei Kategorien einteilen. Ist nämlich S eine selbstadjungierte Realisierung von τ, so sagen wir S ist eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen, falls ein $v \in \mathcal{D}\,(T_{\max})$ mit (2.1a) und ein $w \in \mathcal{D}\,(T_{\max})$ mit (2.1b) existiert, sodass

$$\mathcal{D}\,(S) = \{f \in \mathcal{D}\,(T_{\max})\,|\; W(f, \overline{v})(a) = W(f, \overline{w})(b) = 0\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}\,(S)$ gilt. Umgekehrt ist jeder solcher Operator, wegen Satz 2.3.4 eine selbstadjungierte Realisierung von τ. Ist eine selbstadjungierte Realisierung S von τ keine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen, so sagen wir S ist eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit gekoppelten Randbedingungen.

Ist S eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen, so ist S wegen Proposition 2.3.3 (2) reell bezüglich der natürlichen Konjugation. Im Fall von gekoppelten Randbedingungen muss das nicht gelten.

2.4. Anfangszahlen

Wir wollen in diesem Abschnitt eine alternative Charakterisierung der selbstadjungierten Realisierungen von τ angeben.

Ist τ bei a im Grenzkreisfall und w_1, $w_2 \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit

$$W(w_1,\overline{w_2})(a) = 1 \quad \text{und} \quad W(w_1,\overline{w_1})(a) = W(w_2,\overline{w_2})(a) = 0, \tag{2.3a}$$

so sind die linearen Funktionale α_1, α_2 auf der Menge aller Funktionen f, die in $\mathcal{D}(T_{\max})$ bei a liegen, definiert durch

$$\alpha_1(f) = W(f,\overline{w_2})(a) \quad \text{und} \quad \alpha_2(f) = -W(f,\overline{w_1})(a),$$

die Anfangszahlen bezüglich w_1, w_2 bei a. Entsprechend definiert man Anfangszahlen für den Randpunkt b.

Ist τ bei a im Grenzkreisfall, so existieren stets Funktionen w_1, w_2, welche die Bedingung (2.3a) erfüllen. Man wähle beispielsweise Funktionen w_1, w_2, die für ein $z \in \mathbb{R}$ in einer Umgebung von a mit einem reellen Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$, das $W(w_1, w_2) = 1$ erfüllt, übereinstimmen.

Die Anfangszahlen spielen im quasiregulären Fall eine ähnliche Rolle, wie die Punktauswertungen der Funktion und deren Ableitung im Randpunkt, im regulären Fall.

Proposition 2.4.1. *Ist τ regulär bei a, so existieren w_1, $w_2 \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit* (2.3a)*, sodass die Anfangszahlen α_1, α_2 bezüglich w_1, w_2*

$$\alpha_1(f) = f(a) \quad \textit{und} \quad \alpha_2(f) = f'(a), \quad f \in \mathcal{D}(T_{\max})$$

erfüllen. Entsprechende Aussage gilt für den Randpunkt b.

Beweis. Da τ bei a regulär ist, existieren Funktionen w_1, $w_2 \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit

$$w_1(a) = w_2'(a) = 1 \quad \text{und} \quad w_1'(a) = w_2(a) = 0.$$

Dann ist offensichtlich (2.3a) erfüllt und für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ ist

$$\alpha_1(f) = W(f,\overline{w_2})(a) = f(a) \quad \text{und} \quad \alpha_2(f) = -W(f,\overline{w_1})(a) = f'(a).$$

□

Im Folgenden seien in diesem Kapitel stets w_1, $w_2 \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.3a) falls τ bei a im Grenzkreisfall ist, und

$$W(w_1,\overline{w_2})(b) = 1 \quad \text{und} \quad W(w_1,\overline{w_1})(b) = W(w_2,\overline{w_2})(b) = 0 \tag{2.3b}$$

falls τ bei b im Grenzkreisfall ist. Weiters seien α_1, α_2 die Anfangszahlen bezüglich w_1, w_2 bei a, falls τ bei a im Grenzkreisfall ist, und β_1, β_2 die Anfangszahlen bezüglich w_1, w_2 bei b, falls τ bei b im Grenzkreisfall ist.

Wir stellen einige Eigenschaften der Anfangszahlen in folgender Proposition zusammen.

Proposition 2.4.2. *Ist τ bei a im Grenzkreisfall, so gilt für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$*

$$\alpha_1(\overline{f}) = \overline{\alpha_1(f)} W(\overline{w_1}, \overline{w_2})(a) \quad \text{und} \quad \alpha_2(\overline{f}) = \overline{\alpha_2(f)} W(\overline{w_1}, \overline{w_2})(a).$$

Außerdem gilt für alle f, $g \in \mathcal{D}(T_{\max})$

$$W(f,g)(a) = \alpha_1(f)\alpha_2(g) - \alpha_2(f)\alpha_1(g).$$

Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

Beweis. Wendet man die Plücker'sche Identität auf

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_1(f)} W(\overline{w_1}, \overline{w_2})(a) &= \overline{W(f, \overline{w_2})(a)} W(\overline{w_1}, \overline{w_2})(a)\\ &= W(\overline{f}, w_2)(a) W(\overline{w_1}, \overline{w_2})(a)\end{aligned}$$

an, so erhält man die erste Behauptung. Genauso sieht man die zweite Behauptung ein. Mit der Plücker'schen Identität erhält man weiters

$$\begin{aligned}W(w_1, w_2)(a) W(\overline{w_1}, \overline{w_2})(a) &= -W(w_1, \overline{w_2})(a) W(w_2, \overline{w_1})(a)\\ &= W(w_1, \overline{w_2})(a) \overline{W(w_1, \overline{w_2})(a)} = 1\end{aligned}$$

Zweimaliges Anwenden der Plücker'schen Identität auf

$$W(f,g)(a) = W(f,g)(a) W(w_1, w_2)(a) W(\overline{w_1}, \overline{w_2})(a)$$

zeigt die dritte Behauptung. □

Der erste Teil dieser Proposition zeigt, dass die Anfangszahlen einer reellen Funktion reell sind, falls nur $W(w_1, w_2)(a) = 1$ ist, was insbesondere dann der Fall ist, wenn w_1 oder w_2 reell ist. Weiters zeigt diese Proposition, dass die Wronskideterminante bei a nur von den Anfangszahlen bei a abhängt. In Kombination mit Satz 2.3.4 werden wir eine Charakterisierung der selbstadjungierten Realisierungen von τ mit Hilfe der Anfangszahlen erhalten. Wie sich die Charakterisierung überträgt, zeigt folgendes Lemma.

Lemma 2.4.3. *Sei τ bei a im Grenzkreisfall. Ist $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit* (2.1a)*, so existiert ein $\alpha \in [0, \pi)$, sodass für alle $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$*

$$W(f, \overline{v})(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1(f)\cos\alpha - \alpha_2(f)\sin\alpha = 0$$

gilt. Ist umgekehrt $\alpha \in [0, \pi)$, so existiert ein $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a)*, sodass für alle $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$*

$$W(f, \overline{v})(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1(f)\cos\alpha - \alpha_2(f)\sin\alpha = 0$$

gilt. Entsprechende Aussagen gelten für den Randpunkt b.

Beweis. Sei $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit (2.1a), also mit

$$W(v, \overline{v})(a) = 0 \quad \text{und} \quad W(g, \overline{v})(a) \neq 0 \quad \text{für ein } g \in \mathcal{D}(T_{\max}).$$

Dann ist wegen

$$W(g, \overline{v})(a) = W(\overline{w_1}, \overline{w_2})(a) \left(\alpha_1(g)\overline{\alpha_2(v)} - \alpha_2(g)\overline{\alpha_1(v)}\right) \neq 0,$$

$(\alpha_1(v), \alpha_2(v)) \neq 0$ und wegen

$$\begin{aligned}0 = W(v, \overline{v})(a) &= W(\overline{w_1}, \overline{w_2})(a) \left(\alpha_1(v)\overline{\alpha_2(v)} - \alpha_2(v)\overline{\alpha_1(v)}\right)\\ &= W(\overline{w_1}, \overline{w_2})(a) 2i \operatorname{Im}(\alpha_1(v)\overline{\alpha_2(v)})\end{aligned}$$

ist $\alpha_1(v)\overline{\alpha_2(v)}$ reell. Also ist

$$\overline{C_1}\begin{pmatrix}\alpha_1(v)\\ \alpha_2(v)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}, \quad \text{wobei } C_1 = \begin{cases}\alpha_2(v) & \text{falls } \alpha_2(v) \neq 0\\ \alpha_1(v) & \text{sonst.}\end{cases}$$

Da $C_1 \neq 0$ existiert ein $\alpha \in [0,\pi)$ und ein $C_2 \in \mathbb{C}^\times$, sodass

$$\begin{pmatrix}\alpha_1(v)\\ \alpha_2(v)\end{pmatrix} = C_2\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Für ein $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$ gilt dann

$$\begin{aligned} W(f,\overline{v})(a) &= W(\overline{w_1},\overline{w_2})(a)\left(\alpha_1(f)\overline{\alpha_2(v)} - \alpha_2(f)\overline{\alpha_1(v)}\right)\\ &= W(\overline{w_1},\overline{w_2})(a)\overline{C_2}\left(\alpha_1(f)\cos\alpha - \alpha_2(f)\sin\alpha\right), \end{aligned}$$

was die erste Behauptung zeigt.

Ist umgekehrt $\alpha \in [0,\pi)$, so sei $v = \sin\alpha w_1 + \cos\alpha w_2$. Dann ist

$$W(v,\overline{v})(a) = \cos\alpha\sin\alpha\left(W(w_1,\overline{w_2})(a) + W(w_2,\overline{w_1})(a)\right) = 0$$

und wegen

$$W(w_1,\overline{v})(a) = \cos\alpha \quad \text{und} \quad W(w_2,\overline{v})(a) = -\sin\alpha$$

sieht man, dass (2.1a) gilt. Ist $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$, so ist

$$\begin{aligned} W(f,\overline{v})(a) &= W(f,\overline{w_1})(a)\sin\alpha + W(f,\overline{w_2})(a)\cos\alpha\\ &= \alpha_1(f)\cos\alpha - \alpha_2(f)\sin\alpha, \end{aligned}$$

was die zweite Behauptung zeigt. □

Aus diesem Lemma folgt, zusammen mit Satz 2.3.4 unmittelbar folgende Charakterisierung der selbstadjungierten Realisierungen.

SATZ 2.4.4. *Sei τ bei a im Grenzkreisfall und bei b im Grenzpunktfall. Dann ist ein Operator S genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn ein $\alpha \in [0,\pi)$ existiert, sodass*

$$\mathcal{D}(S) = \{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \mid \alpha_1(f)\cos\alpha - \alpha_2(f)\sin\alpha = 0\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$.

Entsprechende Aussagen gelten falls τ bei a im Grenzpunktfall und bei b im Grenzkreisfall ist.

Aus Proposition 2.4.1 erhält man nun folgende Charakterisierung der selbstadjungierten Realisierungen falls τ bei a sogar regulär ist.

KOROLLAR 2.4.5. *Sei τ bei a regulär und bei b im Grenzpunktfall. Dann ist ein Operator S genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn ein $\alpha \in [0,\pi)$ existiert, sodass*

$$\mathcal{D}(S) = \left\{f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \mid f(a)\cos\alpha - f'(a)\sin\alpha = 0\right\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$.

Entsprechende Aussagen gelten falls τ bei a im Grenzpunktfall und bei b im Grenzkreisfall ist.

Wir wollen nun auch für den Fall, dass an beiden Randpunkten der Grenzkreisfall vorliegt, eine Charakterisierung der selbstadjungierten Realisierungen von τ mit Hilfe der Anfangszahlen angeben.

SATZ 2.4.6. *Sei τ bei a und bei b im Grenzkreisfall. Dann ist ein Operator S genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ, wenn Matrizen B_a, $B_b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit*

$$\operatorname{rg}(B_a|B_b) = 2 \quad \textit{und} \quad B_a J B_a^* = B_b J B_b^* \quad \textit{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

existieren, sodass

$$\mathcal{D}(S) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \;\middle|\; B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix} \right\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$.

BEWEIS. Ist S eine selbstadjungierte Realisierung von τ, so existieren modulo $\mathcal{D}(T_{\min})$ linear unabhängige v, $w \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit

$$W_a^b(v, \overline{v}) = W_a^b(w, \overline{w}) = W_a^b(v, \overline{w}) = 0,$$

sodass

$$\mathcal{D}(S) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \mid W_a^b(f, \overline{v}) = W_a^b(f, \overline{w}) = 0 \right\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$. Seien B_a, $B_b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert durch

$$B_a = \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{v}) & -\alpha_1(\overline{v}) \\ \alpha_2(\overline{w}) & -\alpha_1(\overline{w}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_b = \begin{pmatrix} \beta_2(\overline{v}) & -\beta_1(\overline{v}) \\ \beta_2(\overline{w}) & -\beta_1(\overline{w}) \end{pmatrix}.$$

Dann rechnet man unmittelbar nach, dass

$$B_a J B_a^* = B_b J B_b^* \quad \Leftrightarrow \quad W_a^b(v, \overline{v}) = W_a^b(w, \overline{w}) = W_a^b(v, \overline{w}) = 0.$$

Um zu sehen, dass $\operatorname{rg}(B_a|B_b) = 2$ ist, seien c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ und

$$0 = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{v}) \\ -\alpha_1(\overline{v}) \\ \beta_2(\overline{v}) \\ -\beta_1(\overline{v}) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{w}) \\ -\alpha_1(\overline{w}) \\ \beta_2(\overline{w}) \\ -\beta_1(\overline{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2(c_1\overline{v} + c_2\overline{w}) \\ -\alpha_1(c_1\overline{v} + c_2\overline{w}) \\ \beta_2(c_1\overline{v} + c_2\overline{w}) \\ -\beta_1(c_1\overline{v} + c_2\overline{w}) \end{pmatrix}.$$

Also verschwinden alle Anfangszahlen von $c_1\overline{v} + c_2\overline{w}$ und damit wegen Proposition 2.4.2 auch $W(c_1\overline{v} + c_2\overline{w}, f)(a)$ und $W(c_1\overline{v} + c_2\overline{w}, f)(b)$ für alle $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$. Es gilt also $c_1\overline{v} + c_2\overline{w} \in \mathcal{D}(T_{\min})$ und daher, da $\overline{v}$, $\overline{w}$ linear unabhängig modulo $\mathcal{D}(T_{\min})$ sind, $c_1 = c_2 = 0$. Also hat $(B_a|B_b)$ Rang 2. Weiters rechnet man unmittelbar nach, dass für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$

$$W_a^b(f, \overline{v}) = W_a^b(f, \overline{w}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix}$$

gilt, was die geforderte Darstellung von S zeigt.

Seien umgekehrt B_a, $B_b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit den geforderten Eigenschaften gegeben. Dann existieren v, $w \in \mathcal{D}(T_{\max})$, sodass

$$B_a = \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{v}) & -\alpha_1(\overline{v}) \\ \alpha_2(\overline{w}) & -\alpha_1(\overline{w}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_b = \begin{pmatrix} \beta_2(\overline{v}) & -\beta_1(\overline{v}) \\ \beta_2(\overline{w}) & -\beta_1(\overline{w}) \end{pmatrix}.$$

v und w sind linear unabhängig modulo $\mathcal{D}(T_{\min})$, denn sind c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ und $c_1 v + c_2 w \in \mathcal{D}(T_{\min})$, so ist

$$0 = \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{c_1 v} + \overline{c_2 w}) \\ -\alpha_1(\overline{c_1 v} + \overline{c_2 w}) \\ \beta_2(\overline{c_1 v} + \overline{c_2 w}) \\ -\beta_1(\overline{c_1 v} + \overline{c_2 w}) \end{pmatrix} = \overline{c_1} \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{v}) \\ -\alpha_1(\overline{v}) \\ \beta_2(\overline{v}) \\ -\beta_1(\overline{v}) \end{pmatrix} + \overline{c_2} \begin{pmatrix} \alpha_2(\overline{w}) \\ -\alpha_1(\overline{w}) \\ \beta_2(\overline{w}) \\ -\beta_1(\overline{w}) \end{pmatrix}$$

und da die Zeilen von $(B_a|B_b)$ linear unabhängig sind folgt $c_1 = c_2 = 0$. Da auch hier

$$B_a J B_a^* = B_b J B_b^* \quad \Leftrightarrow \quad W_a^b(v, \overline{v}) = W_a^b(w, \overline{w}) = W_a^b(v, \overline{w}) = 0$$

gilt, erfüllen v, w die Voraussetzungen aus Satz 2.3.5. Wie oben sieht man wieder, dass für $f \in \mathcal{D}(T_{\max})$

$$B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad W_a^b(f, \overline{w}) = W_a^b(f, \overline{w}) = 0$$

gilt. Also ist S nach Satz 2.3.5 eine selbstadjungierte Realisierung von τ. □

Satz 2.4.7. *Sei τ bei a und bei b im Grenzkreisfall. Dann ist ein Operator S genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen, wenn α, $\beta \in [0, \pi)$ existieren, sodass*

$$\mathcal{D}(S) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_1(f)\cos\alpha - \alpha_2(f)\sin\alpha = 0 \\ \beta_1(f)\cos\beta - \beta_2(f)\sin\beta = 0 \end{array} \right\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$.

Ein Operator S ist genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit gekoppelten Randbedingungen, wenn ein $\varphi \in [0, \pi)$ und ein $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det R = 1$ *existieren, sodass*

$$\mathcal{D}(S) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix} = e^{i\varphi} R \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} \right\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$.

Beweis. Nach Lemma 2.4.3 sind die selbstadjungierten Realisierungen mit getrennten Randbedingungen, genau die im Satz angegebenen Operatoren. Es bleibt also nur die zweite Behauptung zu zeigen. Ist S eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit gekoppelten Randbedingungen und Matrizen B_a, $B_b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ wie in Satz 2.4.6, so sind wegen (2.4) die Ränge von B_a und von B_b gleich und entweder 1 oder 2. Wären die Ränge 1, so wäre für alle z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$

$$B_a \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (c_1 z_1 + c_2 z_2)\, w_a \quad \text{und} \quad B_b \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (d_1 z_1 + d_2 z_2)\, w_b$$

mit geeigneten

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \; w_a, \; w_b \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

Da w_a und w_b wegen $\operatorname{rg}(B_a|B_b) = 2$ linear unabhängig sind, gilt

$$B_a \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad B_a \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Insbesondere gilt

$$B_a J B_a^* = B_b J B_b^* \quad \Leftrightarrow \quad B_a J B_a^* = B_b J B_b^* = 0.$$

Sei nun $v \in \mathcal{D}(T_{\max})$ mit $\alpha_2(\overline{v}) = c_1$ und $\alpha_1(\overline{v}) = -c_2$. Dann rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned} 0 = B_a J B_a^* &= (\overline{c_1} c_2 - c_1 \overline{c_2}) w_a \overline{w_a}^T \\ &= W(w_1, w_2)(a)(\alpha_1(v)\alpha_2(\overline{v}) - \alpha_2(v)\alpha_1(\overline{v})) w_a \overline{w_a}^T \\ &= W(w_1, w_2)(a) W(v, \overline{v})(a) w_a \overline{w_a}^T \end{aligned}$$

gilt. Also ist $W(v, \overline{v})(a) = 0$ und wegen $(\alpha_1(v), \alpha_2(v)) = (c_2, c_1) \neq 0$ erfüllt v (2.1a). Wegen

$$B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = (\alpha_1(f)\alpha_2(\overline{v}) - \alpha_2(f)\alpha_1(\overline{v})) w_a = W(f, \overline{v})(a) w_a$$

gilt

$$B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(f, \overline{v})(a) = 0.$$

Entsprechend erhält man eine Funktion $w \in \mathcal{D}(T_{\max})$, die (2.1b) erfüllt und für die gilt

$$B_b \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(f, \overline{w})(b) = 0.$$

Der Operator S wäre also keine selbstadjungierte Realisierung von τ mit gekoppelten Randbedingungen.

Die Ränge von B_a und B_b müssen daher 2 sein. Setzt man $B = B_b^{-1} B_a$, so folgt aus $B_a J B_a^* = B_b J B_b^*$, dass $B = J(B^{-1})^* J^*$ gilt und daher $|\det B| = 1$, also $\det B = e^{i2\varphi}$ für ein $\varphi \in [0, \pi)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= J(B^{-1})^* J^* = e^{i2\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_{22}} & -\overline{b_{21}} \\ -\overline{b_{12}} & \overline{b_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= e^{i2\varphi} \begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & \overline{b_{12}} \\ \overline{b_{21}} & \overline{b_{22}} \end{pmatrix} = e^{i2\varphi} \overline{B}. \end{aligned}$$

Setzt man $R = e^{-i\varphi} B$, so ist wegen

$$R - \overline{R} = e^{-i\varphi} B - e^{i\varphi} \overline{B} = e^{-i\varphi} e^{i2\varphi} \overline{B} - e^{i\varphi} \overline{B} = 0$$

$R \in \mathbb{R}^2$ und

$$\det R = \det e^{-i\varphi} B = e^{-i2\varphi} \det B = 1.$$

Wegen

$$B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \beta_1(f) \\ \beta_2(f) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix} = e^{i\varphi} R \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \alpha_2(f) \end{pmatrix}$$

hat S die geforderte Darstellung.

Ist nun umgekehrt ein Operator S wie in der zweiten Behauptung gegeben, so folgt aus Satz 2.4.6, dass S selbstadjungiert ist. Wäre S eine selbstadjungierte Realisierung mit getrennten Randbedingungen, so gäbe es ein $f \in \mathcal{D}(S) \setminus \mathcal{D}(T_{\min})$, dass in einer Umgebung von a verschwindet. Dann würde auch $\beta_1(f) = \beta_2(f) = 0$ gelten und daher $f \in \mathcal{D}(T_{\min})$. Also kann S keine selbstadjungierte Realisierung mit getrennten Randbedingungen sein. □

Mit Proposition 2.4.1 erhalten wir nun unmittelbar, folgende Darstellungen der selbstadjungierten Realisierungen, falls τ regulär ist.

KOROLLAR 2.4.8. *Ist τ regulär, so ist ein Operator S genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen, wenn α, $\beta \in [0,\pi)$ existieren, sodass*

$$\mathcal{D}(S) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \;\middle|\; \begin{matrix} f(a)\cos\alpha - f'(a)\sin\alpha = 0 \\ f(b)\cos\beta - f'(b)\sin\beta = 0 \end{matrix} \right\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$.

Ein Operator S ist genau dann eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit gekoppelten Randbedingungen, wenn ein $\varphi \in [0,\pi)$ und ein $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det R = 1$ *existieren, sodass*

$$\mathcal{D}(S) = \left\{ f \in \mathcal{D}(T_{\max}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} f(b) \\ f'(b) \end{pmatrix} = e^{i\varphi} R \begin{pmatrix} f(a) \\ f'(a) \end{pmatrix} \right\}$$

und $Sf = \tau f$ für $f \in \mathcal{D}(S)$.

2.5. Resolventen

Wir wollen in diesem Abschnitt die Resolventen der selbstadjungierten Realisierungen von τ bestimmen.

SATZ 2.5.1. *Sei τ bei a und bei b im Grenzkreisfall und S eine selbstadjungierte Realisierung von τ. Dann ist für jedes $z \in \varrho(S)$ die Resolvente R_z ein Integraloperator*

$$R_z f(x) = \int_a^b k_z(x,y) f(y) dy, \quad x \in (a,b), \; f \in L^2(a,b)$$

mit quadratisch integrierbarem Kern k_z. Ist u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$, so existieren Koeffizienten $m_{ij}^{\pm}(z) \in \mathbb{C}$, i, $j \in \{1,2\}$, sodass der Kern gegeben ist durch

$$k_z(x,y) = \begin{cases} \sum_{i,j=1}^2 m_{ij}^+(z) u_i(x) u_j(y), & \text{falls } y \le x \\ \sum_{i,j=1}^2 m_{ij}^-(z) u_i(x) u_j(y), & \text{falls } y > x. \end{cases}$$

BEWEIS. Sei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$. Ohne Einschränkung können wir $W(u_1,u_2) = 1$ annehmen. Ist $f \in L_{00}^2(a,b)$, so ist $g = R_z f$ eine Lösung der Gleichung $(\tau - z)u = f$ und liegt in $\mathcal{D}(S)$. Wegen Proposition 1.2.5 gilt mit geeigneten Konstanten c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$

$(*)$

$$R_z f(x) = u_1(x) \left(c_1 + \int_a^x u_2(t) f(t) dt \right) + u_2(x) \left(c_2 - \int_a^x u_1(t) f(t) dt \right),$$

$x \in (a,b)$. Da $R_z f$ im Definitionsbereich von S liegt gilt

$$B_a \begin{pmatrix} \alpha_1(R_z f) \\ \alpha_2(R_z f) \end{pmatrix} = B_b \begin{pmatrix} \beta_1(R_z f) \\ \beta_2(R_z f) \end{pmatrix},$$

mit geeigneten Matrizen B_a, $B_b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ wie in Satz 2.4.6. Weil f kompakten Träger hat gilt

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(R_z f) \\ \alpha_2(R_z f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\alpha_1(u_1) + c_2\alpha_1(u_2) \\ c_1\alpha_2(u_1) + c_2\alpha_2(u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(u_1) & \alpha_1(u_2) \\ \alpha_2(u_1) & \alpha_2(u_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
$$= M_\alpha \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix}\beta_1(R_zf)\\ \beta_2(R_zf)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(c_1+\int_a^b u_2(t)f(t)dt\right)\beta_1(u_1)\\ \left(c_1+\int_a^b u_2(t)f(t)dt\right)\beta_2(u_1)\end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix}\left(c_2-\int_a^b u_1(t)f(t)dt\right)\beta_1(u_2)\\ \left(c_2-\int_a^b u_1(t)f(t)dt\right)\beta_2(u_2)\end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix}\beta_1(u_1) & \beta_1(u_2)\\ \beta_2(u_1) & \beta_2(u_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1+\int_a^b u_2(t)f(t)dt\\ c_2-\int_a^b u_1(t)f(t)dt\end{pmatrix} \\ = M_\beta\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} + M_\beta\begin{pmatrix}\int_a^b u_2(t)f(t)dt\\ -\int_a^b u_1(t)f(t)dt\end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$(B_aM_\alpha - B_bM_\beta)\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = B_bM_\beta\begin{pmatrix}\int_a^b u_2(t)f(t)dt\\ -\int_a^b u_1(t)f(t)dt\end{pmatrix}.$$

Wäre $B_aM_\alpha - B_bM_\beta$ nicht invertierbar, so gäbe es

$$\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\} \quad \text{mit} \quad B_aM_\alpha\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix} = B_bM_\beta\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}.$$

Die Funktion $d_1u_1 + d_2u_2$ wäre dann eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$, die im Definitionsbereich von S liegt, also ein Eigenvektor zu z. Da das ein Widerspruch zu $z \in \varrho(S)$ wäre, muss $B_aM_\alpha - B_bM_\beta$ invertierbar sein. Wegen

$$\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = (B_aM_\alpha - B_bM_\beta)^{-1}\, B_bM_\beta\begin{pmatrix}\int_a^b u_2(t)f(t)dt\\ -\int_a^b u_1(t)f(t)dt\end{pmatrix}$$

können die Konstanten c_1 und c_2 also als Linearkombinationen von

$$\int_a^b u_2(t)f(t)dt \quad \text{und} \quad \int_a^b u_1(t)f(t)dt$$

dargestellt werden, wobei die Koeffizienten unabhängig von f sind. Mit der Gleichung $(*)$ sieht man, dass dann R_zf die geforderte Integraldarstellung mit einer Funktion k_z, wie in der Behauptung hat. Die Funktion k_z ist quadratisch integrierbar, da die Lösungen u_1 und u_2 nach Voraussetzung in $L^2(a,b)$ liegen. Da sowohl der Operator K_z

$$K_zf(x) = \int_a^b k_z(x,y)f(y)dy, \quad x \in (a,b),\ f \in L^2(a,b)$$

auf $L^2(a,b)$, als auch die Resolvente R_z beschränkt sind, folgt die Behauptung daraus, dass beide auf der dichten Teilmenge $L^2_{00}(a,b)$ übereinstimmen. □

Korollar 2.5.2. *Sei τ bei a und bei b im Grenzkreisfall und S eine selbstadjungierte Realisierung von τ. Dann besteht das Spektrum von S, aus abzählbar unendlich vielen Eigenwerten mit Vielfachheit höchstens zwei, also*

$$\sigma(S) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \quad \textit{und} \quad \dim\ker(S - \lambda_n) \le 2, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Eigenwerte haben keinen endlichen Häufungspunkt, es gilt sogar

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_0 \\ \lambda_n\neq 0}} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty.$$

Ist S eine selbstadjungierte Realisierung mit getrennten Randbedingungen, so sind alle Eigenwerte einfach.

Beweis. Da der Kern k_z aus Satz 2.5.1 für jedes $z \in \varrho(S)$ quadratisch integrierbar ist, ist die Resolvente R_z ein Hilbert-Schmidt-Operator und damit kompakt. Das Spektrum von S besteht daher aus abzählbar unendlich vielen Eigenwerten (siehe [1] Satz 5.20). Weil die Gleichung $(\tau - z)u = 0$ nur zwei linear unabhängige Lösungen hat, ist die Vielfachheit der Eigenwerte höchstens zwei. Da die Eigenwerte von R_z quadratisch summierbar sind, sind auch die Zahlen λ_n^{-2} summierbar. Ist nun S eine selbstadjungierte Realisierung mit getrennten Randbedingungen und sind ϕ_1 und ϕ_2 zwei Eigenfunktionen zum selben Eigenwert, so gilt $W(\phi_1, \phi_2)(a) = 0$. Die Funktionen sind also linear abhängig, woraus die restliche Behauptung folgt. □

Ist S eine selbstadjungierte Realisierung von τ, so sagen wir S ist eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen, falls nicht beide Randpunkte im Grenzkreisfall sind oder falls S eine selbstadjungierte Realisierung mit getrennten Randbedingungen ist, falls beide Randpunkte im Grenzkreisfall sind. Der Definitionsbereich von S ist in diesem Fall durch eine Randbedingung bei a, falls τ bei a im Grenzkreisfall ist und eine Randbedingung bei b, falls τ bei b im Grenzkreisfall ist, bestimmt. Die Resolventen solcher Operatoren können einfacher dargestellt werden.

Satz 2.5.3. *Sei S eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen und $z \in \varrho(S)$. Sind u_a und u_b nichttriviale Lösungen von $(\tau - z)u = 0$, sodass*

$$u_a \begin{cases} \textit{die Randbedingung bei } a \textit{ erfüllt, falls } \tau \textit{ bei } a \textit{ im GKF ist,} \\ \textit{in } L^2(a,b) \textit{ bei } a \textit{ liegt, falls } \tau \textit{ bei } a \textit{ im GPF ist,} \end{cases}$$

und

$$u_b \begin{cases} \textit{die Randbedingung bei } b \textit{ erfüllt, falls } \tau \textit{ bei } b \textit{ im GKF ist,} \\ \textit{in } L^2(a,b) \textit{ bei } b \textit{ liegt, falls } \tau \textit{ bei } b \textit{ im GPF ist,} \end{cases}$$

so ist die Resolvente R_z gegeben durch

$$\begin{aligned} R_z f(x) &= W(u_b, u_a)^{-1} \left(u_b(x) \int_a^x u_a(y) f(y) dy + u_a(x) \int_x^b u_b(y) f(y) dy \right) \\ &= \int_a^b k_z(x,y) f(y) dy, \quad x \in (a,b),\ f \in L^2(a,b), \end{aligned}$$

wobei

$$k_z(x,y) = \begin{cases} W(u_b, u_a)^{-1} u_a(x) u_b(y), & \textit{falls } x \leq y \\ W(u_b, u_a)^{-1} u_a(y) u_b(x), & \textit{falls } x > y. \end{cases}$$

Beweis. Wären u_a und u_b linear abhängig, so wäre $u_a \in L^2(a,b)$ und würde zusätzlich die Randbedingung bei b erfüllen, falls τ bei b im Grenzkreisfall ist. Also wäre $u_a \in \mathcal{D}(S)$ ein Eigenvektor zu z, was ein Widerspruch zu $z \in \varrho(S)$ wäre. Die Funktionen u_a, u_b bilden also ein Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$. Sei nun $f \in L^2(a,b)$. Zur Abkürzung setzen wir für $x \in (a,b)$

$$u_f(x) = W(u_b,u_a)^{-1}\left(u_b(x)\int_a^x u_a(t)f(t)dt + u_a(x)\int_x^b u_b(t)f(t)dt\right).$$

Man rechnet unmittelbar nach, dass dann $(\tau - z)u_f = f$ gilt. Ist nun speziell $f \in L^2_{00}(a,b)$, so ist u_f in einer Umgebung von a proportional zu u_a und in einer Umgebung von b proportional zu u_b. Die Funktion u_f erfüllt also die Randbedingung bei a und bei b und liegt damit in $\mathcal{D}(S)$. Es gilt daher also

$$(S - z)u_f = (\tau - z)u_f = f$$

und damit $R_z f = u_f$.

Ist nun $f \in L^2(a,b)$ beliebig und $f_n \in L^2_{00}(a,b)$ eine Folge mit $f_n \to f$ für $n \to \infty$, so folgt, da die Resolvente beschränkt ist $R_z f_n \to R_z f$. Weiters konvergiert u_{f_n} punktweise gegen u_f, also gilt $R_z f = u_f$. Da beide Funktionen stetig sind, gilt die Gleichheit punktweise. □

Ist τ bei einem Randpunkt im Grenzpunktfall, so existiert nach Korollar 2.2.5 und wegen $\varrho(S) \subseteq \Gamma(T_{\min})$ eine, bis auf skalare Vielfache eindeutige, nichttriviale Lösung von $(\tau - z)u = 0$, die in $L^2(a,b)$ bei diesem Randpunkt liegt. Auch falls τ bei einem Randpunkt im Grenzkreisfall ist existiert eine, bis auf skalare Vielfache eindeutige, nichttriviale Lösung von $(\tau - z)u = 0$, welche die Randbedingung bei diesem Randpunkt erfüllt. Funktionen u_a und u_b, wie in Satz 2.5.3 existieren also stets.

KAPITEL 3

Weyl-Titchmarsh m-Funktion

3.1. Weyl-Titchmarsh m-Funktion

Sei in diesem Kapitel τ ein Sturm-Liouville Differentialausdruck auf einem beschränkten oder unbeschränkten Intervall (a,b) der beim Randpunkt a regulär ist und S eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen. Es existiert daher ein eindeutiges $\alpha \in [0,\pi)$, sodass die Funktionen aus dem Definitionsbereich von S bei a die Randbedingung

$$f(a)\cos\alpha - f'(a)\sin\alpha = 0, \quad f \in \mathcal{D}(S),$$

erfüllen. Ist τ bei b im Grenzkreisfall, so erfüllen die Funktionen aus dem Definitionsbereich von S außerdem noch eine Randbedingung bei b.

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ sei $\theta_z,\ \phi_z$ das Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$ mit den Anfangswerten

$$\theta_z(a) = \phi_z'(a) = \cos\alpha \quad \text{und} \quad -\theta_z'(a) = \phi_z(a) = \sin\alpha.$$

Die Anfangswerte sind dabei so gewählt, dass die Funktionen ϕ_z, $z \in \mathbb{C}$ die Randbedingung bei a erfüllen.

Proposition 3.1.1. *Für jedes $z \in \varrho(S)$ existiert eine eindeutige Zahl $m(z) \in \mathbb{C}$, sodass die Funktion*

$$\psi_z = \theta_z + m(z)\phi_z$$

in $L^2(a,b)$ liegt und die Randbedingung bei b erfüllt, falls τ bei b im Grenzkreisfall ist.

Beweis. Wegen $z \in \varrho(S)$ existiert eine, bis auf skalare Vielfache eindeutige, nichttriviale Lösung u_z von $(\tau - z)u = 0$, die in $L^2(a,b)$ liegt und die Randbedingung bei b erfüllt, falls τ bei b im Grenzkreisfall ist. Da $\theta_z,\ \phi_z$ ein Fundamentalsystem bilden, kann man diese Lösung als

$$u_z = c_{1,z}\theta_z + c_{2,z}\phi_z,$$

mit bestimmten Konstanten $c_{1,z},\ c_{2,z} \in \mathbb{C}$ darstellen. Wäre $c_{1,z} = 0$, so wäre u_z ein Vielfaches von ϕ_z und würde damit die Randbedingung bei a erfüllen. Die Funktion u_z läge also im Definitionsbereich von S und wäre damit ein Eigenvektor von S zum Eigenwert z, was ein Widerspruch zu $z \in \varrho(S)$ wäre. Setzt man $m(z) = c_{2,z}/c_{1,z}$, so liegt die Funktion $\theta_z + m(z)\phi_z$ in $L^2(a,b)$ und erfüllt die Randbedingung bei b, falls τ bei b im Grenzkreisfall ist. Da alle Lösungen mit dieser Eigenschaft linear abhängig sind, ist $m(z)$ die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft. □

Die so definierte Funktion $m : \varrho(S) \to \mathbb{C}$ nennen wir die Weyl-Titchmarsh m-Funktion von S. Die Funktionen

$$\psi_z = \theta_z + m(z)\phi_z, \quad z \in \varrho(S)$$

heißen die Weyl-Lösungen von S. Da die Anfangswerte der Funktionen θ_z, ϕ_z, $z \in \mathbb{C}$ reell sind, gilt $\theta_{\overline{z}} = \overline{\theta_z}$ und $\phi_{\overline{z}} = \overline{\phi_z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Ist $z \in \varrho(S)$, so ist auch $\overline{z} \in \varrho(S)$ und die Funktion

$$\theta_{\overline{z}} + \overline{m(z)}\phi_{\overline{z}} = \overline{\theta_z + m(z)\phi_z}$$

liegt in $L^2(a, b)$ und erfüllt wegen Proposition 2.3.3 die Randbedingung bei b, falls τ bei b im Grenzkreisfall ist. Es gilt also

$$m(\overline{z}) = \overline{m(z)}, \quad z \in \varrho(S). \tag{3.1}$$

Proposition 3.1.2. *Für z_1, $z_2 \in \varrho(S)$, $z_1 \neq z_2$ gilt*

$$\int_a^b \psi_{z_1}(t)\psi_{z_2}(t)dt = \frac{m(z_1) - m(z_2)}{z_1 - z_2}.$$

Insbesondere gilt für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$0 < ||\psi_z||^2 = \frac{\mathrm{Im}\ m(z)}{\mathrm{Im}\ z}.$$

Beweis. Aus der Definition der Funktionen θ_z und ϕ_z, $z \in \mathbb{C}$ sieht man unmittelbar, dass für alle z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$

$$W(\theta_{z_1}, \theta_{z_2})(a) = W(\phi_{z_1}, \phi_{z_2})(a) = 0 \quad \text{und} \quad W(\theta_{z_1}, \phi_{z_2})(a) = 1$$

gilt. Sind z_1, $z_2 \in \varrho(S)$, so folgt daraus

$$\begin{aligned} W(\psi_{z_1}, \psi_{z_2})(a) &= W(\theta_{z_1}, \theta_{z_2})(a) + m(z_2)W(\theta_{z_1}, \phi_{z_2})(a) + \\ &\qquad + m(z_1)W(\phi_{z_1}, \theta_{z_2})(a) + m(z_1)m(z_2)W(\phi_{z_1}, \phi_{z_2})(a) \\ &= m(z_2) - m(z_1). \end{aligned}$$

Ist τ bei b im Grenzpunktfall, so gilt außerdem noch

$$W(\psi_{z_1}, \psi_{z_2})(b) = 0,$$

da offensichtlich ψ_{z_1}, $\psi_{z_2} \in \mathcal{D}(T_{\max})$. Falls τ bei b im Grenzkreisfall ist, erfüllen ψ_{z_1} und ψ_{z_2} die Randbedingung bei b. Aus Proposition 2.3.3 (3) folgt damit, dass auch in diesem Fall

$$W(\psi_{z_1}, \psi_{z_2})(b) = 0$$

gilt. Mit Lemma 2.1.2 folgt damit

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2) \int_a^b \psi_{z_1}(t)\psi_{z_2}(t)dt &= W(\psi_{z_1}, \psi_{z_2})(b) - W(\psi_{z_1}, \psi_{z_2})(a) \\ &= m(z_1) - m(z_2), \end{aligned}$$

woraus die erste Behauptung folgt. Ist $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ so sind z, $\overline{z} \in \varrho(S)$. Mit den Gleichungen $m(\overline{z}) = \overline{m(z)}$ und

$$\psi_{\overline{z}} = \theta_{\overline{z}} + m(\overline{z})\phi_{\overline{z}} = \overline{\psi_z}$$

folgt aus der ersten Behauptung dieser Proposition

$$||\psi_z||^2 = \int_a^b \psi_z(t)\psi_{\overline{z}}(t)dt = \frac{m(z) - m(\overline{z})}{z - \overline{z}} = \frac{\mathrm{Im}\ m(z)}{\mathrm{Im}\ z}.$$

Da ψ_z eine nichttriviale Lösung ist, gilt außerdem $0 < ||\psi_z||^2$. $\square$

Da die Funktionen θ_z und ϕ_z analytisch von $z \in \mathbb{C}$ abhängen, folgt nun auch dass die Funktion m analytisch ist.

Satz 3.1.3. *Die Weyl-Titchmarsh m-Funktion m ist analytisch.*

Beweis. Seien c, $d \in (a,b)$ mit $c < d$. Wegen Satz 2.5.3 und da

$$W(\psi_z,\phi_z) = W(\theta_z,\phi_z) + m(z)W(\phi_z,\phi_z) = 1, \quad z \in \varrho(S)$$

gilt für alle $z \in \varrho(S)$ und $x \in (c,d)$

$$\begin{aligned} R_z\mathbb{1}_{(c,d)}(x) &= \psi_z(x)\int_c^x \phi_z(y)dy + \phi_z(x)\int_x^d \psi_z(y)dy \\ &= (\theta_z(x) + m(z)\phi_z(x))\int_c^x \phi_z(y)dy + \\ &\qquad\qquad + \phi_z(x)\int_x^d \theta_z(y) + m(z)\phi_z(y)dy \\ &= m(z)\phi_z(x)\int_c^d \phi_z(y)dy + \int_c^d \tilde{k}_z(x,y)dy, \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{k}_z(x,y) = \begin{cases} \phi_z(x)\theta_z(y), & \text{falls } x \le y \\ \phi_z(y)\theta_z(x), & \text{falls } x > y. \end{cases}$$

Weiters gilt dann

$$\left(R_z\mathbb{1}_{(c,d)}, \mathbb{1}_{(c,d)}\right) = m(z)\left(\int_c^d \phi_z(y)dy\right)^2 + \int_c^d\int_c^d \tilde{k}_z(x,y)dy\,dx.$$

Da die linke Seite analytisch von $z \in \varrho(S)$ abhängt und die Integrale, wegen Satz 1.2.8 analytisch von $z \in \mathbb{C}$ abhängen, folgt die Behauptung, falls für jedes $z_0 \in \varrho(S)$, Zahlen c, $d \in (a,b)$ existieren, sodass

$$\int_c^d \phi_z(y)dy \neq 0$$

für alle z in einer Umgebung von z_0. Ist also $z_0 \in \varrho(S)$, so existieren Zahlen c, $d \in (a,b)$ mit $c < d$, sodass

$$\int_c^d \phi_{z_0}(y)dy \neq 0,$$

da ϕ_{z_0} als nichttriviale Lösung stetig ist und nicht überall verschwindet. Da die Abbildung

$$z \mapsto \int_c^d \phi_z(y)dy, \quad z \in \mathbb{C}$$

stetig ist, folgt die Behauptung. □

Korollar 3.1.4. *Für jedes $x_0 \in [a,b)$ sind $\psi_z(x_0)$ und $\psi_z'(x_0)$ analytisch in $z \in \varrho(S)$.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus $\psi_z = \theta_z + m(z)\phi_z$ und Satz 3.1.3. □

3.2. Spektralmaß

Es gelten in diesem Abschnitt die selben Voraussetzungen wie im vorigen Abschnitt 3.1. Aus Proposition 3.1.2 folgt, dass die Weyl-Titchmarsh m-Funktion m, die obere Halbebene $\mathbb{C}^+$,

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

in sich selbst abbildet. Da m auch analytisch ist, existiert nach Satz A.1.1 ein eindeutiges positives Borelmaß ρ auf $\mathbb{R}$, sowie Zahlen c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$m(z) = c_1 + c_2 z + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} d\rho(\lambda), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Das Maß ρ nennen wir das Spektralmaß von m.

Sei im Folgenden $L^2(\mathbb{R};\rho)$ der Hilbertraum aller Äquivalenzklassen von messbaren, komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, die bezüglich ρ quadratisch integrierbar sind. Das Skalarprodukt in diesem Raum bezeichnen wir mit

$$(f,g)_\rho = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\overline{g(\lambda)} d\rho(\lambda), \quad f,\ g \in L^2(\mathbb{R};\rho),$$

die Norm mit $\|\cdot\|_\rho$. Ist $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, so bezeichnen wir mit M_G den maximal definierten Multiplikationsoperator mit G in $L^2(\mathbb{R};\rho)$, also

$$\mathcal{D}(M_G) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R};\rho) \mid G f \in L^2(\mathbb{R};\rho) \right\}$$

und $M_G f = G f$ für $f \in \mathcal{D}(M_G)$.

Wir wollen zunächst einen Zusammenhang zwischen ρ und dem operatorwertigen Spektralmaß E von S herstellen. Dazu sei für jedes $f \in C_{00}[a,b)$, wobei

$$C_{00}[a,b) = \{g \in C[a,b) \mid \operatorname{supp} g \text{ kompakt in } [a,b)\},$$

die Funktion $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\hat{f}(\lambda) = \int_a^b f(t)\phi_\lambda(t)dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wir nennen $\hat{f}$ die Fouriertransformierte von f.

Lemma 3.2.1. *Seien f, $g \in C_{00}[a,b)$, $G \in C(\mathbb{R})$ und λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$. Dann gilt*

$$(G(S)E(\lambda_1,\lambda_2]f,g) = \left(M_G M_{\mathbb{1}_{(\lambda_1,\lambda_2]}} \hat{f}, \hat{g} \right)_\rho.$$

Beweis. Sei $d \in (a,b)$, sodass $\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g \subseteq [a,d]$ und K das Kompaktum

$$K = [\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1] \times [a,d] \times [a,d] \subseteq \mathbb{R} \times [a,b) \times [a,b).$$

Wir verwenden die folgende, schwache Version der Formel von Stone (siehe beispielsweise [5] Theorem XII 2.11)

$$(G(S)E(\lambda_1,\lambda_2]f,g) = \\ = \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2+\delta} G(\lambda)\left((R_{\lambda+i\varepsilon}f,g) - (R_{\lambda-i\varepsilon}f,g)\right) d\lambda.$$

Aus Satz 2.5.3 folgt für alle $z \in \varrho(S)$

$$R_z f(x) = \psi_z(x) \int_a^x \phi_z(t) f(t) dt + \phi_z(x) \int_x^b \psi_z(t) f(t) dt, \quad x \in (a,b).$$

Setzt man das in obige Gleichung ein, so erhält man

$$(G(S)E\,(\lambda_1,\lambda_2]\, f, g) = \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \overline{g}(x) \times$$
$$\int_a^x f(t) \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2+\delta} G(\lambda) \left(\psi_{\lambda+i\varepsilon}(x)\phi_{\lambda+i\varepsilon}(t) - \psi_{\lambda-i\varepsilon}(x)\phi_{\lambda-i\varepsilon}(t)\right) d\lambda\, dt\, +$$
$$+ \int_x^b f(t) \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2+\delta} G(\lambda) \left(\phi_{\lambda+i\varepsilon}(x)\psi_{\lambda+i\varepsilon}(t) - \phi_{\lambda-i\varepsilon}(x)\psi_{\lambda-i\varepsilon}(t)\right) d\lambda\, dt\, dx,$$

wobei die Integrationsreihenfolge vertauscht werden darf, weil der Integrand beschränkt ist und außerhalb eines Kompaktums verschwindet. Aus dem Beweis von Satz 1.1.4 folgt, dass $\theta_z|_{[a,c]}$ und $\phi_z|_{[a,c]}$ für jedes $c \in (a,b)$ sogar $C[a,c]$-wertige analytische Funktionen in $z \in \mathbb{C}$ sind. Bezeichnet man mit $\dot{\theta}_z$ und $\dot{\phi}_z$ die, auf $[a,b)$ stetige Ableitungen von θ_z und ϕ_z nach $z \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\theta_{\lambda \pm i\varepsilon}(x) = \theta_\lambda(x) \pm i\varepsilon \dot{\theta}_\lambda(x) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right),$$
$$\phi_{\lambda \pm i\varepsilon}(x) = \phi_\lambda(x) \pm i\varepsilon \dot{\phi}_\lambda(x) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right),$$

für $\varepsilon \to 0$ und zwar gleichmäßig für alle $(\lambda, x, x) \in K$. Damit erhält man mit Proposition A.1.2

$$\psi_{\lambda\pm i\varepsilon}(x)\phi_{\lambda\pm i\varepsilon}(t) = \left(\theta_\lambda(x) + m(\lambda \pm i\varepsilon)\right)\phi_\lambda(t)$$
$$\pm\, i\varepsilon m(\lambda \pm i\varepsilon) \left(\dot{\phi}_\lambda(x)\phi_\lambda(t) + \phi_\lambda(x)\dot{\phi}_\lambda(t)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

für $\varepsilon \to 0$ und zwar gleichmäßig für alle $(\lambda, x, t) \in K$. Mit Hilfe der Gleichung $m(\overline{z}) = \overline{m(z)}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ erhält man daraus

$$\psi_{\lambda+i\varepsilon}(x)\phi_{\lambda+i\varepsilon}(t) - \psi_{\lambda-i\varepsilon}(x)\phi_{\lambda-i\varepsilon}(t) =$$
$$= 2i\varepsilon\, \mathrm{Re}\; m(\lambda+i\varepsilon) \left(\dot{\phi}_\lambda(x)\phi_\lambda(t) + \phi_\lambda(x)\dot{\phi}_\lambda(t)\right) +$$
$$+ 2i\phi_\lambda(x)\phi_\lambda(t)\, \mathrm{Im}\; m(\lambda+i\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

für $\varepsilon \to 0$ und zwar gleichmäßig für alle $(\lambda, x, t) \in K$. Aus den Abschätzungen aus Proposition A.1.2 folgt damit, mit dem Satz von Lebesgue

$$(G(S)E\,(\lambda_1,\lambda_2]\, f, g) =$$
$$= \int_a^b \overline{g}(x) \int_a^b f(t) \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2+\delta} G(\lambda)\phi_\lambda(x)\phi_\lambda(t) \mathrm{Im}\; m(\lambda+i\varepsilon) d\lambda\, dt\, dx.$$

Mit Eigenschaft (A.2) aus Satz A.1.1 folgt daraus

$$(G(S)E\,(\lambda_1,\lambda_2]\, f, g) = \int_a^b \overline{g}(x) \int_a^b f(t) \int_{(\lambda_1,\lambda_2]} G(\lambda)\phi_\lambda(x)\phi_\lambda(t) d\rho(\lambda)\, dt\, dx$$
$$= \int_{(\lambda_1,\lambda_2]} G(\lambda) \int_a^b f(t)\phi_\lambda(t) dt \int_a^b \overline{g}(x)\phi_\lambda(x) dx\, d\rho(\lambda)$$
$$= \int_{(\lambda_1,\lambda_2]} G(\lambda) \hat{f}(\lambda) \overline{\hat{g}(\lambda)} d\rho(\lambda),$$

wobei die Vertauschung der Integrale wieder erlaubt ist, da der Integrand beschränkt ist und außerhalb eines Kompaktums verschwindet. Es bleibt zu zeigen, dass $\hat{f}$ und $\hat{g}$ in $L^2(\mathbb{R};\rho)$ liegen. Aus dem bereits Gezeigten folgt, mit $G=1$ für alle $n\in\mathbb{N}$

$$\|E(-n,n]f\|^2 = (E(-n,n]f,f) = \int_{(-n,n]} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda).$$

Für $n\to\infty$ konvergiert die linke Seite gegen $\|f\|^2$, woraus folgt, dass $\hat{f}$ in $L^2(\mathbb{R};\rho)$ liegt und $\|f\| = \|\hat{f}\|_\rho$ gilt. □

Dieses Lemma zeigt, dass für jedes $f\in C_{00}\,[a,b)$ die Fouriertransformierte $\hat{f}$ in $L^2(\mathbb{R};\rho)$ liegt und $\|f\| = \|\hat{f}\|_\rho$ gilt. Die Abbildung $\hat{\ }$ ist also eine dicht definierte, lineare Isometrie von $L^2(a,b)$ nach $L^2(\mathbb{R};\rho)$ und lässt sich als solche eindeutig zu einer Isometrie auf ganz $L^2(a,b)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$ und nennen sie die Fouriertransformation von S. Ist $f\in L^2_{00}\,[a,b)$, wobei

$$L^2_{00}\,[a,b) = \left\{g\in L^2(a,b)\ |\ \operatorname{supp} g \text{ kompakt in } [a,b)\right\},$$

so gilt für ρ-fast alle $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \int_a^b f(t)\phi_\lambda(t)dt.$$

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ sogar unitär, also zusätzlich noch surjektiv ist. Dazu sei für jedes $g\in C_{00}(\mathbb{R})$, die Funktion $\check{g}:[a,b)\to\mathbb{C}$ definiert durch

$$\check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\phi_\lambda(x)d\rho(\lambda), \quad x\in[a,b)\,.$$

Die Funktion $\check{g}$ nennen wir die Fourier-Rücktransformierte von g. Wegen den Abschätzungen aus Satz 1.2.8 und da g kompakten Träger hat, ist $\check{g}$ stetig auf $[a,b)$. Es gilt daher für jedes $c\in[a,b)$

$$\begin{aligned}\int_a^c |\check{g}(x)|^2\,dx &= \int_a^c \check{g}(x)\int_{\mathbb{R}} \overline{g}(\lambda)\phi_\lambda(x)d\rho(\lambda)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{g}(\lambda)\int_a^c \check{g}(x)\phi_\lambda(x)dx\,d\rho(\lambda)\\ &\le \left\|\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{(a,c)}\,\check{g}\right)\right\|_\rho \|g\|_\rho\\ &= \int_a^c |\check{g}(x)|^2\,dx\,\|g\|_\rho\end{aligned}$$

und damit

$$\int_a^c |\check{g}(x)|^2\,dx \le \|g\|_\rho^2\,.$$

Die Funktion $\check{g}$ liegt also in $L^2(a,b)$ und es gilt $\|\check{g}\|\le\|g\|_\rho$. Als dicht definierte, beschränkte, lineare Abbildung von $L^2(\mathbb{R};\rho)$ nach $L^2(a,b)$ lässt sich die Abbildung $\check{\ }$ eindeutig zu einer beschränkten, linearen Abbildung $\mathcal{G}$ auf ganz $L^2(\mathbb{R};\rho)$ fortsetzen. Es wird sich herausstellen, dass diese Abbildung die Inverse der Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist.

Satz 3.2.2. *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist unitär mit*

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{G}.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{G}\mathcal{F} = I$ gilt. Sei dazu $f \in C_{00}\,[a,b)$. Wegen Lemma 3.2.1 gilt dann für alle Funktionen $g \in C_{00}\,[a,b)$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(E(-n,n]f,g) &= \int_{(-n,n]} \hat{f}(\lambda) \int_a^b \phi_\lambda(x)\overline{g}(x)dx\; d\rho(\lambda)\\ &= \int_a^b \int_{(-n,n]} \hat{f}(\lambda)\phi_\lambda(x)d\rho(\lambda)\; \overline{g}(x)dx = \left(\mathcal{G}M_{\mathbb{1}_{(-n,n]}}\mathcal{F}f, g\right).\end{aligned}$$

Da $C_{00}\,[a,b)$ dicht in $L^2(a,b)$ liegt, gilt damit

$$E(-n,n]f = \mathcal{G}M_{\mathbb{1}_{(-n,n]}}\mathcal{F}f.$$

Bildet man den Grenzwert $n \to \infty$, so erhält man daraus

$$\mathcal{G}\mathcal{F}f = f.$$

Da $C_{00}\,[a,b)$ dicht in $L^2(a,b)$ liegt, folgt damit die Behauptung.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{G}$ die Inverse von $\mathcal{F}$ ist, genügt es daher zu zeigen, dass $\mathcal{G}$ injektiv ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass

$$(*) \qquad R_z\mathcal{G} = \mathcal{G}M_{r_z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$$

gilt, wobei

$$r_z(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z}, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Sei dazu $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $f \in C_{00}(\mathbb{R})$. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{G}M_{r_z}f$ in $\mathcal{D}\,(T_{\max})$ liegt. Da ϕ_λ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und wegen Satz 1.2.8, ist $\mathcal{G}M_{r_z}f$ stetig differenzierbar und es gilt für alle $x \in (a,b)$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}M_{r_z}f'(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\phi_\lambda'(x)d\rho(\lambda)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\phi_\lambda'(a)d\rho(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\int_a^x \phi_\lambda''(t)dt\, d\rho(\lambda)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\phi_\lambda'(a)d\rho(\lambda) + \int_a^x \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\phi_\lambda(t)\,(q(t)-\lambda)\,d\rho(\lambda)\,dt,\end{aligned}$$

wobei die Vertauschung der Integrale mit dem Satz von Fubini gerechtfertigt werden kann. Die Funktion $\mathcal{G}M_{r_z}f'$ ist also lokal absolut stetig und es gilt

$$-\mathcal{G}M_{r_z}f''(x) + (q(x)-z)\mathcal{G}M_{r_z}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\phi_\lambda(x)d\rho(\lambda) = \mathcal{G}f(x),$$

für fast alle $x \in (a,b)$. Das zeigt, dass $\mathcal{G}M_{r_z}f$ in $\mathcal{D}\,(T_{\max})$ liegt und dass sogar

$$(T_{\max} - z)\,\mathcal{G}M_{r_z}f = \mathcal{G}f$$

gilt. Es bleibt daher zu zeigen, dass die Funktion $\mathcal{G}M_{r_z}f$ sogar in $\mathcal{D}\,(S)$ liegt. Dass die Randbedingung bei a erfüllt ist, folgt da auch die Funktionen ϕ_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ diese Randbedingung erfüllen. Da diese Funktion offensichtlich in $L^2(a,b)$ liegt, bleibt zu zeigen, dass sie auch die Randbedingung bei b erfüllt, falls τ bei b im Grenzkreisfall ist. In diesem Fall ist jedes $\lambda \in \sigma(S)$ ein Eigenwert von S und ϕ_λ erfüllt die Randbedingung bei b, also $W(\phi_\lambda,\psi_i)(b) = 0$.

Aus Satz 3.1.3 und Eigenschaft (A.1) aus Satz A.1.1 folgt, dass $\mathbb{R}\backslash\sigma(S)$ eine ρ-Nullmenge ist. Es gilt daher

$$\begin{aligned} W(\mathcal{G}M_{r_z}f,\psi_i)(b) &= \lim_{x\nearrow b} W(\mathcal{G}M_{r_z}f,\psi_i)(x) \\ &= \lim_{x\nearrow b}\int_{\sigma(S)}\frac{f(\lambda)}{\lambda-z}W(\phi_\lambda,\psi_i)(x)d\rho(\lambda) \\ &= \int_{\sigma(S)}\frac{f(\lambda)}{\lambda-z}W(\phi_\lambda,\psi_i)(b)d\rho(\lambda)=0, \end{aligned}$$

wobei Integral und Grenzwert vertauschbar sind, weil es sich bei dem Integral eigentlich um eine endliche Summe handelt. Da beide Seiten stetig sind, haben wir damit $(*)$ gezeigt. Ist nun $f\in\ker\mathcal{G}$, so folgt aus dem bereits Gezeigten, dass auch $M_{r_z}f - M_{r_{\overline{z}}}f\in\ker\mathcal{G}$, für alle $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Wählt man speziell $z=r+i\nu$, $r\in\mathbb{R}$, $\nu\in(0,\infty)$, so folgt daraus, dass auch die Funktionen $f_{\nu,r}$, $r\in\mathbb{R}$, $\nu\in(0,\infty)$

$$f_{\nu,r}(\lambda)=f(\lambda)\frac{1}{\pi}\frac{\nu}{(\lambda-r)^2+\nu^2},\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

in $\ker\mathcal{G}$ liegen. Seien nun r_1, $r_2\in\mathbb{R}$, $r_1<r_2$ mit $\rho\{r_1,r_2\}=0$. Dann liegen auch die Funktionen f_ν, $\nu\in(0,\infty)$

$$f_\nu=\int_{r_1}^{r_2} f_{\nu,r}dr$$

in $\ker\mathcal{G}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}}\left|f_\nu(\lambda)-f(\lambda)\mathbb{1}_{(r_1,r_2)}(\lambda)\right|^2 d\rho(\lambda)= \\ &\quad=\int_{(-\infty,r_1)\cup(r_2,\infty)}|f_\nu(\lambda)|^2 d\rho(\lambda)+ \\ &\qquad\quad+\int_{(r_1,r_2)}\left|f(\lambda)\int_{(-\infty,r_1)\cup(r_2,\infty)}\frac{1}{\pi}\frac{\nu}{(\lambda-r)^2+\nu^2}dr\right|^2 d\rho(\lambda). \end{aligned}$$

Da beide Summanden für $\nu\searrow 0$ gegen Null konvergieren, folgt, dass die Funktionen f_ν für $\nu\searrow 0$ in $L^2(\mathbb{R};\rho)$ gegen die Funktion $M_{\mathbb{1}_{(r_1,r_2)}}f$ konvergieren. Damit liegt also auch die Funktion $M_{\mathbb{1}_{(r_1,r_2)}}f$ in $\ker\mathcal{G}$. Es gilt daher

$$(**)\qquad \int_{(r_1,r_2)}f(\lambda)\phi_\lambda(x)d\rho(\lambda)=0,\quad x\in[a,b).$$

Falls $\alpha\neq 0$, so folgt aus dieser Gleichung

$$\int_{(r_1,r_2)}f(\lambda)d\rho(\lambda)=0.$$

Ist $\alpha=0$, so folgt das selbe, wenn man $(**)$ zuerst differenziert. Da das für alle r_1, $r_2\in\mathbb{R}$, bis auf die abzählbar vielen Sprungstellen der Verteilungsfunktion von ρ gilt, haben wir diese Gleichung sogar für alle r_1, $r_2\in\mathbb{R}$. Daraus folgt aber $f(\lambda)=0$ für ρ-fast alle $\lambda\in\mathbb{R}$. Die Abbildung $\mathcal{G}$ ist also injektiv. □

Die folgende Variante des Spektralsatzes zeigt nun, dass für eine stetige Funktion G auf $\mathbb{R}$, der Operator $G(S)$ durch die Fouriertransformation in den Multiplikationsoperator mit G in $L^2(\mathbb{R};\rho)$ übergeht.

Satz 3.2.3. *Sei G eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann bildet $\mathcal{F}$ den Definitionsbereich von $G(S)$ auf den Definitionsbereich von M_G ab und es gilt*

$$G(S) = \mathcal{F}^{-1} M_G \mathcal{F}.$$

Insbesondere gilt

$$\sigma(S) = \operatorname{supp} \rho.$$

Beweis. Sind $g \in C_{00}(\mathbb{R})$ und $f \in C_{00}[a,b)$, so gilt

$$\begin{aligned}(f, \breve{g}) &= \int_a^b f(x) \int_{\mathbb{R}} \overline{g}(\lambda) \phi_\lambda(x) d\rho(\lambda)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{g}(\lambda) \int_a^b f(x)\phi_\lambda(x) dx\, d\rho(\lambda) = \left(\hat{f}, g\right)_\rho .\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$(f, \mathcal{G}g) = (\mathcal{F}f, g)_\rho, \quad f \in L^2(a,b),\ g \in L^2(\mathbb{R};\rho).$$

Mit Lemma 3.2.1 folgt daraus für alle $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 < \lambda_2$

$$\begin{aligned}(G(S)E(\lambda_1,\lambda_2]f, g) &= \left(M_G M_{\mathbb{1}_{(\lambda_1,\lambda_2]}} \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\right)_\rho \\ &= \left(\mathcal{G} M_G M_{\mathbb{1}_{(\lambda_1,\lambda_2]}} \mathcal{F}f, g\right), \quad f,\ g \in L^2(a,b),\end{aligned}$$

also

$$G(S)E(\lambda_1,\lambda_2] = \mathcal{G} M_G M_{\mathbb{1}_{(\lambda_1,\lambda_2]}} \mathcal{F}.$$

Ist nun f im Definitionsbereich von $G(S)$, so folgt daraus

$$\left\| M_G M_{\mathbb{1}_{(-n,n]}} \mathcal{F}f \right\|_\rho^2 = \|G(S)E(-n,n]f\|^2 \to \|G(S)f\|^2$$

für $n \to \infty$. Also liegt $\mathcal{F}f$ in $\mathcal{D}(M_G)$ und

$$G(S)f = \mathcal{G} M_G \mathcal{F} f.$$

Ist umgekehrt $g \in \mathcal{D}(M_G)$, so konvergiert die Folge $G(S)E(-n,n]\mathcal{G}g$ wegen

$$\|G(S)E(-n,n]\mathcal{G}g - \mathcal{G}M_G g\| = \left\| M_G \left(M_{\mathbb{1}_{(-n,n]}} g - g \right) \right\|_\rho \to 0,$$

für $n \to \infty$. Also liegt $\mathcal{G}g$ in $\mathcal{D}(G(S))$. □

Korollar 3.2.4. *Es gilt*

$$m(z) = \mathrm{Re}\ m(i) + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} d\rho(\lambda), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Beweis. Ist $g \in C_{00}(\mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, so gilt einerseits

$$R_z \mathcal{G} g(a) = \mathcal{G} M_{r_z} g(a) = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(\lambda)}{\lambda - z} \phi_\lambda(a) d\rho(\lambda)$$

und andererseits, wegen Satz 2.5.3

$$R_z \mathcal{G} g(a) = \phi_z(a) \left(\mathcal{G}g, \overline{\psi_z}\right) = \phi_z(a) \left(g, \mathcal{F}\overline{\psi_z}\right)_\rho .$$

Falls $\alpha \neq 0$ folgt daraus, dass die Funktion r_z, die Fouriertransformierte von ψ_z ist. Ist $\alpha = 0$, so erhält man das selbe, wenn man die Ableitung der Resolvente betrachtet. Daraus und der Gleichung

$$\mathrm{Im}\ m(z) = c_2 \,\mathrm{Im}\ z + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\lambda - z}\right) d\rho(\lambda) = c_2 \,\mathrm{Im}\ z + \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Im}\ z}{|\lambda - z|^2} d\rho(\lambda)$$

folgt mit Proposition 3.1.2

$$c_2 + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\lambda - z|^2} d\rho(\lambda) = \frac{\mathrm{Im}\ m(z)}{\mathrm{Im}\ z} = \|\psi_z\|^2 = \|\mathcal{F}\psi_z\|_\rho^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\lambda - z|^2} d\rho(\lambda),$$

also $c_2 = 0$. Weiters gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\ m(i) &= c_1 + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\lambda - i} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right) d\rho(\lambda) \\ &= c_1 + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\left(\frac{i}{1 + \lambda^2}\right) d\rho(\lambda) = c_1. \end{aligned}$$

□

Ist $\lambda \in \sigma(S)$ ein Eigenwert, so kann man das Maß $\rho\{\lambda\}$ in diesem Punkt über die Funktion ϕ_λ berechnen.

Proposition 3.2.5. *Ist λ ein Eigenwert von S, so gilt*

$$\rho\{\lambda\} = \|\phi_\lambda\|^{-2}.$$

Beweis. Ist λ ein Eigenwert, so ist ϕ_λ ein Eigenvektor zu λ. Wegen Lemma 3.2.1 gilt für alle λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

$$\mathcal{F}\phi_\lambda = \mathcal{F}E\left(\lambda_1, \lambda_2\right]\phi_\lambda = M_{\mathbb{1}_{(\lambda_1,\lambda_2]}}\mathcal{F}\phi_\lambda.$$

Also verschwindet $\mathcal{F}\phi_\lambda(t)$ für ρ-fast alle $t \neq \lambda$. Weil $\mathcal{F}$ unitär ist folgt daraus

$$\begin{aligned} \|\phi_\lambda\|^2 = \|\mathcal{F}\phi_\lambda\|_\rho^2 &= \int_{\{\lambda\}} |\mathcal{F}\phi_\lambda(t)|^2 \, d\rho(t) \\ &= \rho\{\lambda\} \left(\int_a^b \phi_\lambda(x)^2 dx\right)^2 = \rho\{\lambda\} \|\phi_\lambda\|^4. \end{aligned}$$

□

Wir wollen diese Begriffe nun an einem einfachen Beispiel illustrieren. Sei dazu im Folgenden

$$z \mapsto \sqrt{z}$$

stets eine Wurzel auf $\mathbb{C}$, die auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ analytisch ist und die $\mathrm{Re}\sqrt{z} \geq 0$, für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllt.

Beispiel 3.2.6. Sei τ^0 der Sturm-Liouville Differentialausdruck auf dem Intervall (a, ∞) mit Potential $q^0 = 0$. Weil a endlich ist, sieht man, dass τ^0 bei a regulär ist. Da die Lösungen von $\tau^0 u = 0$ genau die Polynome von Grad höchstens eins sind, ist τ^0 bei ∞ im Grenzpunktfall. Weiters sei S^0 die selbstadjungierte Realisierung von τ^0 mit Dirichlet-Randbedingungen bei a, also

$$f(a) = 0, \quad f \in \mathcal{D}\left(S^0\right).$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist das entsprechende Fundamentalsystem θ_z^0, ϕ_z^0 aus Abschnitt 3.1 zu diesem Operator gegeben durch

$$\theta_z^0(x) = \cos\sqrt{z}(x-a) \quad \text{und} \quad \phi_z^0(x) = \frac{\sin\sqrt{z}(x-a)}{\sqrt{z}}, \quad x \in [a,\infty),$$

wobei diese Funktionen im Fall $z = 0$ als

$$\theta_0^0(x) = 1 \quad \text{und} \quad \phi_0^0(x) = x - a, \quad x \in [a,\infty)$$

zu interpretieren sind. Obwohl die Wurzel nicht analytisch auf $\mathbb{C}$ ist, sind die Punktauswertungen $\theta_z^0(x_0)$ und $\phi_z^0(x_0)$, für jedes $x_0 \in [a,\infty)$ analytisch auf ganz $\mathbb{C}$. Es wäre sogar egal welche Wurzel man verwendet. Die Funktion

$$\begin{aligned}\psi_z^0(x) &= \theta_z^0(x) - \sqrt{-z}\phi_z^0(x) = \cos i\sqrt{-z}(x-a) + i\sin i\sqrt{-z}(x-a)\\ &= e^{-\sqrt{-z}(x-a)}, \quad x \in [a,\infty)\end{aligned}$$

ist daher für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ eine Lösung von $\left(\tau^0 - z\right)u = 0$ und liegt in $L^2(a,\infty)$, ist also die Weyl-Lösung. Die Weyl-Titchmarsh m-Funktion m^0 von S^0 ist daher

$$m^0(z) = -\sqrt{-z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Das Spektralmaß ρ^0 von m^0 ist dann wegen Eigenschaft (A.1) aus Satz A.1.1, für jede Borelmenge B gegeben durch

$$\rho^0(B) = \frac{1}{\pi}\int_B \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\sqrt{x}dx.$$

Insbesondere folgt daraus

$$\sigma\left(S^0\right) = \operatorname{supp}\rho^0 = [0,\infty).$$

3.3. Jost-Lösungen

Neben den Voraussetzungen der vorigen Abschnitte, sei in diesem Abschnitt $b = \infty$ und q ein Potential, das zusätzlich

$$\int_a^\infty |q(s)|(s-a)ds < \infty$$

erfüllt. Weiters verwenden wir die Notation

$$\sigma_1(u) = \int_u^\infty |q(s)|ds \quad \text{und} \quad \sigma_2(u) = \int_u^\infty \sigma_1(s)ds, \quad u \in [a,\infty).$$

Das ist sinnvoll, da in diesem Fall $q \in L^1(a,\infty)$ und auch $\sigma_1 \in L^1(a,\infty)$, da

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \sigma_1(t)dt &= \int_a^\infty\int_a^\infty \mathbb{1}_{(t,\infty)}(s)|q(s)|ds\,dt\\ &= \int_a^\infty |q(s)|\int_a^\infty \mathbb{1}_{(t,\infty)}(s)dt\,ds\\ &= \int_a^\infty |q(s)|(s-a)ds < \infty.\end{aligned}$$

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen für jedes $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$ existiert, die sich asymptotisch so verhält, wie die Weyl-Lösung ψ_z^0 von S^0 aus Beispiel 3.2.6.

Lemma 3.3.1. *Es existiert eine quadratisch integrierbare Funktion K auf $[a,\infty)\times\mathbb{R}$, welche der Integralgleichung*

$$K(x,y)=\frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}q(s)ds+\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}q(s)\int_{y-(s-x)}^{y+(s-x)}K(s,t)dt\,ds,\quad (x,y)\in\Delta_\infty$$

genügt, außerhalb von Δ_∞ verschwindet und auf Δ_∞ stetig ist, wobei

$$\Delta_\infty=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ a\le x\le y\right\}.$$

Beweis. Sei die Funktion K_0 auf $[a,\infty)\times\mathbb{R}$ definiert durch

$$K_0(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}q(s)ds & \text{falls } (x,y)\in\Delta_\infty\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Weiters definieren wir für $n\in\mathbb{N}$ die Funktion K_n auf $[a,\infty)\times\mathbb{R}$ induktiv durch

$$K_n(x,y)=\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}q(s)\int_{y-(s-x)}^{y+(s-x)}K_{n-1}(s,t)dt\,ds.$$

Nach Definition verschwindet K_0 außerhalb von Δ_∞. Dass für $n\in\mathbb{N}$ auch die Funktion K_n außerhalb von Δ_∞ verschwindet, sieht man induktiv aus der Definition, da in diesem Fall der Integrand K_{n-1} auf dem Integrationsbereich verschwindet. Wir wollen nun induktiv die Abschätzung

$$|K_n(x,y)|\le\frac{1}{2}\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{\left(\sigma_2(x)-\sigma_2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^n}{n!},\quad (x,y)\in\Delta_\infty,\ n\in\mathbb{N}_0$$

zeigen. Für K_0 ist diese Abschätzung offensichtlich. Für $n\in\mathbb{N}$ erhalten wir, da die Funktionen σ_1 und σ_2 monoton fallend sind für alle $(x,y)\in\Delta_\infty$

$$\begin{aligned}|K_n(x,y)|&\le\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}|q(s)|\int_{\max(y-(s-x),s)}^{y+(s-x)}|K_{n-1}(s,t)|dt\,ds\\
&\le\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}|q(s)|\int_{\max(y-(s-x),s)}^{y+(s-x)}\frac{\sigma_1\left(\frac{s+t}{2}\right)}{2}\frac{\left(\sigma_2(s)-\sigma_2\left(\frac{s+t}{2}\right)\right)^{n-1}}{(n-1)!}dt\,ds\\
&\le\frac{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2(n-1)!}\int_{x}^{\infty}|q(s)|\int_{\max\left(\frac{x+y}{2},s\right)}^{s+\frac{y-x}{2}}\left(\sigma_2(s)-\sigma_2(r)\right)^{n-1}dr\,ds\\
&=\frac{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2(n-1)!}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}\int_{r-\frac{y-x}{2}}^{r}|q(s)|\left(\sigma_2(s)-\sigma_2(r)\right)^{n-1}ds\,dr\\
&\le\frac{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2(n-1)!}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}\left(\sigma_2\left((r-\frac{y-x}{2}\right)-\sigma_2(r)\right)^{n-1}\times\\
&\qquad\qquad\times\left(\sigma_1\left(r-\frac{y-x}{2}\right)-\sigma_1(r)\right)dr\\
&=\frac{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2(n-1)!}\left[-\frac{\left(\sigma_2\left(r-\frac{y-x}{2}\right)-\sigma_2(r)\right)^n}{n}\right]_{r=\frac{x+y}{2}}^{\infty}\\
&=\frac{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2n!}\left(\sigma_2(x)-\sigma_2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^n.\end{aligned}$$

Wegen dieser Abschätzung konvergiert die Reihe

$$K(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x,y), \quad (x,y) \in [a,\infty) \times \mathbb{R}$$

gleichmäßig und es gilt

$$\begin{aligned} |K(x,y)| &\le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2} \frac{\left(\sigma_2(x) - \sigma_2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^n}{n!} \\ &= \frac{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2} e^{\sigma_2(x)-\sigma_2\left(\frac{x+y}{2}\right)}, \quad (x,y) \in \Delta_\infty. \end{aligned}$$

Natürlich verschwindet K außerhalb von Δ_∞. Da die Funktionen K_n, $n \in \mathbb{N}_0$ auf Δ_∞ stetig sind, ist auch K stetig auf Δ_∞. Um die Integralgleichung zu zeigen, seien $(x,y) \in \Delta_\infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} K(x,y) &= K_0(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,y) \\ &= K_0(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \int_x^\infty q(s) \int_{y-(s-x)}^{y+(s-x)} K_{n-1}(s,t)dt\, ds \\ &= K_0(x,y) + \frac{1}{2} \int_x^\infty q(s) \int_{y-(s-x)}^{y+(s-x)} \sum_{n=1}^{\infty} K_{n-1}(s,t)dt\, ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty q(s)ds + \frac{1}{2} \int_x^\infty q(s) \int_{y-(s-x)}^{y+(s-x)} K(s,t)dt\, ds, \end{aligned}$$

wobei die Vertauschung der Integrale und Summen mit dem Satz von Fubini und den Abschätzungen aus dem vorigen Schritt gerechtfertigt werden kann. Es bleibt zu zeigen, dass K quadratisch integrierbar ist. Aus der Abschätzung, die K erfüllt folgt,

$$\begin{aligned} &\int_a^\infty \int_x^\infty |K(x,y)|^2\, dy\, dx \le \\ &\le \frac{1}{4} \int_a^\infty \int_x^\infty \sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 e^{2\left(\sigma_2(x)-\sigma_2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)} dy\, dx \\ &\le \frac{1}{4} \int_a^\infty \sigma_1(x) \int_x^\infty \sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right) e^{2\left(\sigma_2(x)-\sigma_2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)} dy\, dx \\ &= \frac{1}{4} \int_a^\infty \sigma_1(x) \left[e^{2\left(\sigma_2(x)-\sigma_2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)}\right]_{y=x}^\infty dx \\ &= \frac{1}{4} \int_a^\infty \sigma_1(x) \left(e^{2\sigma_2(x)} - 1\right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\sigma_2(x) - \frac{1}{2} e^{2\sigma_2(x)}\right]_{x=a}^\infty \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2\sigma_2(a)} - 1}{2} - \sigma_2(a)\right). \end{aligned}$$

□

Korollar 3.3.2. *Hat q kompakten Träger in $[a,\infty)$, also $q(x)=0$ für fast alle $x\in(c,\infty)$, für ein $c\in[a,\infty)$, so erfüllt die Funktion K zusätzlich $K(x,y)=0$ für alle $(x,y)\in[a,\infty)\times\mathbb{R}$ mit $y>2c-x$.*

Beweis. Die Funktion K_0 verschwindet in diesem Fall offensichtlich, für alle $(x,y)\in[a,\infty)\times\mathbb{R}$ mit $y>2c-x$. Mit Induktion sieht man, dass auch die Funktionen K_n, $n\in\mathbb{N}$ in diesem Bereich verschwinden, woraus die Behauptung folgt. □

Sei nun K eine Funktion, wie aus Lemma 3.3.1 und V_K der Volterra-Integraloperator auf $L^2(a,\infty)$ mit Kern K

$$V_K f(x) = f(x) + \int_x^\infty K(x,t)f(t)dt, \quad x\in(a,\infty),\ f\in L^2(a,\infty).$$

Da der Kern K quadratisch integrierbar ist, ist dieser Operator wohldefiniert.

Satz 3.3.3. *Für alle $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ist die Funktion $V_K\psi_z^0$ eine Lösung von $(\tau-z)u=0$ und erfüllt*

$$\left|V_K\psi_z^0(x)\right| \le e^{\sigma_2(x)}\left|\psi_z^0(x)\right|, \quad x\in[a,\infty).$$

Beweis. Sei $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Dann gilt für alle r, s, $t\in\mathbb{R}$ mit $t>s$ und $a<r-(t-s)$

$$\begin{aligned}\int_{r-(t-s)}^{r+(t-s)} \psi_z^0(u)du &= \int_{r-(t-s)}^{r+(t-s)} e^{-\sqrt{-z}(u-a)}du \\ &= 2e^{-\sqrt{-z}(r-a)}\frac{\sin i\sqrt{-z}(t-s)}{i\sqrt{-z}} \\ &= 2\psi_z^0(r)\phi_z^0(t-s+a).\end{aligned}$$

Damit erhält man nun für $x\in(a,\infty)$

$$(*)\qquad \begin{aligned}\int_x^\infty \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty q(s)\psi_z^0(y)ds\,dy &= \int_x^\infty q(s)\int_x^{2s-x}\psi_z^0(y)dy\,ds \\ &= 2\int_x^\infty q(s)\psi_z^0(s)\phi_z^0(s-x+a)ds.\end{aligned}$$

Außerdem erhält man für $x\in(a,\infty)$ und $s\in(x,\infty)$

$$(**)\qquad \begin{aligned}&2\phi_z^0(s-x+a)\int_s^\infty K(s,t)\psi_z^0(t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^\infty K(s,t)\int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)}\psi_z^0(y)dy\,dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty \psi_z^0(y)\int_{y-(s-x)}^{y+(s-x)}K(s,t)dt\,dy \\ &= \int_x^\infty \psi_z^0(y)\int_{y-(s-x)}^{y+(s-x)}K(s,t)dt\,dy,\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, da für $y<x<s$

$$\int_{y-(s-x)}^{y+(s-x)} K(s,t)dt = 0.$$

Die Vertauschung der Integrale in $(*)$ und $(**)$ lässt sich dabei mit dem Satz von Fubini rechtfertigen. Sei nun

$$f_z(x) = V_K\psi_z^0(x) = \psi_z^0(x) + \int_x^\infty K(x,y)\psi_z^0(y)dy, \quad x \in (a,\infty).$$

Das asymptotische Verhalten dieser Funktion folgt mit der Abschätzung von K und da $\left|\psi_z^0\right|$ monoton fallend ist, aus

$$\begin{aligned}
\left|V_K\psi_z^0(x)\right| &\leq \left|\psi_z^0(x)\right| + \left|\psi_z^0(x)\right| \int_x^\infty \frac{1}{2}\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right) e^{\sigma_2(x)-\sigma_2\left(\frac{x+y}{2}\right)}dy \\
&= \left|\psi_z^0(x)\right| + \left|\psi_z^0(x)\right| \left[e^{\sigma_2(x)-\sigma_2\left(\frac{x+y}{2}\right)}\right]_{y=x}^\infty \\
&= \left|\psi_z^0(x)\right| e^{\sigma_2(x)}, \quad x \in [a,\infty).
\end{aligned}$$

Aus der Integralgleichung, die K erfüllt, sowie $(*)$ und $(**)$ folgt dann

$$\begin{aligned}
&\int_x^\infty K(x,y)\psi_z^0(y)dy = \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_x^\infty \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty q(s)\psi_z^0(y)ds\,dy + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\int_x^\infty \int_x^\infty q(s) \int_{y-(s-x)}^{y+(s-x)} K(s,t)\psi_z^0(y)dt\,ds\,dy \\
&\quad = \int_x^\infty \phi_z^0(s-x+a)q(s)\psi_z^0(s)ds + \\
&\qquad\qquad + \int_x^\infty \phi_z^0(s-x+a)q(s)\int_s^\infty K(s,t)\psi_z^0(t)dt\,ds \\
&\quad = \int_x^\infty \phi_z^0(s-x+a)q(s)\left(\psi_z^0(s) + \int_s^\infty K(s,t)\psi_z^0(t)dt\right)ds \\
&\quad = \int_x^\infty \frac{\sin\sqrt{z}(s-x)}{\sqrt{z}}q(s)f_z(s)dt, \quad x \in (a,\infty).
\end{aligned}$$

Also erfüllt die Funktion f_z

$$f_z(x) = e^{-\sqrt{-z}(x-a)} + \int_x^\infty \frac{\sin\sqrt{z}(y-x)}{\sqrt{z}}q(y)f_z(y)dy, \quad x \in [a,\infty)$$

und ist damit eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$, wie man unmittelbar nachrechnet. □

Der Operator V_K bildet also die Lösungen ψ_z^0, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ auf Lösungen von $(\tau - z)u = 0$ ab, die sich asymptotisch wie die Funktionen ψ_z^0 verhalten. Da die Funktionen $V_K\psi_z^0$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ in $L^2(a,\infty)$ liegen, sind sie skalare Vielfache der Weyl-Lösungen ψ_z, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, falls nur τ bei ∞ im Grenzpunktfall ist. Man kann zeigen, dass dies unter den Voraussetzungen dieses Abschnitts stets der Fall ist. Die Funktionen $V_K\psi_z^0$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ werden oft auch Jost-Lösungen genannt.

3.4. Asymptotik der m-Funktion

Sei in diesem Abschnitt τ wieder ein Sturm-Liouville Differentialausdruck auf einem beschränkten oder unbeschränkten Intervall (a,b), der regulär bei a ist und S eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen. Es existiert daher ein eindeutiges $\alpha \in [0,\pi)$, sodass

$$f(a)\cos\alpha - f'(a)\sin\alpha = 0, \quad f \in \mathcal{D}(S).$$

Ist τ bei b im Grenzkreisfall, so erfüllen die Funktionen aus dem Definitionsbereich von S außerdem noch eine Randbedingung bei b. Weiters sei m die Weyl-Titchmarsh m-Funktion von S und die Funktionen ϕ_z, θ_z, $z \in \mathbb{C}$ und ψ_z, $z \in \varrho(S)$ wie in Abschnitt 3.1 definiert.

Wir führen für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ die Funktion

$$p_z(x) = \frac{\psi_z'(x)}{\psi_z(x)}, \quad x \in [a,b)$$

ein. Wäre $\psi_z(x) = 0$ für ein $x \in [a,b)$, so wäre $\psi_z|_{(x,b)}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert z einer selbstadjungierten Realisierung von $\tau|_{(x,b)}$ und zwar derjenigen mit Dirichlet-Randbedingungen bei x und der Randbedingung von S bei b, falls τ bei b im Grenzkreisfall ist. Die Funktionen p_z, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ sind also wohldefiniert. Außerdem sind sie lokal absolut stetig und erfüllen die Riccati-Gleichung

$$p_z'(x) = q(x) - z - p_z(x)^2$$

für fast alle $x \in (a,b)$. Weiters sieht man unmittelbar

$$p_z(a) = \frac{\psi_z'(a)}{\psi_z(a)} = \frac{m(z)\phi_z'(a) + \theta_z'(a)}{m(z)\phi_z(a) + \theta_z(a)} = \frac{m(z)\cos\alpha - \sin\alpha}{m(z)\sin\alpha + \cos\alpha}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$$

und damit

$$m(z) = \frac{\sin\alpha + p_z(a)\cos\alpha}{\cos\alpha - p_z(a)\sin\alpha} = \frac{\psi_z(a)\sin\alpha + \psi_z'(a)\cos\alpha}{\psi_z(a)\cos\alpha - \psi_z'(a)\sin\alpha}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Insbesondere gilt daher offensichtlich im Fall $\alpha = 0$

$$m(z) = \frac{\psi_z'(a)}{\psi_z(a)} = p_z(a), \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Allgemeiner gilt sogar folgende Proposition.

Proposition 3.4.1. *Sei $c \in [a,b)$ und $\tilde{S}_0$ die selbstadjungierte Realisierung von $\tau|_{(c,b)}$ mit Dirichlet-Randbedingungen bei c und der Randbedingung von S bei b, falls τ und damit $\tau|_{(c,b)}$ bei b im Grenzkreisfall ist. Ist $\tilde{m}_0$ die m-Funktion von $\tilde{S}_0$, so gilt*

$$\tilde{m}_0(z) = p_z(c), \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Beweis. Für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ist die Funktion $f_z(x) = \psi_z(x)$, $x \in [c,b)$ eine Lösung von $(\tau|_{(c,b)} - z)u = 0$, die in $L^2(c,b)$ liegt und die Randbedingung bei b erfüllt, falls $\tau|_{(c,b)}$ bei b im Grenzkreisfall ist. Also ist f_z ein skalares Vielfaches der Weyl-Lösung $\tilde{\psi}_z$ von $\tilde{S}_0$ und es gilt

$$\tilde{m}_0(z) = \frac{\tilde{\psi}_z'(c)}{\tilde{\psi}_z(c)} = \frac{f_z'(c)}{f_z(c)} = \frac{\psi_z'(c)}{\psi_z(c)} = p_z(c), \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

$\square$

Wir wollen in diesem Abschnitt das asymptotische Verhalten von m untersuchen. Zunächst werden wir uns auf den Fall $\alpha = 0$ beschränken. Anschließend übertragen wir die Ergebnisse mit Hilfe von (3.2) auf den allgemeinen Fall. Wir betrachten dazu im Folgenden, für ein, zunächst beliebiges $c \in (a,b)$, den Sturm-Liouville Differentialausdruck τ_c auf (a,∞) mit Potential

$$q_c(x) = \begin{cases} q(x), & \text{falls } x \in (a,c] \\ 0, & \text{falls } x \in (c,\infty). \end{cases}$$

Weiters sei S_c die selbstadjungierte Realisierung von τ_c mit Dirichlet-Randbedingungen bei a, also

$$f(a) = 0, \quad f \in \mathcal{D}\left(S_c\right).$$

Da τ_c bei ∞ im Grenzpunktfall ist, ist keine Randbedingung bei ∞ notwendig. Weiters sei m_c die Weyl-Titchmarsh m-Funktion von S_c und die Funktionen $\theta_{c,z}$, $\phi_{c,z}$, $z \in \mathbb{C}$ und $\psi_{c,z}$, $p_{c,z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ in offensichtlicher Weise, wie in Abschnitt 3.1 definiert.

Lemma 3.4.2. *Seien A, B, C, $D \in \mathbb{C}$ mit $AD - BC = 1$, $D \neq 0$, $\operatorname{Im}\left(C\overline{D}\right) < 0$ und f die Möbiustransformation*

$$f(\zeta) = \frac{A\zeta + B}{C\zeta + D}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Dann gilt für ζ_1, $\zeta_2 \in \mathbb{C}^+$

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq \left|\operatorname{Im}\left(C\overline{D}\right)\right|^{-1}.$$

Beweis. Betrachte die Möbiustransformation

$$g(\zeta) = \frac{\zeta}{CD^{-1}\zeta + 1} = \frac{1}{CD^{-1} + \zeta^{-1}}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^\infty.$$

Dann gilt $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$. Also ist $g\left(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\right)$ ein Kreis, der die reelle Achse im Ursprung tangiert. Der andere Punkt auf der imaginären Achse ist

$$g\left(\frac{-1}{\operatorname{Re}\left(CD^{-1}\right)}\right) = \frac{-i}{\operatorname{Im}\left(CD^{-1}\right)}.$$

Also hat der Kreis Durchmesser $\left|\operatorname{Im}\left(CD^{-1}\right)\right|^{-1} = |D|^2 \left|\operatorname{Im}\left(C\overline{D}\right)\right|^{-1}$. Setzt man $D = |D|e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0,2\pi)$, so gilt wegen $AD - BC = 1$

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{A\zeta + B}{C\zeta + D} = \frac{AD\zeta + BD}{CD\zeta + D^2} = \frac{\zeta}{CD\zeta + D^2} + \frac{BC\zeta + BD}{CD\zeta + D^2} \\ &= \frac{\zeta}{(CD^{-1}\zeta + 1)D^2} + \frac{B}{D}\frac{C\zeta + D}{C\zeta + D} = e^{-2i\varphi}|D|^{-2}g(\zeta) + \frac{B}{D}. \end{aligned}$$

Da die Translation um B/D und die Multiplikation mit $e^{-2i\varphi}$ den Durchmesser unverändert lässt, bildet f, $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ auf einen Kreis mit Durchmesser

$$|D|^{-2}\left|\operatorname{Im}\left(CD^{-1}\right)\right|^{-1} = \left|\operatorname{Im}\left(C\overline{D}\right)\right|^{-1}$$

ab. Da der Pol $-DC^{-1}$ von f in der unteren Halbebene liegt, ist $f(\mathbb{C}^+)$ beschränkt. Also muss $\mathbb{C}^+$ auf das Innere dieses Kreises abgebildet werden, was die Behauptung zeigt. □

LEMMA 3.4.3. *Sei $\alpha = 0$ und für jedes $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ sei f_z die Möbiustransformation*

$$f_z(\zeta) = -\frac{\theta_z(c)\zeta - \theta_z'(c)}{\phi_z(c)\zeta - \phi_z'(c)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^\infty.$$

Dann gilt für jede nichttriviale Lösung u von $(\tau - z)u = 0$

$$\frac{u'(a)}{u(a)} = f_z\left(\frac{u'(c)}{u(c)}\right).$$

BEWEIS. Die Inverse von f_z ist die Möbiustransformation

$$f_z^{-1}(\zeta) = \frac{\phi_z'(c)\zeta + \theta_z'(c)}{\phi_z(c)\zeta + \theta_z(c)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^\infty.$$

Wegen $\alpha = 0$ gilt nach Proposition 1.2.5 für jede Lösung u

$$u(x) = u(a)\theta_z(x) + u'(a)\phi_z(x), \quad x \in [a, b)$$

also

$$\frac{u'(c)}{u(c)} = \frac{\phi_z'(c)u'(a) + \theta_z'(c)u(a)}{\phi_z(c)u'(a) + \theta_z(c)u(a)} = f_z^{-1}\left(\frac{u'(a)}{u(a)}\right),$$

woraus die Behauptung folgt. □

LEMMA 3.4.4. *Sei $\alpha = 0$ und $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Dann gilt*

$$|m(z) - m_c(z)| \leq \left|\mathrm{Im}\left(\phi_z(c)\overline{\phi_z'(c)}\right)\right|^{-1}.$$

BEWEIS. Aus Eigenschaft (3.1) sieht man, dass wir uns auf den Fall $\mathrm{Im}(z) > 0$ einschränken können. Sei f_z die Möbiustransformation aus Lemma 3.4.3. Wir wollen zeigen, dass die Voraussetzungen aus Lemma 3.4.2 erfüllt sind. Offensichtlich gilt

$$\theta_z(c)\phi_z'(c) - \theta_z'(c)\phi_z(c) = W(\theta_z, \phi_z)(c) = 1.$$

Außerdem gilt $\phi_z'(c) \neq 0$, da sonst eine selbstadjungierte Realisierung von $\tau|_{(a,c)}$ existierte, mit $\phi_z|_{(a,c)}$ als Eigenvektor zum Eigenwert z. Sei weiters

$$f(x) = -\mathrm{Im}\left(\phi_z(x)\overline{\phi_z'(x)}\right), \quad x \in [a, b).$$

Wegen $f(a) = 0$ und

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\mathrm{Im}\left(\left|\phi_z'(x)\right|^2 + \phi_z(x)\overline{\phi_z''(x)}\right) \\ &= -\mathrm{Im}\left(q(x)\left|\phi_z(x)\right|^2 - \overline{z}\left|\phi_z(x)\right|^2\right) \\ &= -\left|\phi_z(x)\right|^2 \mathrm{Im}(z), \end{aligned}$$

für fast alle $x \in (a, b)$ gilt dann

$$-\mathrm{Im}\left(\phi_z(c)\overline{\phi_z'(c)}\right) = f(c) = \int_a^c f'(t)dt = -\mathrm{Im}(z)\int_a^c \left|\phi_z(t)\right|^2 dt < 0.$$

Also erfüllt f_z alle Voraussetzungen aus Lemma 3.4.2. Nach Lemma 3.4.3 gilt

$$m(z) = \frac{\psi_z'(a)}{\psi_z(a)} = f_z\left(\frac{\psi_z'(c)}{\psi_z(c)}\right) = f_z\left(p_z(c)\right).$$

Da die Fundamentalsysteme θ_z, ϕ_z von S und $\theta_{c,z}$, $\phi_{c,z}$ von S_c auf $[a,c]$ übereinstimmen, gilt andererseits auch

$$m_c(z) = \frac{\psi'_{c,z}(a)}{\psi_{c,z}(a)} = f_z\left(\frac{\psi'_{c,z}(c)}{\psi_{c,z}(c)}\right) = f_z\left(p_{c,z}(c)\right).$$

Wegen Proposition 3.4.1 gilt weiters $p_z(c)$, $p_{c,z}(c) \in \mathbb{C}^+$, womit man mit Lemma 3.4.2 das Gewünschte erhält. □

Proposition 3.4.5. *Sei $\alpha = 0$ und $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ mit*

$$\operatorname{Re}\sqrt{-z} \geq \max\left(\frac{\ln(6)}{c-a}, 4\int_a^c |q(s)|ds\right).$$

Dann gilt

$$|m(z) - m_c(z)| \leq \frac{864}{5}\frac{|z|}{|\operatorname{Im}\sqrt{-z}|}e^{-2(c-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}.$$

Beweis. Da die Funktion ϕ_z eine Lösung von

$$\left(\tau^0|_{(a,b)} - z\right)u = -q\phi_z$$

ist, gilt nach Proposition 1.2.5

$$\begin{aligned}\phi_z(x) &= \phi_z^0(x) + \int_a^x \left(\phi_z^0(x)\theta_z^0(y) - \phi_z^0(y)\theta_z^0(x)\right)q(y)\phi_z(y)dy \\ &= \phi_z^0(x) + \int_a^x \phi_z^0(x-y+a)q(y)\phi_z(y)dy, \quad x \in [a,b),\end{aligned}$$

wobei θ_z^0 und ϕ_z^0 die Funktionen aus Beispiel 3.2.6 sind und die zweite Gleichheit aus den Additionstheoremen der Winkelfunktionen folgt. Außerdem werden wir noch die folgende Abschätzung für ϕ_z^0 brauchen

$$\frac{e^{(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}} - e^{-(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{2\left|\sqrt{-z}\right|} \leq \left|\phi_z^0(x)\right| \leq \frac{e^{(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{\left|\sqrt{-z}\right|}, \quad x \in [a,b).$$

Sei nun g die Funktion

$$g(x) = \sqrt{-z}e^{-(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\phi_z(x), \quad x \in [a,b).$$

Dann gilt für alle $x \in [a,c]$

$$\begin{aligned}|g(x)| &= \left|\sqrt{-z}e^{-(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\phi_z(x)\right| \\ &\leq \left|\sqrt{-z}e^{-(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\phi_z^0(x)\right| + \\ &\qquad + \left|\sqrt{-z}e^{-(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\int_a^x \phi_z^0(x-y+a)q(y)\phi_z(y)dy\right| \\ &\leq 1 + \left|\int_a^x \phi_z^0(x-y+a)e^{-(x-y)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}q(y)g(y)dy\right| \\ &\leq 1 + \frac{1}{\left|\sqrt{-z}\right|}\int_a^x |q(y)|\,|g(y)|\,dy \\ &\leq 1 + \frac{1}{4}\sup_{y\in[a,c]}|g(y)|.\end{aligned}$$

Damit ist g auf $[a,c]$ durch $4/3$ beschränkt. Weiters gilt für alle $x \in [a,c]$

$$\begin{aligned}
\left|\phi_z(x) - \phi_z^0(x)\right| &\le \int_a^x \left|\phi_z^0(x-y+a)q(y)\phi_z(y)\right| dy \\
&\le \left|\sqrt{-z}\right|^{-1} \int_a^x \left|\phi_z^0(x-y+a)q(y)g(y)e^{(y-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right| dy \\
&\le \left|\sqrt{-z}\right|^{-2} e^{(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}} \sup_{y\in[a,c]} |g(y)| \int_a^c |q(t)| dt \\
&\le \frac{e^{(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{3\left|\sqrt{-z}\right|}.
\end{aligned}$$

Daraus erhält man mit der Dreiecksungleichung nach unten

$$\begin{aligned}
|\phi_z(x)| &\ge \left|\phi_z^0(x)\right| - \frac{e^{(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{3\left|\sqrt{-z}\right|} \\
&\ge \frac{e^{(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}} - e^{-(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{2\left|\sqrt{-z}\right|} - \frac{e^{(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{3\left|\sqrt{-z}\right|} \\
&= \frac{e^{(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{6\left|\sqrt{-z}\right|}\left(1 - 3e^{-2(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right), \quad x \in [a,c].
\end{aligned}$$

Für $x \in \left[\frac{a+c}{2}, c\right]$ kann man das weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned}
|\phi_z(x)| &\ge \frac{e^{(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{6\left|\sqrt{-z}\right|}\left(1 - 3e^{-2(\frac{a+c}{2}-a)\frac{\ln(6)}{c-a}}\right) \\
&= \frac{e^{(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{12\left|\sqrt{-z}\right|}.
\end{aligned}$$

Sei nun wie im Beweis von Lemma 3.4.4

$$f(x) = -\operatorname{Im}\left(\phi_z(x)\overline{\phi_z'(x)}\right) = -\operatorname{Im}(z)\int_a^x |\phi_z(x)|^2\, dx, \quad x \in [a,b).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\operatorname{Im}\left(\phi_z(c)\overline{\phi_z'(c)}\right)\right| &= |f(c)| = |\operatorname{Im} z| \int_a^c |\phi_z(x)|^2\, dx \\
&\ge \left|2\operatorname{Re}\sqrt{-z}\operatorname{Im}\sqrt{-z}\right| \int_{\frac{a+c}{2}}^c |\phi_z(x)|^2\, dx \\
&\ge \frac{\left|2\operatorname{Re}\sqrt{-z}\operatorname{Im}\sqrt{-z}\right|}{12^2\left|\sqrt{-z}\right|^2} \int_{\frac{a+c}{2}}^c e^{2(x-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}} dx \\
&= \frac{2\operatorname{Re}\sqrt{-z}\left|\operatorname{Im}\sqrt{-z}\right|}{12^2|z|} \frac{e^{2(c-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}{2\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\left(1 - e^{-(c-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right) \\
&\ge \frac{5}{864}\frac{\left|\operatorname{Im}\sqrt{-z}\right|}{|z|} e^{2(c-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.4.4 ergibt sich nun die Behauptung

$$|m(z) - m_c(z)| \le \left|\operatorname{Im}\left(\overline{\phi_z(c)}\phi_z'(c)\right)\right|^{-1} \le \frac{864}{5}\frac{|z|}{\left|\operatorname{Im}\sqrt{-z}\right|} e^{-2(c-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}.$$

$\square$

PROPOSITION 3.4.6. *Sei* $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ *mit* $\operatorname{Re} \sqrt{-z} > 2 \int_a^c |q(t)| dt$. *Dann gilt*

$$\left| m_c(z) + \sqrt{-z} \right| \leq 2 \int_a^c |q(t)| dt.$$

BEWEIS. Zur Abkürzung setzen wir $Q(c) = \int_a^c |q(t)| dt$. Ist $Q(c) = 0$, so folgt die Behauptung sofort aus Beispiel 3.2.6. Sei also im Folgenden $Q(c) > 0$ und f die Funktion

$$f(x) = p_{c,z}(x) + \sqrt{-z}, \quad x \in [a, \infty).$$

Dann erfüllt die Ableitung von f

$$f'(x) = q(x) - z - p_{c,z}(x)^2 = q(x) - f(x)^2 + 2\sqrt{-z} f(x),$$

für fast alle $x \in (a, \infty)$ und wegen Proposition 3.4.1 und Beispiel 3.2.6 gilt

$$f(c) = p_{c,z}(c) + \sqrt{-z} = 0.$$

Also haben wir

$$e^{-2\sqrt{-z}x} f(x) = -\int_x^c e^{-2\sqrt{-z}t} \left(q(t) - f(t)^2 \right) dt, \quad x \in [a, c].$$

Angenommen die Funktion f wäre auf $[a, c]$ nicht durch $2\,Q(c)$ beschränkt. Dann existiert wegen der Stetigkeit von f ein $c_0 \in [a, c)$ mit $|f(c_0)| = 2\,Q(c)$ und $|f(x)| < 2\,Q(c)$ für alle $x \in (c_0, c]$. Dann wäre aber

$$\begin{aligned} |f(c_0)| &= \left| \int_{c_0}^c e^{-2\sqrt{-z}(t-c_0)} \left(q(t) - f(t)^2 \right) dt \right| \\ &\leq \int_{c_0}^c |q(t)| dt + 4\,Q(c)^2 \int_{c_0}^c e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}(t-c_0)} dt \\ &\leq Q(c) + \frac{4\,Q(c)^2}{2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} < Q(c) + \frac{4\,Q(c)^2}{4\,Q(c)} = 2\,Q(c). \end{aligned}$$

Also muss f auf $[a, c]$ durch $2\,Q(c)$ beschränkt sein, insbesondere gilt

$$\left| m_c(z) + \sqrt{-z} \right| = \left| p_{c,z}(a) + \sqrt{-z} \right| = |f(a)| \leq 2 \int_a^c |q(t)| dt.$$

$\square$

Für jedes $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ bezeichnen wir mit $K_\delta \subseteq \mathbb{C}$ den Kegel

$$K_\delta = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| > \tan \delta \, |\operatorname{Re} z| \}.$$

Wir werden nun die vorangehenden zwei Propositionen kombinieren und sehen, dass sich die Funktion m im Fall $\alpha = 0$ asymptotisch, für große z in K_δ, wie die m-Funktion m^0 von S^0 aus Beispiel 3.2.6 verhält.

SATZ 3.4.7. *Ist* $\alpha = 0$, *so gilt für jedes* $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left| m(z) + \sqrt{-z} \right| \to 0, \quad \textit{für } |z| \to \infty \textit{ in } K_\delta.$$

BEWEIS. Für jedes $z \in K_\delta$ gilt

$$\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \left(\sqrt{-z}\sqrt{-z} \right) = -2 \operatorname{Re} \sqrt{-z} \operatorname{Im} \sqrt{-z}$$

$$\operatorname{Re} z = -\operatorname{Re} \left(\sqrt{-z}\sqrt{-z} \right) = -\left(\operatorname{Re} \sqrt{-z} \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \sqrt{-z} \right)^2.$$

Aus $|\mathrm{Im}\, z| > \tan\delta\, |\mathrm{Re}\, z|$ folgt daher

$$\left|\mathrm{Im}\sqrt{-z}\right|^2 - \left|\mathrm{Re}\sqrt{-z}\right|^2 \le \left|\left(\mathrm{Im}\sqrt{-z}\right)^2 - \left(\mathrm{Re}\sqrt{-z}\right)^2\right| = |\mathrm{Re}\ z|$$
$$< \frac{|\mathrm{Im}\ z|}{\tan\delta} = \frac{2}{\tan\delta}\left|\mathrm{Re}\sqrt{-z}\right|\left|\mathrm{Im}\sqrt{-z}\right|.$$

Da $\mathrm{Im}\sqrt{-z} \neq 0$ gilt damit

$$\left|\frac{\mathrm{Re}\sqrt{-z}}{\mathrm{Im}\sqrt{-z}}\right|^2 + \frac{2}{\tan\delta}\left|\frac{\mathrm{Re}\sqrt{-z}}{\mathrm{Im}\sqrt{-z}}\right| - 1 > 0$$

und daher notwendigerweise

$$\left|\frac{\mathrm{Re}\sqrt{-z}}{\mathrm{Im}\sqrt{-z}}\right| > -\frac{1}{\tan\delta} + \sqrt{\frac{1}{\tan^2\delta} + 1} =: \gamma > 0.$$

Weiters gilt

$$(*) \quad |z| = \sqrt{|\mathrm{Re}\ z|^2 + |\mathrm{Im}\ z|^2} < |\mathrm{Im}\ z|\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\delta}}$$
$$= 2\,\mathrm{Re}\sqrt{-z}\left|\mathrm{Im}\sqrt{-z}\right|\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\delta}} < \frac{2}{\gamma}\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\delta}}\left(\mathrm{Re}\sqrt{-z}\right)^2.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $c \in (a,b)$ so klein, dass

$$2\int_a^c |q(t)|dt \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus $(*)$ und da stets $\mathrm{Re}\sqrt{-z} > 0$ gilt, sieht man, dass die Voraussetzungen aus Proposition 3.4.5 und Proposition 3.4.6 erfüllt sind, falls nur $|z| > M_1$ für ein $M_1 \in \mathbb{R}$. Weiter existiert aus den gleichen Gründen ein $M_2 \in \mathbb{R}$, sodass für alle $z \in K_\delta$ mit $|z| > M_2$

$$\frac{1728}{5}\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\delta}}\,\mathrm{Re}\sqrt{-z}\,e^{-2(c-a)\mathrm{Re}\sqrt{-z}} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Also gilt für alle $z \in K_\delta$ mit $|z| > \max(M_1, M_2)$

$$\left|m(z) + \sqrt{-z}\right| \le |m(z) - m_c(z)| + \left|m_c(z) + \sqrt{-z}\right|$$
$$\le \frac{864}{5}\frac{|z|}{\left|\mathrm{Im}\sqrt{-z}\right|}e^{-2(c-a)\mathrm{Re}\sqrt{-z}} + 2\int_a^c |q(s)|ds$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{864}{5}\frac{2\,\mathrm{Re}\sqrt{-z}\left|\mathrm{Im}\sqrt{-z}\right|}{\left|\mathrm{Im}\sqrt{-z}\right|}\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\delta}}e^{-2(c-a)\mathrm{Re}\sqrt{-z}}$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1728}{5}\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\delta}}\,\mathrm{Re}\sqrt{-z}\,e^{-2(c-a)\mathrm{Re}\sqrt{-z}}$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Im nächsten Abschnitt werden wir noch folgendes Ergebnis benötigen.

PROPOSITION 3.4.8. *Sei $d \in (a,b)$ und $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann existieren Konstanten C, $M \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\left|p_z(x) + \sqrt{-z}\right| \le C, \quad x \in [a,d],\ z \in K_\delta,\ |z| > M.$$

Beweis. Wir wählen ein festes $\gamma \in (0, b-d)$. Für jedes $x_0 \in [a, d]$ stimmt nach Proposition 3.4.1 die Abbildung $z \mapsto p_z(x_0)$ auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ mit der m-Funktion einer selbstadjungierten Realisierung von $\tau|_{(x_0,b)}$ mit Dirichlet-Randbedingungen bei x_0 überein. Mit $c = d + \gamma \in (a, b)$ folgt dann aus Proposition 3.4.5 und Proposition 3.4.6

$$
\begin{aligned}
&\left|p_z(x_0) + \sqrt{-z}\right| \leq \\
&\quad\leq 2\int_{x_0}^{d+\gamma} |q(t)|dt + \frac{1728}{5}\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\delta}}\operatorname{Re}\sqrt{-z}\, e^{-2(d+\gamma-x_0)\operatorname{Re}\sqrt{-z}} \\
&\quad\leq 2\int_{a}^{d+\gamma} |q(t)|dt + \frac{1728}{5}\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\delta}}\operatorname{Re}\sqrt{-z}\, e^{-2\gamma\operatorname{Re}\sqrt{-z}},
\end{aligned}
$$

falls nur $z \in K_\delta$ und

$$
\operatorname{Re}\sqrt{-z} \geq \max\left(\frac{\ln(6)}{\gamma}, 4\int_a^{d+\gamma}|q(t)|dt\right),
$$

was sicher dann erfüllt ist, wenn nur $|z| > M$, für ein bestimmtes $M \in \mathbb{R}$. Da diese Abschätzung unabhängig von $x_0 \in [a, d]$ ist und die rechte Seite für alle $z \in K_\delta$ mit $|z| > M$ beschränkt ist, ist die Behauptung bewiesen. □

Wir übertragen nun die Ergebnisse aus Satz 3.4.7 auf den allgemeinen Fall $\alpha \in (0, \pi)$.

Satz 3.4.9. *Ist $\alpha \in (0, \pi)$, so gilt für jedes $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$*

$$
m(z) \to -\cot\alpha, \quad \text{für } |z| \to \infty \text{ in } K_\delta.
$$

Beweis. Wegen (3.2) gilt

$$
m(z) = \frac{\sin\alpha + p_z(a)\cos\alpha}{\cos\alpha - p_z(a)\sin\alpha}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.
$$

Nach Satz 3.4.7 gilt

$$
|p_z(a)| \to \infty, \quad \text{für } |z| \to \infty \text{ in } K_\delta
$$

und damit

$$
m(z) = \frac{p_z(a)^{-1}\sin\alpha + \cos\alpha}{p_z(a)^{-1}\cos\alpha - \sin\alpha} \to -\cot\alpha, \quad \text{für } |z| \to \infty \text{ in } K_\delta.
$$

□

3.5. Lokale Eindeutigkeitssätze

Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, wie sich die m-Funktionen zweier Sturm-Liouville Operatoren unterscheiden, wenn diese lokal um den Randpunkt a übereinstimmen. Seien dazu τ_i, $i \in \{1, 2\}$ zwei, bei a reguläre Sturm-Liouville Differentialausdrücke auf Intervallen (a, b_i) mit Potentialen q_i, wie in den vorigen Abschnitten. Für $i \in \{1, 2\}$ sei außerdem $\alpha_i \in [0, \pi)$ und S_i eine selbstadjungierte Realisierung von τ_i mit der Randbedingung

$$
f(a)\cos\alpha_i - f'(a)\sin\alpha_i = 0, \quad f \in \mathcal{D}(S_i)
$$

bei a und einer Randbedingung bei b_i, falls τ_i bei b_i im Grenzkreisfall ist. Weiters bezeichnen wir mit m_i die Weyl-Titchmarsh m-Funktion von S_i und mit $\theta_{i,z}$, $\phi_{i,z}$, $z \in \mathbb{C}$ und $\psi_{i,z}$, $p_{i,z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ die entsprechenden Funktionen, wie in Abschnitt 3.1 und 3.4. Um die Differenz der zwei m-Funktionen zu untersuchen, verwenden wir die Riccati-Gleichungen, welche die Funktionen $p_{i,z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ erfüllen. Dazu zeigen wir zunächst folgenden allgemeinen Satz.

Satz 3.5.1. *Seien $c \in (a,\infty)$, $r \in L^1(a,c)$, $G \subseteq \mathbb{C}$ und für jedes $z \in G$ und $i \in \{1,2\}$ sei $f_{i,z}$ eine absolut stetige Funktion auf $[a,c]$, welche die Riccati-Gleichung*

$$f_{i,z}'(x) = r(x) - z - f_{i,z}(x)^2, \quad x \in (a,c)$$

fast überall erfüllt. Existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$\left|f_{i,z}(x) + \sqrt{-z}\right| \leq C, \quad x \in [a,c],\ z \in G,\ i \in \{1,2\}, \tag{3.3}$$

so gilt

$$|f_{1,z}(a) - f_{2,z}(a)| \leq 2Ce^{-2(c-a)(\operatorname{Re}\sqrt{-z}-C)}, \quad z \in G.$$

Beweis. Für $z \in G$ seien

$$f_z(x) = f_{1,z}(x) - f_{2,z}(x) \quad \text{und} \quad g_z(x) = f_{1,z}(x) + f_{1,z}(x), \quad x \in [a,c].$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f_z'(x) &= f_{1,z}'(x) - f_{2,z}'(x) = -f_{1,z}(x)^2 + f_{2,z}(x)^2 \\ &= -(f_{1,z}(x) - f_{2,z}(x))(f_{1,z}(x) + f_{2,z}(x)) = -f_z(x)g_z(x), \quad x \in [a,c] \end{aligned}$$

und daher

$$f_z(x) = f_z(c)e^{\int_x^c g_z(t)dt}, \quad x \in [a,c].$$

Aus (3.3) erhalten wir die Abschätzung

$$\operatorname{Re} f_{i,z} + \operatorname{Re}\sqrt{-z} \leq \left|\operatorname{Re}\left(f_{i,z} + \sqrt{-z}\right)\right| \leq \left|f_{i,z} + \sqrt{-z}\right| \leq C, \quad z \in G.$$

Zusammen gilt damit

$$\begin{aligned} |f_{1,z}(a) - f_{2,z}(a)| &= |f_{1,z}(c) - f_{2,z}(c)|e^{\int_a^c \operatorname{Re} f_{1,z}(t) + \operatorname{Re} f_{2,t}(t)dt} \\ &\leq 2Ce^{\int_a^c 2C - 2\operatorname{Re}\sqrt{-z}dt} \\ &= 2Ce^{-2(c-a)\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}-C\right)}, \quad z \in G. \end{aligned}$$

□

Wir wollen Satz 3.5.1 auf die Funktionen $p_{1,z}$ und $p_{2,z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, welche die Riccati-Gleichungen

$$p_{i,z}'(x) = q_i(x) - z - p_{i,z}(x)^2, \quad x \in (a,b_i),\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\ i \in \{1,2\}$$

fast überall erfüllen, anwenden. Die benötigte Abschätzung (3.3) haben wir bereits in Proposition 3.4.8 bewiesen. Wir erhalten somit folgenden Satz.

Satz 3.5.2. *Sei $c \in (a,b_1) \cap (a,b_2)$ und $\delta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Stimmen die Potentiale auf (a,c) überein, also*

$$q_1(x) = q_2(x)$$

für fast alle $x \in (a,c)$, so gilt

$$p_{1,z}(a) - p_{2,z}(a) = o\left(e^{-2(c-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right), \quad \text{für } |z| \to \infty \text{ in } K_\delta.$$

BEWEIS. Da die Potentiale q_1 und q_2 auf (a,c) fast überall übereinstimmen, erfüllen die Funktionen $p_{1,z}$ und $p_{2,z}$ auf (a,c) die Riccati-Gleichung

$$p_{i,z}'(x) = q_1(x) - z - p_{i,z}(x)^2, \quad z \in \varrho(S_i),\ i \in \{1,2\}$$

für fast alle $x \in (a,c)$. Weiters existieren nach Proposition 3.4.8 Konstanten C, $M \in \mathbb{R}$, sodass

$$\left|p_{i,z}(x) + \sqrt{-z}\right| \leq C, \quad x \in [a,c],\ z \in K_\delta,\ |z| > M.$$

Nach Satz 3.5.1 gilt somit also

$$|p_{1,z}(a) - p_{2,z}(a)| \leq |p_{1,z}(c) - p_{2,z}(c)|\, e^{2(c-a)C} e^{-2(c-a)\mathrm{Re}\sqrt{-z}},$$

für alle $z \in K_\delta$ mit $|z| > M$. Aus Satz 3.4.7 und Proposition 3.4.1 folgt

$$|p_{1,z}(c) - p_{2,z}(c)| \to 0, \quad \text{für } |z| \to \infty \text{ in } K_\delta$$

und daraus die Behauptung. $\square$

Falls $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, so folgt, wegen

$$m_i(z) = p_{i,z}(a), \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\ i \in \{1,2\}$$

unter den Voraussetzungen von Satz 3.5.2

$$m_1(z) - m_2(z) = o\left(e^{-2(c-a)\mathrm{Re}\sqrt{-z}}\right), \quad \text{für } |z| \to \infty \text{ in } K_\delta.$$

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass auch die Umkehrung davon gilt. Dazu benötigen wir zunächst noch zwei allgemeine Lemmata.

LEMMA 3.5.3. *Sei $c \in (a,\infty)$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und $f \in L^1(a,c)$ mit*

$$\left|\int_a^c f(t) e^{-(t-a)re^{i\varphi}} dt\right| \leq C \left|e^{-(c-a)re^{i\varphi}}\right|, \quad r > M,$$

für bestimmte Konstanten C, $M \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f = 0$.

BEWEIS. Die Funktion

$$h(z) = \int_a^c \frac{f(t)}{t - iz} dt, \quad z \in \mathbb{C}\backslash \{ir \mid r \in [-c,-a]\}$$

ist analytisch. Für jedes $\varepsilon > 0$ betrachten wir die Funktion h_ε auf $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(s) &= \frac{h(\varepsilon - is) - h(-\varepsilon - is)}{2\pi i} = \int_a^c f(t) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(s-t)^2 + \varepsilon^2} dt \\ &= f * g_\varepsilon(s), \quad s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei

$$g_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da die Funktionen g_ε eine approximative Einheit, für $\varepsilon \searrow 0$ sind, konvergiert $h_\varepsilon = f * g_\varepsilon$ für $\varepsilon \searrow 0$ in $L^1(\mathbb{R})$ gegen f. Es genügt daher zu zeigen, dass h zu einer, auf $\mathbb{C}\backslash\{-ic\}$ analytischen Funktion fortgesetzt werden kann. Wir betrachten dazu die ganze Funktion F

$$F(z) = \int_a^c f(t) e^{-tze^{i\varphi}} dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Nach Voraussetzung erfüllt F

$$|F(r)| \leq Ce^{-cr\cos\varphi}, \quad r > M.$$

Die Funktion H

$$H(z) = \int_0^\infty F(r) e^{irze^{i\varphi}} dr$$

ist daher analytisch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) > -\operatorname{Re}(z) \tan\varphi - c$. Außerdem gilt für alle $x > \max(|a|, |c|)$

$$\begin{aligned} H(ix) &= \int_0^\infty F(r) e^{-xe^{i\varphi}r} dr = \int_0^\infty \int_a^c f(t) e^{-re^{i\varphi}(t+x)} dt\, dr \\ &= \int_a^c f(t) \int_0^\infty e^{-re^{i\varphi}(t+x)} dr\, dt = \int_a^c \frac{e^{-i\varphi} f(t)}{t+x} dt = e^{-i\varphi} h(ix). \end{aligned}$$

Mit dem Identitätssatz folgt nun die Behauptung. □

Lemma 3.5.4. *Sei $c \in (a, \infty)$ und V_L ein Volterra-Integraloperator auf $L^1(a, c)$ mit beschränktem Kern L*

$$V_L f(x) = \int_a^x L(x, y) f(y) dy, \quad x \in (a, c),\ f \in L^1(a, c).$$

Dann gilt $\sigma(V_L) = \{0\}$.

Beweis. Sei $C \in \mathbb{R}$ eine Schranke von $|L|$, also $|L(x, y)| \le C$, für fast alle x, $y \in (a, c)$. Wir zeigen induktiv, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$|V_L^n f(x)| \le C^n \|f\|_1 \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad x \in (a, c),\ f \in L^1(a, c)$$

gilt. Für $n = 1$ gilt die Behauptung, da

$$\begin{aligned} |V_L f(x)| &\le \int_a^x |L(x, y)|\, |f(y)|\, dy \\ &\le C \int_a^c |f(y)|\, dy = C\|f\|_1, \quad x \in (a, c),\ f \in L^1(a, c). \end{aligned}$$

Ist $n > 1$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} |V_L^n f(x)| &\le \int_a^x |L(x, y)|\, \left|V_L^{n-1} f(y)\right| dy \le C^n \|f\|_1 \int_a^x \frac{(y-a)^{n-2}}{(n-2)!} dy \\ &= C^n \|f\|_1 \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad x \in (a, c),\ f \in L^1(a, c). \end{aligned}$$

Es gilt dann also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|V_L^n f\|_1 &= \int_a^c |V_L^n f(x)|\, dx \le C^n \|f\|_1 \int_a^c \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} dx \\ &= C^n \|f\|_1 \frac{(c-a)^n}{n!}, \quad f \in L^1(a, c) \end{aligned}$$

und damit

$$\|V_L^n\| \le C^n \frac{(c-a)^n}{n!}.$$

Wegen

$$\sqrt[n]{\|V_L^n\|} \to 0,$$

für $n \to \infty$ verschwindet der Spektralradius von V_L. Da das Spektrum nicht leer ist, folgt damit die Behauptung. □

Der folgende lokale Eindeutigkeitssatz zeigt, wann die zwei Operatoren S_1 und S_2 lokal um den Randpunkt a übereinstimmen.

SATZ 3.5.5. *Für $c \in (a, b_1) \cap (a, b_2)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Es gilt $\alpha_1 = \alpha_2$ und $q_1(x) = q_2(x)$ für fast alle $x \in (a, c)$.*

(b) *Für alle $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt*

$$m_1(z) - m_2(z) = o\left(e^{-2(c-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right), \quad \text{für } |z| \to \infty \text{ in } K_\delta.$$

(c) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\varphi \in (0, \pi)$, sodass*

$$m_1\left(re^{i\varphi}\right) - m_2\left(re^{i\varphi}\right) = \mathcal{O}\left(e^{-2(c-a-\varepsilon)\operatorname{Re}\sqrt{-re^{i\varphi}}}\right), \quad \text{für } r \to \infty.$$

BEWEIS. Wir zeigen zuerst die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b). Aus (a) folgt mit Satz 3.5.2

$$p_{1,z}(a) - p_{2,z}(a) = o\left(e^{-2(c-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right), \quad \text{für } |z| \to \infty \text{ in } K_\delta.$$

Im Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ folgt daraus sofort (b). Ist $\alpha := \alpha_1 = \alpha_2 \in (0, \pi)$, so folgt aus Gleichung (3.2) unmittelbar

$$(*) \quad m_1(z) - m_2(z) = \frac{p_{2,z}(a) - p_{1,z}(a)}{\sin^2\alpha\,(p_{1,z}(a) + \cot\alpha)\,(p_{2,z}(a) + \cot\alpha)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Außerdem folgert man aus Satz 3.4.7, dass

$$|p_{i,z}(a) + \cot\alpha|^{-1} < \sin\alpha, \quad z \in K_\delta,\ |z| > M_1,\ i \in \{1, 2\},$$

für ein geeignetes $M_1 \in \mathbb{R}$, $M_1 > 0$. Zusammen mit $(*)$ erhält man auch in diesem Fall

$$m_1(z) - m_2(z) = o\left(e^{-2(c-a)\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right), \quad \text{für } |z| \to \infty \text{ in } K_\delta.$$

Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) ist offensichtlich. Es bleibt also (c) $\Rightarrow$ (a) zu zeigen. Aus (c) folgt wegen Satz 3.4.7 und Satz 3.4.9 notwendigerweise $\alpha_1 = \alpha_2$. Wir zeigen (a) zunächst im Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Ist nun $\varepsilon \in (0, c-a)$ und $\tilde{c} = c - \varepsilon$, so gilt nach Voraussetzung

$$(**) \qquad m_1\left(re^{i\varphi}\right) - m_2\left(re^{i\varphi}\right) = \mathcal{O}\left(e^{-2(\tilde{c}-a)\operatorname{Re}\sqrt{-re^{i\varphi}}}\right), \quad \text{für } r \to \infty$$

für ein $\varphi \in (0, \pi)$. Wegen Satz 3.5.2 können wir annehmen, dass $b_1 = b_2 = \infty$ gilt und die Potentiale q_1 und q_2 außerhalb von $[a, \tilde{c}]$ verschwinden ohne diese Eigenschaft zu verlieren. Seien nun K_1 und K_2 Kerne zu τ_1 und τ_2, wie aus Lemma 3.3.1 und für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $f_{1,z} = V_{K_1}\psi_z^0$ und $f_{2,z} = V_{K_2}\psi_z^0$ die Jost-Lösungen, wie in Satz 3.3.3. Da τ_1 und τ_2 bei ∞ im Grenzpunktfall sind und die Lösungen $f_{1,z}$ und $f_{2,z}$ in $L^2(a, \infty)$ liegen, sind sie für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ skalare Vielfache der Weyl-Lösungen. Damit gilt

$$p_{i,z}(x) = \frac{\psi_{i,z}'(x)}{\psi_{i,z}(x)} = \frac{f_{i,z}'(x)}{f_{i,z}(x)}, \quad x \in [a, \infty),\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\ i \in \{1, 2\}.$$

Weiters gilt für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ für die Lösungen $f_{1,z}$ und $f_{2,z}$

$$f_{1,z}(x) f_{2,z}(x) = e^{-2(x-a)\sqrt{-z}} + \int_x^\infty L(x,t) e^{-2(t-a)\sqrt{-z}}\,dt, \quad x \in [a, \infty),$$

wobei L gegeben ist, durch

$$L(x,y) = 2K_1(x,2y-x) + 2K_2(x,2y-x) + \\ + 2\int_x^{2y-x} K_1(x,t)K_2(x,2y-t)dt, \quad x \in [a,\infty),\ y \geq x,$$

wie man durch Einsetzen und eine Substitution sieht. Aus Korollar 3.3.2 sieht man, dass $L(x,y)$ verschwindet, falls nur $y > 2\tilde{c} - x$, woraus auch folgt, dass L beschränkt ist. Setzt man

$$\Delta q(x) = q_1(x) - q_2(x), \quad x \in (a,\infty),$$

so erhält man für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_a^{\tilde{c}} \Delta q(x) f_{1,z}(x) f_{2,z}(x) dx &= \int_a^{\tilde{c}} \Delta q(x) e^{-2(x-a)\sqrt{-z}} dx + \\ &\quad + \int_a^{\tilde{c}} \Delta q(x) \int_x^{2\tilde{c}-x} L(x,y) e^{-2(y-a)\sqrt{-z}} dy\, dx \\ &= \int_a^{\tilde{c}} \left(\Delta q(x) + \int_a^x L(x,y)\Delta q(y) dy \right) e^{-2(x-a)\sqrt{-z}} dx + \\ &\quad + \int_a^{\tilde{c}} \Delta q(x) \int_{\tilde{c}}^{2\tilde{c}-x} L(x,y) e^{-2(y-a)\sqrt{-z}} dy\, dx,\end{aligned}$$

indem man das innere Integral in der zweiten Zeile bei $\tilde{c}$ aufspaltet und anschließend die Integrationsreihenfolge vertauscht. Andererseits gilt

$$W(f_{1,z}, f_{2,z})'(x) = -\Delta q(x) f_{1,z}(x) f_{2,z}(x), \quad x \in (a,\infty)$$

und daher

$$\begin{aligned}\int_a^{\tilde{c}} \Delta q(x) f_{1,z}(x) f_{2,z}(x) dx &= \left[-W(f_{1,z}, f_{2,z})(x)\right]_{x=a}^{\tilde{c}} = \\ &= \left[(p_{1,z}(x) - p_{2,z}(x))\, f_{1,z}(x) f_{2,z}(x)\right]_{x=a}^{\tilde{c}} \\ &= (p_{1,z}(\tilde{c}) - p_{2,z}(\tilde{c}))\, f_{1,z}(\tilde{c}) f_{2,z}(\tilde{c}) - (m_1(z) - m_2(z))\, f_{1,z}(a) f_{2,z}(a).\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von Proposition 3.4.8, Satz 3.3.3 und $(**)$ erhält man damit zusammen

$$\begin{aligned}&\left| \int_a^{\tilde{c}} \left(\Delta q(x) + \int_a^x L(x,y)\Delta q(y) dy \right) e^{-2(x-a)\sqrt{-re^{i\varphi}}} dx \right| \leq \\ &\leq \left| p_{1,re^{i\varphi}}(\tilde{c}) - p_{2,re^{i\varphi}}(\tilde{c}) \right| \left| f_{1,re^{i\varphi}}(\tilde{c}) \right| \left| f_{2,re^{i\varphi}}(\tilde{c}) \right| + \\ &\quad + \left| m_1\left(re^{i\varphi}\right) - m_2\left(re^{i\varphi}\right) \right| \left| f_{1,re^{i\varphi}}(a) \right| \left| f_{2,re^{i\varphi}}(a) \right| \\ &\quad + \left| \int_a^{\tilde{c}} \Delta q(x) \int_{\tilde{c}}^{2\tilde{c}-x} L(x,y) e^{-2(y-a)\sqrt{-re^{i\varphi}}} dy\, dx \right| \\ &\leq C_1 e^{-2(\tilde{c}-a)\operatorname{Re}\sqrt{-re^{i\varphi}}}, \quad r > M_1\end{aligned}$$

für bestimmte Konstanten C_1, $M_1 \in \mathbb{R}$, $M_1 > 0$. Damit folgt mit Lemma 3.5.3

$$q_1(x) - q_2(x) + \int_a^x L(x,y)\left(q_1(y) - q_2(y)\right) dy = 0$$

für fast alle $x \in (a,\tilde{c})$ und daraus mit Lemma 3.5.4, $q_1(x) = q_2(x)$ für fast alle $x \in (a,\tilde{c})$. Da $\tilde{c}$ beliebig nahe bei c gewählt werden kann, folgt $q_1(x) = q_2(x)$

für fast alle $x \in (a,c)$. Um (a) auch im Fall $\alpha := \alpha_1 = \alpha_2 \in (0,\pi)$ einzusehen, sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus Satz 3.4.7 folgt dann

$$|p_{i,z}(a) + \cot\alpha| \leq C_1 \left|\sqrt{-z}\right|, \quad z \in K_\delta,\ |z| > M_1,\ i \in \{1,2\}$$

für geeignete Konstanten $C_1,\ M_1 \in \mathbb{R}$. Zusammen mit $(*)$ erhält man

$$|p_{1,z}(a) - p_{2,z}(a)| \leq \sin^2\alpha\, C_1^2 |z|\, |m_1(z) - m_2(z)|, \quad z \in K_\delta,\ |z| > M_1$$

und damit, mit der Voraussetzung aus (c)

$$\left|p_{1,re^{i\varphi}}(a) - p_{2,re^{i\varphi}}(a)\right| \leq C_2 e^{-2(c-a-\varepsilon)\mathrm{Re}\sqrt{-re^{i\varphi}}}, \quad r > M_2$$

für geeignete Zahlen $\varphi \in (0,\pi)$ und $C_2,\ M_2 \in \mathbb{R},\ M_2 > 0$. Aus dem bereits gezeigten Fall folgt damit $q_1(x) = q_2(x)$ für fast alle $x \in (a,c)$. □

Als einfache Folgerung dieses Satzes zeigen wir nun, dass die m-Funktion den Differentialausdruck und die konkrete selbstadjungierte Realisierung eindeutig bestimmt.

Satz 3.5.6. *Existiert für jedes $c \in (a,b_1) \cap (a,b_2)$ ein $\varphi \in (0,\pi)$, sodass*

$$m_1\left(re^{i\varphi}\right) - m_2\left(re^{i\varphi}\right) = \mathcal{O}\left(e^{-2(c-a)\mathrm{Re}\sqrt{-re^{i\varphi}}}\right),$$

für $r \to \infty$ und gilt zusätzlich

$$m_1(z_0) = m_2(z_0)$$

für ein $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, so gilt bereits $b_1 = b_2$, $q_1 = q_2$ und $S_1 = S_2$.

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b_1 \leq b_2$ voraussetzen. Nach Satz 3.5.5 gilt dann $\alpha_1 = \alpha_2$ und $q_1(x) = q_2(x)$ für fast alle $x \in (a,b_1)$. Also stimmen auch die Fundamentalsysteme $\theta_{1,z}$, $\phi_{1,z}$ und $\theta_{2,z}$, $\phi_{2,z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ auf (a,b_1) überein. Wegen $m_1(z_0) = m_2(z_0)$ gilt dann auch $\psi_{1,z_0}(x) = \psi_{2,z_0}(x)$ für $x \in (a,b_1)$. Wäre nun $b_1 < b_2$, so wäre τ_1 regulär bei b_1. Die Weyl-Lösung ψ_{1,z_0} erfüllt also eine Randbedingung bei b_1. Wegen $\psi_{1,z_0}(b_1) = \psi_{2,z_0}(b_1)$ wäre dann aber $\psi_{2,z_0}|_{(b_1,b_2)}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert z_0 einer selbstadjungierten Realisierung von $\tau_2|_{(b_1,b_2)}$. Es gilt also $b_1 = b_2$ und damit $q_1 = q_2$. Ist τ_1 und damit τ_2 bei b_1 im Grenzpunktfall, so gilt bereits $S_1 = S_2$. Ist τ_1 bei b im Grenzkreisfall, so folgt aus $W(\psi_{1,z_0},\psi_{2,z_0})(b_1) = 0$ mit Proposition 2.3.3, dass auch die Randbedingungen bei b_1 gleich sind, also $S_1 = S_2$. □

Korollar 3.5.7. *Falls*

$$m_1(z) = m_2(z), \quad z \in \mathbb{C}^+$$

so gilt bereits $b_1 = b_2$, $q_1 = q_2$ und $S_1 = S_2$.

Da die Funktionen m_1 und m_2 analytisch sind, genügt es natürlich auch, dass m_1 und m_2 auf einer Folge von Punkten aus $\mathbb{C}^+$ übereinstimmen, die sich in $\mathbb{C}^+$ häufen.

Betrachtet man nur reguläre Sturm-Liouville Differentialausdrücke auf einem festen Intervall, so kann man die Voraussetzung in Satz 3.5.6, dass die m-Funktionen an einem beliebigen Punkt übereinstimmen, durch eine elegantere Voraussetzung ersetzen. Seien dazu im Folgenden τ_1 und τ_2 reguläre Sturm-Liouville Differentialausdrücke auf dem selben Intervall (a,b), also $b := b_1 = b_2 < \infty$ und $q_1,\ q_2 \in L^1(a,b)$. In diesem Fall existieren eindeutige

Zahlen $\beta_1,\ \beta_2 \in (0,\pi)$, sodass die Funktionen aus den Definitionsbereichen der selbstadjungierten Realisierungen S_1 und S_2 die Randbedingungen

$$f(b)\cos\beta_i - f'(b)\sin\beta_i = 0, \quad f \in \mathcal{D}\left(S_i\right),\ i \in \{1,2\}$$

bei b erfüllen. Genügen die Weyl-Titchmarsh m-Funktionen m_1 und m_2 dann für ein $\varphi \in (0,\pi)$ der Abschätzung

$$m_1\left(re^{i\varphi}\right) - m_2\left(re^{i\varphi}\right) = o\left(e^{-2(b-a)\operatorname{Re}\sqrt{-re^{i\varphi}}}\right),$$

für $r \to \infty$, so gilt bereits $q_1 = q_2$ und $S_1 = S_2$. Aus dem bereits Gezeigten folgt nämlich unmittelbar, dass in diesem Fall sowohl die Potentiale q_1 und q_2, als auch die Randbedingungen bei a übereinstimmen. Dass auch bei b die selben Randbedingungen vorliegen, also $\beta_1 = \beta_2$, folgt aus der Gleichung

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{m_1\left(re^{i\varphi}\right) - m_2\left(re^{i\varphi}\right)}{e^{-2(b-a)\sqrt{-re^{i\varphi}}}}\right| = \begin{cases} 4\left|\cot\beta_1 - \cot\beta_2\right|, & \text{falls } \beta_1,\ \beta_2 \in (0,\pi) \\ 0, & \text{falls } \beta_1 = \beta_2 = 0 \\ \infty, & \text{sonst,} \end{cases}$$

welche in diesem Fall gilt. Da wir diesen Eindeutigkeitssatz für reguläre Sturm-Liouville Operatoren im Folgenden nicht brauchen werden, verweisen wir für Beweise dieser Gleichung auf [45] Theorem 1.3 und [47] Remark 2.10.

KAPITEL 4

Direkte und inverse Spektraltheorie im regulären Fall

4.1. Spektraltheorie im regulären Fall

Sei τ in diesem Abschnitt ein regulärer Sturm-Liouville Differentialausdruck auf dem Intervall $(0,\pi)$ mit Potential $q \in L^1(0,\pi)$ und S eine selbstadjungierte Realisierung von τ mit getrennten Randbedingungen. Es existieren daher eindeutige Zahlen $\alpha,\ \beta \in [0,\pi)$, sodass S durch die Randbedingungen

$$\begin{aligned} f(0)\cos\alpha - f'(0)\sin\alpha &= 0, \\ f(\pi)\cos\beta - f'(\pi)\sin\beta &= 0, \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{D}\,(S)$ bestimmt ist. Nach Korollar 2.5.2 besteht das Spektrum $\sigma\,(S)$ aus einfachen, isolierten Eigenwerten, die wegen Proposition 2.1.11 nach unten beschränkt sind. Wir bezeichnen daher im Folgenden mit λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ die aufsteigend sortierten Eigenwerte von S. Weiters sei, wie in Abschnitt 3.1 für jedes $z \in \mathbb{C}$, θ_z, ϕ_z das Fundamentalsystem von $(\tau - z)u = 0$ mit den Anfangswerten

$$\theta_z(a) = \phi_z'(a) = \cos\alpha \quad \text{und} \quad -\theta_z'(a) = \phi_z(a) = \sin\alpha.$$

Da die Funktionen ϕ_z, $z \in \mathbb{C}$ die Randbedingung bei 0 erfüllen, ist eine Zahl $z \in \mathbb{C}$, wegen der Eindeutigkeit von Lösungen genau dann ein Eigenwert von S, wenn ϕ_z zusätzlich auch die Randbedingung bei π erfüllt. Weil $\sigma\,(S)$ nur aus Eigenwerten besteht, gilt also

$$z \in \sigma\,(S) \quad \Leftrightarrow \quad \phi_z(\pi)\cos\beta - \phi_z'(\pi)\sin\beta = 0.$$

Die Eigenwerte von S sind also genau die Nullstellen der ganzen Funktion

$$\omega(z) = \phi_z(\pi)\cos\beta - \phi_z'(\pi)\sin\beta, \quad z \in \mathbb{C}.$$

In diesem Fall ist dann die Funktion ϕ_z die, bis auf skalare Vielfache eindeutige Eigenfunktion zu z. Die Funktionen $\phi_n = \phi_{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ bilden daher ein vollständiges Orthogonalsystem aus Eigenvektoren von S.

Bezeichnet man mit m die Weyl-Titchmarsh m-Funktion von S, wie in Abschnitt 3.1, so erfüllen die Funktionen $\theta_z + m(z)\phi_z$ für alle $z \in \varrho(S)$ die Randbedingung bei π. Daraus erhält man, dass sich die Funktion m als

$$m(z) = -\frac{\theta_z(\pi)\cos\beta - \theta_z'(\pi)\sin\beta}{\phi_z(\pi)\cos\beta - \phi_z'(\pi)\sin\beta}, \quad z \in \varrho(S)$$

darstellen lässt. Als Quotient zweier ganzer Funktionen ist m meromorph. Da für jedes $z \in \sigma\,(S)$ der Nenner, nicht aber der Zähler verschwindet sind die Pole von m genau die Eigenwerte von S.

Ist ρ das Spektralmaß von m, wie in Abschnitt 3.2, so folgt aus Proposition 3.2.5, dass

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \|\phi_n\|^{-2} \delta_{\lambda_n},$$

wobei für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, δ_{λ_n} das Dirac-Maß im Punkt λ_n ist. Die Fouriertransformierte $\mathcal{F}f$ einer Funktion $f \in L^2(0,\pi)$ ist in diesem Fall

$$\mathcal{F}f(\lambda_n) = \int_0^\pi f(t)\phi_n(t)dt = (f, \phi_n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dass die Fouriertransformation eine surjektive Isometrie ist und die Parseval'sche Gleichung

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\overline{g(t)}dt &= \int_{\sigma(S)} \mathcal{F}f(\lambda)\,\overline{\mathcal{F}g(\lambda)}\,d\rho(\lambda) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \|\phi_n\|^{-2}\,\mathcal{F}f(\lambda_n)\,\overline{\mathcal{F}g(\lambda_n)}, \quad f,g \in L^2(0,\pi)\end{aligned}$$

gilt, folgt in diesem Fall auch sofort daraus, dass die Funktionen ϕ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ ein vollständiges Orthogonalsystem bilden.

Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ und u_n ein normierter Eigenvektor zu λ_n. Wir setzen

$$\kappa_n = \begin{cases} |u_n(0)|^{-2}, & \text{falls } \alpha \in (0,\pi) \\ |u_n'(0)|^{-2}, & \text{falls } \alpha = 0. \end{cases}$$

Da sich normierte Eigenvektoren nur um einen skalaren Faktor mit Betrag Eins unterscheiden, sind diese Zahlen wohldefiniert. Die Zahlen κ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ nennen wir die Normierungskonstanten von S. Da auch die Funktionen ϕ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ Eigenvektoren sind, sieht man, dass

$$\kappa_n = \begin{cases} \|\phi_n\|^2 \sin^{-2}\alpha, & \text{falls } \alpha \in (0,\pi) \\ \|\phi_n\|^2, & \text{falls } \alpha = 0 \end{cases}$$

gilt. Die Folge $(\lambda_n, \kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nennen wir die Spektraldaten von S.

Das folgende Beispiel stellt nicht nur eine Illustration der eingeführten Begriffe dar, wir werden diese Operatoren auch in den nächsten Abschnitten benötigen. Es wird sich zeigen, dass viele Eigenschaften dieser Operatoren auch für allgemeine reguläre Sturm-Liouville Operatoren gelten.

Beispiel 4.1.1. Wir betrachten den regulären Sturm-Liouville Differentialausdruck τ^0 auf $(0,\pi)$ mit dem Potential $q^0 = 0$. Speziell interessieren wir uns für die selbstadjungierten Realisierungen S_a^0, S_b^0, S_c^0 und S_d^0 von τ^0 mit den jeweiligen Randbedingungen

(a)	$f'(0) = 0$	und	$f'(\pi) = 0,$	$f \in \mathcal{D}\left(S_a^0\right),$
(b)	$f'(0) = 0$	und	$f(\pi) = 0,$	$f \in \mathcal{D}\left(S_b^0\right),$
(c)	$f(0) = 0$	und	$f'(\pi) = 0,$	$f \in \mathcal{D}\left(S_c^0\right),$
(d)	$f(0) = 0$	und	$f(\pi) = 0,$	$f \in \mathcal{D}\left(S_d^0\right).$

Die entsprechenden Lösungen $\phi^0_{a,z}$, $\phi^0_{b,z}$, $\phi^0_{c,z}$ und $\phi^0_{d,z}$, $z \in \mathbb{C}$, welche die Randbedingung bei 0 erfüllen sind dann gegeben durch

$$\phi^0_{a,z}(x) = \phi^0_{b,z}(x) = \cos\sqrt{z}x, \quad x \in [0,\pi],\ z \in \mathbb{C}$$

und

$$\phi^0_{c,z}(x) = \phi^0_{d,z}(x) = \frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}}, \quad x \in [0,\pi],\ z \in \mathbb{C},$$

wobei die letzteren Funktionen für $z = 0$ als

$$\phi^0_{c,0}(x) = \phi^0_{d,0}(x) = x, \quad x \in [0,\pi]$$

zu interpretieren sind. Die Eigenwerte dieser Operatoren sind damit genau die Nullstellen der ganzen Funktionen ω^0_a, ω^0_b, ω^0_c und ω^0_d

$$\begin{aligned}
&\omega^0_a(z) = z\,\frac{\sin\sqrt{z}\pi}{\sqrt{z}}, && \omega^0_b(z) = \cos\sqrt{z}\pi, && z \in \mathbb{C},\\
&\omega^0_c(z) = -\cos\sqrt{z}\pi, && \omega^0_d(z) = \frac{\sin\sqrt{z}\pi}{\sqrt{z}}, && z \in \mathbb{C},
\end{aligned}$$

also genau die Zahlen

$$\begin{aligned}
&\lambda^0_{a,n} = n^2, && \lambda^0_{b,n} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, && n \in \mathbb{N}_0,\\
&\lambda^0_{c,n} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, && \lambda^0_{d,n} = (n+1)^2, && n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind die Funktionen

$$\begin{aligned}
&\phi^0_{a,n}(x) = \cos nx, && \phi^0_{b,n}(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x, && x \in [0,\pi],\ n \in \mathbb{N}_0,\\
&\phi^0_{c,n}(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{n + \frac{1}{2}}, && \phi^0_{d,n}(x) = \frac{\sin(n+1)\,x}{n+1}, && x \in [0,\pi],\ n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Für die Normierungskonstanten erhält man damit

$$\kappa^0_{a,n} = \begin{cases} \pi, & \text{falls } n = 0\\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

und

$$\kappa^0_{b,n} = \lambda^0_{c,n}\kappa^0_{c,n} = \lambda^0_{d,n}\kappa^0_{d,n} = \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Fourierentwicklungen bezüglich der Eigenfunktionen dieser Operatoren sind also die gewöhnlichen Fourierentwicklungen bezüglich der Winkelfunktionen. Beispielsweise ist die Entwicklung einer Funktion $f \in L^2(0,\pi)$ bezüglich der Eigenfunktionen des Operators S^0_a

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt + \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt\ \cos nx, \quad x \in (0,\pi),$$

wobei diese Reihe in $L^2(0,\pi)$ konvergiert.

4.2. Asymptotik der Spektraldaten

Unter den Voraussetzungen von Abschnitt 4.1 wollen wir in diesem Abschnitt das asymptotische Verhalten der Spektraldaten des Operators S untersuchen. Dazu bezeichnen wir mit λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ wieder die aufsteigend sortierten Eigenwerte von S und mit κ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ die Normierungskonstanten. Wir untersuchen zunächst das asymptotische Verhalten der Lösungen ϕ_z für $|z| \to \infty$ in $\mathbb{C}$.

Lemma 4.2.1. *Für die Lösungen ϕ_z gilt*

$$\phi_z(x) = \sin\alpha \cos\sqrt{z}x + \mathcal{O}\left(\frac{e^{\sqrt{-z}x}}{\sqrt{z}}\right)$$
$$\phi_z'(x) = -\sin\alpha\sqrt{z}\sin\sqrt{z}x + \mathcal{O}\left(e^{\sqrt{-z}x}\right)$$

gleichmäßig für alle $x \in [0,\pi]$, für $|z| \to \infty$ in $\mathbb{C}$. Ist $\alpha = 0$, so gilt sogar

$$\phi_z(x) = \frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{\sqrt{-z}x}}{z}\right)$$
$$\phi_z'(x) = \cos\sqrt{z}x + \mathcal{O}\left(\frac{e^{\sqrt{-z}x}}{\sqrt{z}}\right)$$

gleichmäßig für alle $x \in [0,\pi]$, für $|z| \to \infty$ in $\mathbb{C}$.

Beweis. Da die Funktion ϕ_z für jedes $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung von

$$\left(\tau^0 - z\right) u = -q\phi_z$$

ist, folgt aus Proposition 1.2.5 und den Additionstheoremen der Winkelfunktionen

$$(*) \qquad \phi_z(x) = \sin\alpha\cos\sqrt{z}x + \cos\alpha\frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}} + \\ + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{z}(x-t)}{\sqrt{z}} q(t)\phi_z(t)dt, \quad x \in [0,\pi],$$

$$(**) \qquad \phi_z'(x) = -\sin\alpha\,\sqrt{z}\,\sin\sqrt{z}x + \cos\alpha\,\cos\sqrt{z}x + \\ + \int_0^x \cos\sqrt{z}(x-t)\; q(t)\phi_z(t)dt, \quad x \in [0,\pi].$$

Setzt man für jedes $z \in \mathbb{C}$, $f_z(x) = \phi_z(x)e^{-\sqrt{-z}x}$, $x \in [0,\pi]$, so folgt aus $(*)$

$$|f_z(x)| \le \left|\sin\alpha\,\cos\sqrt{z}x\; e^{-\sqrt{-z}x}\right| + \left|\cos\alpha\frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}}e^{-\sqrt{-z}x}\right| + \\ + \int_0^\pi \left|\frac{\sin\sqrt{z}(x-t)}{\sqrt{z}}q(t)f_z(t)e^{-\sqrt{-z}(x-t)}\right| dt \\ \le |\sin\alpha| + \frac{|\cos\alpha|}{\sqrt{|z|}} + \frac{\|q\|_1}{\sqrt{|z|}}\max_{t\in[0,\pi]}|f_z(t)|, \quad x \in [0,\pi],$$

wobei $\|\cdot\|_1$ die Norm auf $L^1(0,\pi)$ ist. Falls $|z| > \|q\|_1^2$, so folgt

$$\max_{t\in[0,\pi]}|f_z(t)| \le \left(|\sin\alpha| + \frac{|\cos\alpha|}{\sqrt{|z|}}\right)\left(1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{|z|}}\right)^{-1}$$

und daraus

$$|\phi_z(x)| \le Ce^{\mathrm{Re}\sqrt{-z}x}, \quad x \in [0,\pi],\ z \in \mathbb{C},\ |z| > R$$

für Konstanten C, $R \in \mathbb{R}$. Setzt man diese Abschätzung in $(*)$ und $(**)$ ein, so folgt die erste Behauptung. Insbesondere erhält man im Fall $\alpha = 0$

$$\phi_z(x) = \mathcal{O}\left(\frac{e^{\sqrt{-z}x}}{\sqrt{z}}\right)$$

gleichmäßig in $x \in [0,\pi]$, für $|z| \to \infty$ in $\mathbb{C}$. Setzt man das erneut in die obigen Gleichungen ein, so folgt die restliche Behauptung. $\square$

Um nun das asymptotische Verhalten der Eigenwerte von S zu untersuchen verwenden wir die ganze Funktion ω aus Abschnitt 4.1, deren Nullstellen genau die Eigenwerte von S sind. Wir unterscheiden dabei die vier möglichen Fälle

(4.1a) falls $\alpha \neq 0 \neq \beta$,

(4.1b) falls $\alpha \neq 0 = \beta$,

(4.1c) falls $\alpha = 0 \neq \beta$,

(4.1d) falls $\alpha = 0 = \beta$.

Lemma 4.2.2. *Für die Funktion ω gilt*

$$\omega(z) = -\sin\alpha\,\sin\beta\, z\,\frac{\sin\sqrt{z}\pi}{\sqrt{z}} + \mathcal{O}\left(e^{\sqrt{-z}\pi}\right), \qquad \textit{falls } \alpha \neq 0 \neq \beta,$$

$$\omega(z) = \sin\alpha\,\cos\sqrt{z}\pi + \mathcal{O}\left(\frac{e^{\sqrt{-z}\pi}}{\sqrt{-z}}\right), \qquad \textit{falls } \alpha \neq 0 = \beta,$$

$$\omega(z) = -\sin\beta\,\cos\sqrt{z}\pi + \mathcal{O}\left(\frac{e^{\sqrt{-z}\pi}}{\sqrt{-z}}\right), \qquad \textit{falls } \alpha = 0 \neq \beta,$$

$$\omega(z) = \frac{\sin\sqrt{z}\pi}{\sqrt{z}} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{\sqrt{-z}\pi}}{z}\right), \qquad \textit{falls } \alpha = 0 = \beta,$$

für $|z| \to \infty$ in $\mathbb{C}$.

Beweis. Die Behauptung folgt durch Einsetzen der Ergebnisse aus Lemma 4.2.1 in die Definition von ω. $\square$

Man sieht, dass der Hauptterm in der Abschätzung von ω in Lemma 4.2.2, im wesentlichen die entsprechende Funktion ω_a^0, ω_b^0, ω_c^0 oder ω_d^0 aus Beispiel 4.1.1 ist. Wir werden im Folgenden sehen, dass sich daher auch die Nullstellen dieser Funktionen, zumindest asymptotisch ähnlich verhalten. Wir zeigen zunächst eine grobe Abschätzung für die Eigenwerte.

Lemma 4.2.3. *Für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$n - \frac{1}{2} \le \sqrt{\lambda_n} < n + \frac{1}{2}, \qquad \textit{falls } \alpha \neq 0 \neq \beta,$$

$$n \le \sqrt{\lambda_n} < n + 1, \qquad \textit{falls } \alpha \neq 0 = \beta \textit{ oder } \alpha = 0 \neq \beta,$$

$$n + \frac{1}{2} \le \sqrt{\lambda_n} < n + \frac{3}{2}, \qquad \textit{falls } \alpha = 0 = \beta.$$

Beweis. Da die Beweise in allen vier Fällen ähnlich sind, zeigen wir die Behauptung nur im Fall $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Aus Satz 1.2.7 oder der Produktdarstellung der Sinusfunktion sieht man, dass die Funktion H

$$H(z) = \sin\alpha \sin\beta \sqrt{z} \sin\sqrt{z}\pi, \quad z \in \mathbb{C}$$

analytisch ist. Die Nullstellen von H sind einfach und genau die Punkte n^2, $n \in \mathbb{N}_0$. Nach Lemma 4.2.2 folgt die Existenz von Konstanten C, $R \in \mathbb{R}$, sodass

$$(*) \qquad |\omega(z) + H(z)| \leq C \left| e^{\sqrt{-z}\pi} \right|, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| > R.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $D_n \subseteq \mathbb{C}$ die Kugel mit Radius

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$$

um den Ursprung. Um den Satz von Rouché anwenden zu können, werden wir die Funktion $|H|$ auf dem Rand von D_n nach unten abschätzen. Sei dazu für jedes $k \in \mathbb{Z}$, $U_k \subseteq \mathbb{C}$ die Kugel um $k\pi$ mit Radius $\pi/8$ und U die Vereinigung aller dieser Kugeln. Wegen der Abschätzung

$$\left| \frac{\sin z}{e^{-iz}} \right| = \frac{\left|1 - e^{2iz}\right|}{2} \geq \frac{1 - e^{-2\operatorname{Im}(z)}}{2} > \frac{1 - e^{-2}}{2}, \quad z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}(z) > 1$$

und da diese Funktion stetig ist und auf $\overline{\mathbb{C}^+} \backslash U$ nicht verschwindet, folgt

$$\left| \frac{\sin z}{e^{-iz}} \right| > C_1 > 0, \quad z \in \overline{\mathbb{C}^+} \backslash U,\ -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2},$$

für eine positive Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$. Aus der Periodizität folgt diese Abschätzung auch für alle $z \in \overline{\mathbb{C}^+} \backslash U$ und daraus für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\left| e^{\sqrt{-z}\pi} \right| < C_1^{-1} \left| \sin\sqrt{z}\pi \right| \leq \frac{C_2}{\sqrt{|z|}} \left| H(z) \right|, \quad z \in \partial D_n$$

für eine Konstante $C_2 \in \mathbb{R}$. Ist nun n und damit $\sqrt{|z|}$ groß genug, so folgt zusammen mit $(*)$

$$|\omega(z) + H(z)| < |H(z)|, \quad z \in \partial D_n$$

und daher mit dem Satz von Rouché, dass ω in D_n genausoviele Nullstellen hat wie H, also $n+1$. Ist also n groß genug so liegt der Eigenwert λ_n in D_n aber nicht in D_{n-1}, was genau die Behauptung im Fall $\alpha \neq 0 \neq \beta$ ist. □

Satz 4.2.4. *Die Eigenwerte von S erfüllen*

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt + \cot\alpha - \cot\beta}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{falls } \alpha \neq 0 \neq \beta,$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt + \cot\alpha}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{falls } \alpha \neq 0 = \beta,$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt - \cot\beta}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{falls } \alpha = 0 \neq \beta,$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + 1 + \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt}{(n+1)\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{falls } \alpha = 0 = \beta,$$

für $n \to \infty$.

Beweis. Wir behandeln wieder nur den Fall $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Mit der Darstellung der Funktionen ϕ_z, $z \in \mathbb{C}$ aus dem Beweis von Lemma 4.2.1 folgt für alle Eigenwerte λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$

$$(*) \qquad 0 = \omega(\lambda_n) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\pi + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\pi, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei

$$\begin{aligned} A_n &= \cot\beta - \cot\alpha - \frac{\cot\beta}{\sin\alpha}\int_0^\pi \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}} q(t)\phi_{\lambda_n}(t)dt + \\ &\qquad - \frac{1}{\sin\alpha}\int_0^\pi \cos\sqrt{\lambda_n}t\; q(t)\phi_{\lambda_n}(t)dt, \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ B_n &= \frac{\cot\alpha\cot\beta}{\sqrt{\lambda_n}} + \sqrt{\lambda_n} + \frac{\cot\beta}{\sin\alpha}\int_0^\pi \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}} q(t)\phi_{\lambda_n}(t)dt + \\ &\qquad - \frac{1}{\sin\alpha}\int_0^\pi \sin\sqrt{\lambda_n}t\; q(t)\phi_{\lambda_n}(t)dt, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Da die Folge A_n beschränkt ist und $|B_n| \to \infty$ falls $n \to \infty$, muss notwendigerweise

$$\sin\sqrt{\lambda_n}\pi \to 0$$

für $n \to \infty$ gelten und daher

$$\sqrt{\lambda_n}\pi - n\pi \to 0$$

für $n \to \infty$. Mit der Abschätzung aus Lemma 4.2.1, elementaren Umformungen der Winkelfunktionen, der groben Abschätzung für λ_n aus Lemma 4.2.3 und dem Lemma von Riemann-Lebesgue folgt

$$\begin{aligned} A_n &= \cot\beta - \cot\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2\sqrt{\lambda_n}t\; q(t)dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \cot\beta - \cot\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt + o(1), \\ B_n &= \sqrt{\lambda_n} + \frac{\cot\alpha\cot\beta}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2\sqrt{\lambda_n}t\; q(t)dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= n + o(1), \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Da $\cos\sqrt{\lambda_n}\pi \neq 0$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$, folgt aus $(*)$

$$\begin{aligned} \tan\sqrt{\lambda_n}\pi &= \frac{\cot\alpha - \cot\beta + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt + o(1)}{n + o(1)} \\ &= \frac{\cot\alpha - \cot\beta + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Mit der Taylorentwicklung der Arkustangensfunktion erhält man

$$\sqrt{\lambda_n}\pi - n\pi = \frac{\cot\alpha - \cot\beta + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

für $n \to \infty$. □

Ist das Potential q sogar quadratisch integrierbar, so erhält man eine bessere Abschätzung der Eigenwerte. Wir führen dazu eine Notation, analog zur Landau-Notation ein. Ist $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ eine Folge komplexer Zahlen, so schreiben wir

$$a_n = \ell^2\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{für } n \to \infty, \quad \text{falls} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n|^2 n^2 < \infty.$$

Das ist äquivalent dazu, dass eine quadratisch summierbare Folge $b_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass

$$a_n = \frac{b_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Korollar 4.2.5. *Ist das Potential sogar quadratisch integrierbar, also $q \in L^2(0,\pi)$, so erfüllen die Eigenwerte von S sogar*

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt + \cot\alpha - \cot\beta}{n\pi} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \textit{falls } \alpha \neq 0 \neq \beta,$$
$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt + \cot\alpha}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \textit{falls } \alpha \neq 0 = \beta,$$
$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt - \cot\beta}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \textit{falls } \alpha = 0 \neq \beta,$$
$$\sqrt{\lambda_n} = n + 1 + \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt}{(n+1)\pi} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \textit{falls } \alpha = 0 = \beta,$$

für $n \to \infty$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung wieder nur im Fall $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Im Beweis von Satz 4.2.4 sind in diesem Fall die Folgen

$$\int_0^\pi \cos 2\sqrt{\lambda_n}t\; q(t)dt \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \sin 2\sqrt{\lambda_n}t\; q(t)dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

sogar quadratisch summierbar, woraus die Behauptung folgt. □

Wir kommen nun zur Asymptotik der Normierungskonstanten. Auch hier werden wir sehen, dass diese sich asymptotisch so verhalten, wie die Normierungskonstanten der entsprechenden Operatoren aus Beispiel 4.1.1.

Satz 4.2.6. *Für die Normierungskonstanten gilt*

$$\kappa_n = \frac{\pi}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \textit{falls } \alpha \in (0,\pi),$$
$$\lambda_n\kappa_n = \frac{\pi}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \textit{falls } \alpha = 0,$$

für $n \to \infty$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung wieder nur im Fall $\alpha \neq 0 \neq \beta$, die restlichen Fälle beweist man ähnlich. Für die Eigenwerte gilt

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{b_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen ist. Daraus, sowie der Darstellung der Funktionen ϕ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ aus dem Beweis von Lemma 4.2.1

und der Taylorentwicklung der Winkelfunktionen folgt

$$\begin{aligned}\frac{\|\phi_n\|^2}{\sin^2\alpha} = \int_0^\pi \cos^2 nx\ dx - \frac{b_n}{n}\int_0^\pi x\sin 2nx\ dx\, + \\ + \frac{\cot\alpha}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^\pi \sin 2nx\ dx + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\int_0^\pi \sin 2nx \int_0^x q(t)dt\, dx\, + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\int_0^\pi\int_0^x q(t)\sin 2n(x-t)\, dt\, dx\, + \\ - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\int_0^\pi\int_0^x q(t)\sin 2nt\, dt\, dx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Wegen

$$\int_0^\pi \cos^2 nx\ dx = \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

bleibt zu zeigen, dass die restlichen Summanden von Ordnung $o\left(\frac{1}{n}\right)$ sind. Der zweite, dritte und vierte Summand ist sogar von Ordnung $\ell^2\left(\frac{1}{n}\right)$. Wegen

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\int_0^x q(t)\sin 2n(x-t)\, dt\, dx &= \int_0^\pi q(t)\int_t^\pi \sin 2n(x-t)\, dx\, dt \\ &= \frac{1}{2n}\int_0^\pi q(t)\left(1-\cos 2n(b-t)\right) dt \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, ist auch der fünfte Summand von der gewünschten Ordnung. Schließlich folgt aus

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\int_0^x q(t)\sin 2nt\, dt\, dx &= \int_0^\pi\int_t^\pi q(t)\sin 2nt\, dx\, dt \\ &= \int_0^\pi q(t)(b-t)\sin 2nt\, dt\end{aligned}$$

und dem Lemma von Riemann-Lebesgue, dass auch der sechste Summand von dieser Ordnung ist. □

KOROLLAR 4.2.7. *Ist das Potential sogar quadratisch integrierbar, also $q \in L^2(0,\pi)$, so gilt sogar*

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \frac{\pi}{2} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right), \quad \textit{falls } \alpha \in (0,\pi), \\ \lambda_n\kappa_n &= \frac{\pi}{2} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right), \quad \textit{falls } \alpha = 0,\end{aligned}$$

für $n \to \infty$.

BEWEIS. Wir zeigen die Behauptung nur im Fall $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Im Beweis von Satz 4.2.6 ist in diesem Fall die Folge

$$\int_0^\pi q(t)(b-t)\sin 2nt\, dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

sogar quadratisch summierbar, woraus die Behauptung folgt. □

Aus der Asymptotik der Spektraldaten erhält man nun folgenden Satz über die gleichgradige Konvergenz von Fourierentwicklungen.

Satz 4.2.8. *Sei $f \in L^2(0,\pi)$ und σ_N für jedes $N \in \mathbb{N}$*

$$\sigma_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^{-2} \int_0^\pi f(t)\phi_n(t)dt\ \phi_n(x), \quad x \in [0,\pi]$$

die Partialsummen der Fourierentwicklung bezüglich der Eigenfunktionen von S. Seien weiters $\sigma^0_{a,N}$, $\sigma^0_{b,N}$, $\sigma^0_{c,N}$ und $\sigma^0_{d,N}$ für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\sigma^0_{a,N}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt\ \cos nx, \qquad x \in [0,\pi],$$

$$\sigma^0_{b,N}(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\ \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x, \quad x \in [0,\pi],$$

$$\sigma^0_{c,N}(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\ \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x, \quad x \in [0,\pi],$$

$$\sigma^0_{d,N}(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(n+1)\,t\,dt\ \sin(n+1)\,x, \qquad x \in [0,\pi]$$

die Partialsummen der Fourierentwicklungen bezüglich der Eigenfunktionen der Operatoren S^0_a, S^0_b, S^0_c und S^0_d aus Beispiel 4.1.1. Falls q quadratisch integrierbar ist, also $q \in L^2(0,\pi)$, so gilt

$$\lim_{N\to\infty} \left\|\sigma_N - \sigma^0_{a,N}\right\|_\infty = 0, \qquad \text{falls } \alpha \neq 0 \neq \beta,$$

$$\lim_{N\to\infty} \left\|\sigma_N - \sigma^0_{b,N}\right\|_\infty = 0, \qquad \text{falls } \alpha \neq 0 = \beta,$$

$$\lim_{N\to\infty} \left\|\sigma_N - \sigma^0_{c,N}\right\|_\infty = 0, \qquad \text{falls } \alpha = 0 \neq \beta,$$

$$\lim_{N\to\infty} \left\|\sigma_N - \sigma^0_{d,N}\right\|_\infty = 0, \qquad \text{falls } \alpha = 0 = \beta,$$

wobei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf $C[0,\pi]$ bezeichnet.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung wieder nur im Fall $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Wie im Beweis von Satz 4.2.6 bzw. Korollar 4.2.7 sieht man, dass

$$\int_0^\pi f(t)\phi_n(t)dt = \sin\alpha \int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

für $n \to \infty$ gilt. Daraus folgt wie im Beweis von Satz 4.2.4 bzw. Korollar 4.2.5

$$\|\phi_n\|^{-2}\int_0^\pi f(t)\phi_n(t)dt\,\phi_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt\ \cos nx + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

gleichmäßig in $x \in [0,\pi]$ für $n \to \infty$. Also konvergiert die Differenz der Partialsummen absolut und gleichmäßig in $x \in [0,\pi]$. Da diese Differenz in $L^2(0,\pi)$ gegen Null konvergiert, folgt die Behauptung. □

Man sieht daraus, dass die Fourierentwicklung bezüglich der Eigenfunktionen von S einer Funktion in einem Punkt genau dann konvergiert, wenn die gewöhnliche Fourierentwicklung dieser Funktion in diesem Punkt konvergiert und dass in diesem Fall die Grenzwerte übereinstimmen.

4.3. Transformationsoperatoren

Es gelten in diesem Abschnitt wieder die Voraussetzungen der vorigen Abschnitte 4.1 und 4.2. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass man für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Lösungen von

$$(\tau - z)u = 0,$$

welche die Randbedingung bei 0 erfüllen, durch Lösungen der Gleichung

$$\left(\tau^0 - z\right) u = 0$$

aus Beispiel 4.1.1, die einer bestimmten Randbedingung bei 0 genügen, ähnlich wie in Abschnitt 3.3, durch einen Volterra-Integraloperator darstellen kann. Konkret wollen wir in diesem Abschnitt folgenden Satz beweisen.

SATZ 4.3.1. *Es existiert eine stetige, reellwertige Funktion K auf Δ,*

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x \le \pi\right\},$$

sodass für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Funktion φ_z

$$\varphi_z(x) = \cos\sqrt{z}x + \int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{z}t\,dt, \qquad x \in [0,\pi], \quad \textit{falls } \alpha \in (0,\pi),$$

$$\varphi_z(x) = \frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}} + \int_0^x K(x,t)\frac{\sin\sqrt{z}t}{\sqrt{z}}\,dt, \qquad x \in [0,\pi], \quad \textit{falls } \alpha = 0,$$

eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$ ist und zwar diejenige mit den Anfangswerten

$$\begin{array}{llll} \varphi_z(0) = 1 & \textit{und} & \varphi_z'(0) = \cot\alpha, & \textit{falls } \alpha \in (0,\pi), \\ \varphi_z(0) = 0 & \textit{und} & \varphi_z'(0) = 1, & \textit{falls } \alpha = 0. \end{array}$$

Bezeichnet man mit V den Volterra-Integraloperator

$$Vf(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt, \quad x \in [0,\pi], \ f \in L^2(0,\pi)$$

auf $L^2(0,\pi)$, so bildet also der Operator $I + V$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Lösungen der Gleichung $(\tau^0 - z)u = 0$ mit den Anfangswerten

$$\begin{array}{llll} u(0) = 1 & \text{und} & u'(0) = 0, & \text{falls } \alpha \in (0,\pi), \\ u(0) = 0 & \text{und} & u'(0) = 1, & \text{falls } \alpha = 0, \end{array}$$

auf die Lösungen φ_z ab. Einen Operator mit diesen Eigenschaften nennen wir Transformationsoperator von S. Da sowohl die Funktionen

$$\cos\sqrt{z}x, \quad x \in [0,\pi], \ z \in \mathbb{C}$$

als auch die Funktionen

$$\frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}}, \quad x \in [0,\pi], \ z \in \mathbb{C}$$

den ganzen Raum $L^2(0,\pi)$ aufspannen, kann nur ein solcher Transformationsoperator existieren. Satz 4.3.1 besagt also, dass der Operator $I + V$ der Transformationsoperator von S ist. Bevor wir diesen Satz beweisen können benötigen wir noch etwas Vorbereitung.

LEMMA 4.3.2. *Es existiert eine reellwertige Funktion H auf $[0,\pi]\times\mathbb{R}$, welche der Integralgleichung*

$$H(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x+y}{2}}q(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^x q(s)\int_{y-(x-s)}^{y+(x-s)}H(s,t)dt\,ds,\quad (x,y)\in\Delta_\pm$$

genügt, außerhalb von $\Delta_\pm$ verschwindet und auf $\Delta_\pm$ stetig ist, wobei

$$\Delta_\pm=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid |y|\le x\le\pi\right\}.$$

BEWEIS. Sei die Funktion H_0 auf $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ definiert durch

$$H_0(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x+y}{2}}q(s)ds, & \text{falls } (x,y)\in\Delta_\pm\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Weiters definieren wir für $n\in\mathbb{N}$ die Funktion H_n auf $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ induktiv durch

$$H_n(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^x q(s)\int_{y-(x-s)}^{y+(x-s)}H_{n-1}(s,t)dt\,ds,\quad (x,y)\in[0,\pi]\times\mathbb{R}.$$

Aus diesen Definitionen folgt, dass die Funktionen H_n, $n\in\mathbb{N}_0$ reellwertig sind und außerhalb von $\Delta_\pm$ verschwinden. Wir wollen nun induktiv die Abschätzung

$$|H_n(x,y)|\le\frac{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2}\frac{x^n\sigma_1(x)^n}{n!},\quad (x,y)\in\Delta_\pm,\ n\in\mathbb{N}_0$$

zeigen, wobei

$$\sigma_1(x)=\int_0^x|q(s)|ds,\quad x\in[0,\pi].$$

Für H_0 ist diese Abschätzung offensichtlich. Für $n\in\mathbb{N}$ erhalten wir, da die Funktion σ_1 monoton wachsend ist, für $(x,y)\in\Delta_\pm$

$$\begin{aligned}|H_n(x,y)|&\le\frac{1}{2}\int_0^x|q(s)|\int_{y-(x-s)}^{y+(x-s)}|H_{n-1}(s,t)|dt\,ds\\&\le\frac{1}{2}\int_0^x|q(s)|\int_{y-(x-s)}^{y+(x-s)}\frac{\sigma_1\left(\frac{s+t}{2}\right)}{2}\frac{s^{n-1}\sigma_1(s)^{n-1}}{(n-1)!}dt\,ds\\&\le\frac{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2(n-1)!}\int_0^x|q(s)|s^{n-1}\sigma_1(s)^{n-1}(x-s)ds\\&\le\frac{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2(n-1)!}x^n\left[\frac{\sigma_1(s)^n}{n}\right]_{s=0}^x\\&=\frac{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2}\frac{x^n\sigma_1(x)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Wegen dieser Abschätzung konvergiert die Reihe

$$H(x,y)=\sum_{n=0}^\infty H_n(x,y),\quad (x,y)\in[0,\pi]\times\mathbb{R}$$

gleichmäßig. Da die Summanden auf $\Delta_\pm$ stetig sind, ist es auch H. Außerdem ist H reellwertig und verschwindet außerhalb von $\Delta_\pm$. Um die Integralgleichung einzusehen, sei $(x,y) \in \Delta_\pm$. Dann gilt

$$\begin{aligned} H(x,y) &= H_0(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x,y) \\ &= H_0(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \int_0^x q(s) \int_{y-(x-s)}^{y+(x-s)} H_{n-1}(s,t)dt\,ds \\ &= H_0(x,y) + \frac{1}{2} \int_0^x q(s) \int_{y-(x-s)}^{y+(x-s)} \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}(s,t)dt\,ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x+y}{2}} q(s)ds + \frac{1}{2} \int_0^x q(s) \int_{y-(x-s)}^{y+(x-s)} H(s,t)dt\,ds, \end{aligned}$$

wobei die Vertauschung der Integrale und Summen mit dem Satz von Fubini und den Abschätzungen aus dem vorigen Schritt gerechtfertigt werden kann.

□

LEMMA 4.3.3. *Sei $z \in \mathbb{C}$ und $e_z^\pm$ die Funktionen*

$$e_z^\pm(x) = e^{\pm\sqrt{-z}x} + \int_{-x}^{x} H(x,t)\, e^{\pm\sqrt{-z}t}\, dt, \quad x \in [0,\pi].$$

Dann sind die Funktionen $e_z^\pm$ die Lösungen von $(\tau - z)u = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(0) = 1 \quad \textit{und} \quad u'(0) = \pm\sqrt{-z}.$$

BEWEIS. Für alle $r,\ s,\ t \in \mathbb{R}$ mit $t > s$ gilt

$$\int_{r-(t-s)}^{r+(t-s)} e^{\pm\sqrt{-z}u} du = 2e^{\pm\sqrt{-z}r} \frac{\sin\sqrt{z}(t-s)}{\sqrt{z}}.$$

Damit erhält man nun für $x \in [0,\pi]$

$$(*) \qquad \begin{aligned} \int_{-x}^{x} \int_0^{\frac{x+y}{2}} q(s) e^{\pm\sqrt{-z}y} ds\,dy &= \int_0^x q(s) \int_{-x+2s}^{x} e^{\pm\sqrt{-z}y} dy\,ds \\ &= 2\int_0^x q(s) e^{\pm\sqrt{-z}s} \frac{\sin\sqrt{z}(x-s)}{\sqrt{z}} ds. \end{aligned}$$

Außerdem erhält man für $(x,s) \in \Delta$

$$(**) \qquad \begin{aligned} 2\frac{\sin\sqrt{z}(x-s)}{\sqrt{z}} \int_{-s}^{s} H(s,t)\, e^{\pm\sqrt{-z}t}\, dt &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(s,t) \int_{t-(x-s)}^{t+(x-s)} e^{\pm\sqrt{-z}y} dy\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm\sqrt{-z}y} \int_{y-(x-s)}^{y+(x-s)} H(s,t)dt\,dy \\ &= \int_{-x}^{x} e^{\pm\sqrt{-z}y} \int_{y-(x-s)}^{y+(x-s)} H(s,t)dt\,dy, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, da in diesem Fall für $|y| > x$

$$\int_{y-(x-s)}^{y+(x-s)} H(s,t)dt = 0$$

gilt. Es folgt nun aus der Integralgleichung, die H erfüllt, sowie $(*)$ und $(**)$

$$\begin{aligned}
&\int_{-x}^{x} H(x,y)\, e^{\pm\sqrt{-z}y}\, dy \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{\frac{x+y}{2}} q(s)\, e^{\pm\sqrt{-z}y}\, ds\, dy + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{x} q(s)\int_{y-(x-s)}^{y+(x-s)} H(s,t)\, e^{\pm\sqrt{-z}y}\, dt\, ds\, dy \\
&\quad = \int_0^x \frac{\sin\sqrt{z}(x-s)}{\sqrt{z}}\, q(s) e^{\pm\sqrt{-z}s} ds + \\
&\qquad\qquad + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{z}(x-s)}{\sqrt{z}} q(s)\int_{-s}^{s} H(s,t)\, e^{\pm\sqrt{-z}t} dt\, ds \\
&\quad = \int_0^x \frac{\sin\sqrt{z}(x-s)}{\sqrt{z}} q(s)\left(e^{\pm\sqrt{-z}s} + \int_{-s}^{s} H(s,t) e^{\pm\sqrt{-z}t} dt\right) ds \\
&\quad = \int_0^x \frac{\sin\sqrt{z}(x-s)}{\sqrt{z}} q(s) e_z^{\pm}(s) ds.
\end{aligned}$$

Also erfüllen die Funktionen $e_z^{\pm}$

$$e_z^{\pm}(x) = e^{\pm\sqrt{-z}x} + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{z}(x-y)}{\sqrt{z}} q(y) e_z^{\pm}(y) dy, \quad x \in [0,\pi]$$

und sind damit die Lösungen von $(\tau - z)u = 0$ mit den Anfangswerten

$$e_z^{\pm}(0) = 1 \quad \text{und} \quad e_z^{\pm\prime}(0) = \pm\sqrt{-z}.$$

$\square$

Sei nun die Funktion K auf Δ definiert durch

$$\begin{aligned}
K(x,y) = \cot\alpha + H(x,y) + H(x,-y) & + \\
& + \cot\alpha \int_y^x H(x,t) - H(x,-t) dt, \quad (x,y) \in \Delta,
\end{aligned}$$

falls $\alpha \in (0,\pi)$ und

$$K(x,y) = H(x,y) - H(x,-y), \quad (x,y) \in \Delta,$$

falls $\alpha = 0$. Aus der Integralgleichung, der die Funktion H genügt, sieht man unmittelbar die Gleichungen

$$K(x,x) = \cot\alpha + \frac{1}{2}\int_0^x q(s)ds, \quad x \in [0,\pi], \quad \text{falls } \alpha \in (0,\pi), \tag{4.2a}$$

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(s)ds, \quad x \in [0,\pi], \quad \text{falls } \alpha = 0, \tag{4.2b}$$

ein. Wir zeigen nun, dass die Funktion K, die in Satz 4.3.1 geforderten Eigenschaften hat.

Beweis von Satz 4.3.1. Sei zunächst $\alpha \in (0,\pi)$ und $z \in \mathbb{C}^\times$. Aus der Darstellung der Winkelfunktionen durch die Exponentialfunktion, folgt aus Lemma 4.3.3, dass auch die Funktion

$$\begin{aligned} f_z(x) = \cos\sqrt{z}x + \cot\alpha \frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}} + \\ + \int_{-x}^{x} H(x,t)\left(\cos\sqrt{z}t + \cot\alpha\frac{\sin\sqrt{z}t}{\sqrt{z}}\right) dt, \quad x \in [0,\pi] \end{aligned}$$

eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$ ist und zwar diejenige mit den Anfangswerten

$$u(0) = 1 \quad \text{und} \quad u'(0) = \cot\alpha.$$

Durch Umformen sieht man

$$\begin{aligned} f_z(x) &= \cos\sqrt{z}x + \cot\alpha \int_0^x \cos\sqrt{z}t \; dt + \\ &\quad + \int_0^x (H(x,t) + H(x,-t)) \cos\sqrt{z}t \; dt + \\ &\quad + \int_0^x (H(x,y) - H(x,-y)) \cot\alpha \int_0^t \cos\sqrt{z}s \; ds\, dt \\ &= \cos\sqrt{z}x + \int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{z}t \; dt, \quad x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt die Behauptung auch für $z = 0$.

Genauso sieht man, dass im Fall $\alpha = 0$, für $z \in \mathbb{C}^\times$ die Funktion

$$\begin{aligned} f_z(x) &= \frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}} + \int_{-x}^{x} H(x,t)\frac{\sin\sqrt{z}t}{\sqrt{z}} dt \\ &= \frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}} + \int_0^x (H(x,t) - H(x,-t))\frac{\sin\sqrt{z}t}{\sqrt{z}} dt, \quad x \in [0,\pi] \end{aligned}$$

die Lösung von $(\tau - z)u = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(0) = 0 \quad \text{und} \quad u'(0) = 1$$

ist. Wie oben folgt die Behauptung für $z = 0$ aus Stetigkeitsgründen. □

Da der Operator V ein Volterra-Integraloperator mit stetigem Kern ist, ist $I + V$ invertierbar und die Inverse ist auch von der Form $I + W$, wobei W ein Volterra-Integraloperator mit stetigem Kern L ist. Es gilt dann also

$$\cos\sqrt{z}x = \varphi_z(x) + \int_0^x L(x,t)\varphi_z(t)dt, \quad x \in [0,\pi],\; z \in \mathbb{C}, \quad \text{falls } \alpha \in (0,\pi),$$

$$\frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}} = \varphi_z(x) + \int_0^x L(x,t)\varphi_z(t)dt, \quad x \in [0,\pi],\; z \in \mathbb{C}, \quad \text{falls } \alpha = 0.$$

Wir wollen im nun Folgenden eine Integralgleichung für den Kern K herleiten, die wir zur Lösung des inversen Problems verwenden werden. Wir betrachten dazu für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Funktion F_N auf $[0,\pi]^2$

$$F_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\phi^0_{i,\lambda_n}(x)\phi^0_{i,\lambda_n}(y)}{\kappa_n} - \frac{\phi^0_{i,n}(x)\phi^0_{i,n}(y)}{\kappa^0_{i,n}}, \quad x,\; y \in [0,\pi],$$

wobei i, je nachdem welcher der vier Fälle (4.1a), (4.1b), (4.1c) oder (4.1d) aus Abschnitt 4.2 vorliegt, a, b, c oder d ist. Wir wollen nun zeigen, dass die Funktionen F_N für $N \to \infty$ zumindest in $L^2\left((0,\pi)^2\right)$ konvergieren. Der Raum $L^2\left((0,\pi)^2\right)$ ist dabei der Hilbertraum aller Äquivalenzklassen von Borel-messbaren, komplexwertigen Funktionen auf $(0,\pi)^2$, die bezüglich des Lebesguemaßes quadratisch integrierbar sind.

Proposition 4.3.4. *Die Folge F_N konvergiert in $L^2\left((0,\pi)^2\right)$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung nur im Fall $\alpha \neq 0 \neq \beta$. In diesem Fall haben wir

$$F_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}x\,\cos\sqrt{\lambda_n}y}{\kappa_n} - \frac{\cos nx\,\cos ny}{\kappa^0_{a,n}}, \quad x,\ y \in [0,\pi],\ N \in \mathbb{N}.$$

Wir betrachten die Funktionen Φ_N, $N \in \mathbb{N}$ auf $[-2\pi, 2\pi]$

$$\Phi_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}t}{\kappa_n} - \frac{\cos nt}{\kappa^0_{a,n}}, \quad t \in [-2\pi,2\pi],\ N \in \mathbb{N}.$$

Aus den Additionstheoremen der Winkelfunktionen folgt sofort

$$F_N(x,y) = \frac{1}{2}\left(\Phi_N(x+y) + \Phi_N(x-y)\right), \quad x,\ y \in [0,\pi],\ N \in \mathbb{N}.$$

Wir wollen zeigen, dass die Folge Φ_N für $N \to \infty$ in $L^2(-2\pi,2\pi)$ konvergiert. Aus der Asymptotik der Eigenwerte und Normierungskonstanten folgt

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_n}{n} \quad \text{und} \quad \kappa_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

für zwei beschränkte, reellwertige Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Damit und einer Taylorentwicklung erhält man

$$\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}t}{\kappa_n} - \frac{\cos nt}{\kappa^0_{a,n}} = -\frac{4}{\pi^2}\frac{b_n}{n}\cos nt - \frac{2}{\pi}\frac{a_n t}{n}\sin nt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

gleichmäßig in $t \in [-2\pi,2\pi]$ für $n \to \infty$. Da die Summe über den Fehlerterm sogar gleichmäßig konvergiert, bleibt zu zeigen, dass die Folgen

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{n}\cos nt \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n t}{n}\sin nt, \quad t \in [-2\pi,2\pi],\ N \in \mathbb{N}$$

für $N \to \infty$ in $L^2(-2\pi,2\pi)$ konvergieren. Die erste Reihe konvergiert weil die Funktionen

$$\cos nt, \quad t \in [-2\pi,2\pi],\ n \in \mathbb{N}$$

orthogonal aufeinander und in $L^2(-2\pi,2\pi)$ beschränkt sind und die Koeffizienten quadratisch summierbar sind. Aus den gleichen Gründen konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}\sin nt, \quad t \in [-2\pi,2\pi].$$

Da die Multiplikation mit der unabhängigen Variablen auf $L^2(-2\pi,2\pi)$ stetig ist, folgt, dass auch die zweite Reihe konvergiert. Die Folge Φ_N konvergiert also für $N \to \infty$ gegen eine Funktion $\Phi \in L^2(-2\pi,2\pi)$. Sei nun

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left(\Phi(x+y) + \Phi(x-y)\right), \quad x,\ y \in (0,\pi).$$

Dann folgt aus

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \int_0^\pi &|F_N(x,y) - F(x,y)|^2\, dx\, dy \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^\pi \int_0^\pi |\Phi_N(x+y) - \Phi(x+y)|^2\, dx\, dy + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}\int_0^\pi \int_0^\pi |\Phi_N(x-y) - \Phi(x-y)|^2\, dx\, dy \\ &\leq \int_0^\pi \int_{-2\pi}^{2\pi} |\Phi_N(t) - \Phi(t)|^2\, dt\, dy = \pi\, \|\Phi_N - \Phi\|_\Phi^2\end{aligned}$$

die Behauptung, wobei $\|\cdot\|_\Phi$ die Norm in $L^2(-2\pi, 2\pi)$ ist. In den restlichen Fällen verwendet man die Funktionen Φ_N, $N \in \mathbb{N}$

$$\Phi_N(t) = \sum_{n=0}^N \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}t}{\kappa_n} - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\kappa_{b,n}^0}, \quad t \in [-2\pi, 2\pi], \quad \text{falls } \alpha \neq 0 = \beta,$$

$$\Phi_N(t) = \sum_{n=0}^N \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}t}{\lambda_n\kappa_n} - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\lambda_{c,n}^0\kappa_{c,n}^0}, \quad t \in [-2\pi, 2\pi], \quad \text{falls } \alpha = 0 \neq \beta,$$

$$\Phi_N(t) = \sum_{n=0}^N \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}t}{\lambda_n\kappa_n} - \frac{\cos(n+1)\,t}{\lambda_{d,n}^0\kappa_{d,n}^0}, \quad t \in [-2\pi, 2\pi], \quad \text{falls } \alpha = 0 = \beta.$$

□

Den Grenzwert der Folge F_N in $L^2\left((0,\pi)^2\right)$ bezeichnen wir mit F. Bevor wir die Integralgleichung für den Kern K herleiten, brauchen wir noch die folgende Gleichung.

Proposition 4.3.5. *Es gilt*

$$F(x,y) = L(x,y) + \int_0^y L(x,t)L(y,t)dt$$

für fast alle $(x,y) \in \Delta$. *Insbesondere ist* F *stetig.*

Beweis. Zur Vorbereitung sei G eine beschränkte, messbare Funktion auf $[0,\pi]^2$ und G_N, $N \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$G_N(x,y) = \sum_{n=0}^N \|\phi_n\|^{-2} \int_0^\pi G(x,t)\phi_n(t)dt\ \phi_n(y), \quad x,\ y \in [0,\pi].$$

Da für alle $x \in [0,\pi]$, $G_N(x,\cdot)$ die N-te Partialsumme der Fourierentwicklung der Funktion $G(x,\cdot)$ ist, konvergiert die Folge

$$\int_0^\pi |G_N(x,y) - G(x,y)|^2\, dy = \sum_{n=N+1}^\infty \|\phi_n\|^{-2} \left|\int_0^\pi G(x,t)\phi_n(t)dt\right|^2 \to 0,$$

für $N \to \infty$ monoton fallend gegen Null. Daraus folgt mit dem Satz von Lebesgue, dass die Folge G_N in $L^2\left((0,\pi)^2\right)$ gegen G konvergiert. Weiters seien $\tilde{G}_N$, $N \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$\tilde{G}_N(x,y) = \sum_{n=0}^N \|\phi_n\|^{-2} \int_0^\pi G(x,t)\phi_n(t)dt \int_0^\pi G(y,t)\phi_n(t)dt, \quad x,\ y \in [0,\pi].$$

Da in der Summe genau die Fourierkoeffizienten der Funktionen $G(x,\,\cdot\,)$ und $G(y,\,\cdot\,)$ stehen, konvergiert $\tilde{G}_N(x,y)$ wegen der Parseval'schen Gleichung punktweise gegen die Funktion $\tilde{G}$

$$\tilde{G}(x,y)=\int_0^\pi G(x,t)G(y,t)dt,\quad x,\ y\in[0,\pi]$$

auf $[0,\pi]^2$. Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}\tilde{G}_N(x,y)&\le\sum_{n=0}^\infty\|\phi_n\|^{-2}\left|\int_0^\pi G(x,t)\phi_n(t)dt\right|^2\sum_{n=0}^\infty\|\phi_n\|^{-2}\left|\int_0^\pi G(y,t)\phi_n(t)dt\right|^2\\&=\int_0^\pi|G(x,t)|^2\,dt\int_0^\pi|G(y,t)|^2\,dt,\quad x,\ y\in[0,\pi],\end{aligned}$$

folgt mit dem Satz von Lebesgue, dass die Funktionen $\tilde{G}_N$ für $N\to\infty$ in $L^2\left((0,\pi)^2\right)$ gegen die Funktion $\tilde{G}$ konvergieren.

Wir wollen nun die Behauptung im Fall $\alpha\neq0\neq\beta$ zeigen, die restliche Fälle zeigt man ähnlich. Aus der Gleichung

$$\sin\alpha\,\cos\sqrt{\lambda_n}x=\phi_n(x)+\int_0^x L(x,t)\phi_n(t)dt,\quad x\in[0,\pi]$$

erhält man für alle $x,\ y\in[0,\pi]$

$$\begin{aligned}F_N(x,y)=\sum_{n=0}^N\frac{\phi_n(x)\,\phi_n(y)}{\kappa_n\sin^2\alpha}&-\frac{\cos nx\ \cos ny}{\kappa^0_{a,n}}+\\&+\sum_{n=0}^N\|\phi_n\|^{-2}\int_0^y L(y,t)\phi_n(t)dt\ \phi_n(x)+\\&+\sum_{n=0}^N\|\phi_n\|^{-2}\int_0^x L(x,t)\phi_n(t)dt\ \phi_n(y)+\\&+\sum_{n=0}^N\|\phi_n\|^{-2}\int_0^x L(x,t)\phi_n(t)dt\int_0^y L(y,t)\phi_n(t)dt.\end{aligned}$$

Da sowohl die linke Seite, als auch der zweite, dritte und vierte Summand der rechten Seite für $N\to\infty$ in $L^2\left((0,\pi)^2\right)$ konvergieren, konvergiert auch der erste Summand in $L^2\left((0,\pi)^2\right)$. Aus der Parseval'schen Gleichung folgt dann

$$\begin{aligned}&\int_0^x\int_0^y\sum_{n=0}^\infty\frac{\phi_n(s)\,\phi_n(t)}{\kappa_n\sin^2\alpha}-\frac{\cos ns\ \cos nt}{\kappa^0_{a,n}}dt\,ds=\\&\quad=\sum_{n=0}^\infty\|\phi_n\|^{-2}\int_0^x\phi_n(s)ds\int_0^y\phi_n(t)dt+\\&\qquad\qquad-\frac{1}{\kappa^0_{a,n}}\int_0^x\cos nsds\int_0^y\cos ntdt\\&\quad=\int_0^\pi\mathbb{1}_{(0,x)}(t)\mathbb{1}_{(0,y)}(t)dt-\int_0^\pi\mathbb{1}_{(0,x)}(t)\mathbb{1}_{(0,y)}(t)dt=0,\quad x,\ y\in[0,\pi].\end{aligned}$$

Also konvergiert der erste Summand für $N \to \infty$ notwendigerweise gegen Null. Aus dem, am Anfang des Beweises Gezeigten folgt, durch Bildung des Grenzwertes für $N \to \infty$

$$F(x,y) = L(y,x)\mathbb{1}_{[0,y]}(x) + L(x,y)\mathbb{1}_{[0,x]}(y) + \int_0^{\min(x,y)} L(x,t)L(y,t)dt$$

für fast alle $(x,y) \in [0,\pi]^2$. Insbesondere gilt

$$F(x,y) = L(x,y) + \int_0^y L(x,t)L(y,t)dt$$

für fast alle $(x,y) \in \Delta$. Die Funktion F ist also stetig auf Δ. Weil F symmetrisch ist, folgt dass F auch auf $[0,\pi]^2$ stetig ist. □

SATZ 4.3.6. *Der Kern K genügt der Integralgleichung*

$$K(x,y) + \int_0^x K(x,t)F(t,y)dt + F(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Delta.$$

BEWEIS. Wir zeigen die Behauptung nur im Fall $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Durch Anwenden der Operatoren $I + V$ und $I + W$ erhält man für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^N \|\phi_n\|^{-2}\phi_n(x)\phi_n(y) + \sum_{n=0}^N \|\phi_n\|^{-2}\,\phi_n(x)\int_0^y L(y,t)\phi_n(t)dt = \\
&\qquad = \sum_{n=0}^N \|\phi_n\|^{-2}\sin\alpha\,\phi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}y \\
&\qquad = \sum_{n=0}^N \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}x\,\cos\sqrt{\lambda_n}y}{\kappa_n} + \\
&\qquad\qquad + \int_0^x K(x,t)\sum_{n=0}^N \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}t\,\cos\sqrt{\lambda_n}y}{\kappa_n}dt \\
&\qquad = F_N(x,y) + \sum_{n=0}^N \frac{\cos nx\,\cos ny}{\kappa^0_{a,n}} + \int_0^x K(x,t)F_N(t,y)dt + \\
&\qquad\qquad + \sum_{n=0}^N \frac{1}{\kappa^0_{a,n}}\int_0^x K(x,t)\cos nt\,dt\,\cos ny, \quad x,y \in [0,\pi].
\end{aligned}$$

Im Beweis von Proposition 4.3.5 haben wir gesehen, dass die Funktionen

$$\sum_{n=0}^N \|\phi_n\|^{-2}\,\phi_n(x)\phi_n(y) - \frac{\cos nx\,\cos ny}{\kappa^0_{a,n}}, \quad x,\ y \in [0,\pi],\ N \in \mathbb{N}$$

für $N \to \infty$ in $L^2\left((0,\pi)^2\right)$ gegen Null konvergieren. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi\int_0^\pi \left|\int_0^x K(x,t)F_N(t,y)dt - \int_0^x K(x,t)F(t,y)dt\right|^2 dy\,dx \\
&\qquad \le \int_0^\pi\int_0^\pi \pi\max_{(s,t)\in\Delta}|K(s,t)|^2\int_0^\pi |F_N(t,y)-F(t,y)|^2\,dt\,dy\,dx \\
&\qquad \le \pi^2\max_{(s,t)\in\Delta}|K(s,t)|^2\,\|F_N - F\|_2^2,
\end{aligned}$$

wobei hier $\|\cdot\|_2$ die Norm in $L^2\left((0,\pi)^2\right)$ bezeichnet. Zusammen erhält man mit dem, am Anfang des Beweises von Proposition 4.3.5 Gezeigten

$$L(y,x)\mathbb{1}_{[0,y]}(x) = K(x,y)\mathbb{1}_{[0,x]}(y) + \int_0^x K(x,t)F(t,y)dt + F(x,y)$$

für fast alle $(x,y) \in [0,\pi]^2$. Insbesondere haben wir

$$K(x,y) + \int_0^x K(x,t)F(t,y)dt + F(x,y) = 0$$

für fast alle $(x,y) \in \Delta$. Da beide Seiten stetig sind, folgt die Behauptung. □

4.4. Inverses Problem von den Spektraldaten

Wir wollen in diesem Abschnitt das inverse Problem von den Spektraldaten untersuchen. Es besteht darin, zu gegebenen Zahlen $(\lambda_n,\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine selbstadjungierte Realisierung mit getrennten Randbedingungen eines regulären Differentialausdrucks auf $(0,\pi)$ zu bestimmen, dessen Spektraldaten genau diese Zahlen sind. Wir wollen zuerst zeigen, dass dieses Problem, falls es lösbar ist, eindeutig lösbar ist. Seien dazu S_1 und S_2 zwei selbstadjungierte Realisierungen zweier regulärer Sturm-Liouville Differentialausdrücke τ_1 und τ_2 auf $(0,\pi)$ mit Potentialen q_1 und q_2. Weiters seien $(\lambda_{1,n},\kappa_{1,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\lambda_{2,n},\kappa_{2,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ die zugehörigen Spektraldaten, ρ_1 und ρ_2 die zugehörigen Spektralmaße. Es gilt dann der folgende Eindeutigkeitssatz.

Satz 4.4.1. *Stimmen die Spektraldaten überein, also*

$$\lambda_{1,n} = \lambda_{2,n} \quad \textit{und} \quad \kappa_{1,n} = \kappa_{2,n} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

so gilt bereits $q_1 = q_2$ *und* $S_1 = S_2$.

Beweis. Wegen Satz 4.2.6 folgt aus der Gleichheit der Normierungskonstanten, dass entweder $\alpha_1,\ \alpha_2 \in (0,\pi)$ oder $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ gilt. Mit Satz 4.2.4 folgt daraus, aus der Gleichheit der Eigenwerte, dass in beiden Fällen auch $\beta_1,\ \beta_2 \in (0,\pi)$ oder $\beta_1 = \beta_2 = 0$ gelten muss. Es stimmen daher auch die entsprechenden F-Funktionen F_1 und F_2 aus Abschnitt 4.3 überein. Bezeichnet man mit K_1 und K_2 die Kerne der Transformationsoperatoren, so folgt aus Satz 4.3.6

$$K_1(0,0) = -F_1(0,0) = -F_2(0,0) = K_2(0,0).$$

Aus den Gleichungen (4.2a) und (4.2b) folgt nun $\alpha_1 = \alpha_2$ in allen Fällen. Es gilt daher auch $\rho_1 = \rho_2$ und damit für die m-Funktionen m_1 und m_2 von S_1 und S_2

$$m_1(z) - m_2(z) = C, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$$

für eine reelle Konstante $C \in \mathbb{R}$. Wegen $\alpha_1 = \alpha_2$ gilt

$$m_1(ix) - m_2(ix) \to 0, \quad \text{für } x \to \infty \text{ in } \mathbb{R}$$

und damit $C = 0$. Mit Korollar 3.5.7 folgt nun die Behauptung. □

Korollar 4.4.2. *Stimmen die Spektralmaße überein, also*

$$\rho_1 = \rho_2,$$

so gilt bereits $q_1 = q_2$ *und* $S_1 = S_2$.

Beweis. Aus $\rho_1 = \rho_2$ folgt

$$\lambda_{1,n} = \lambda_{2,n} \quad \text{und} \quad \|\phi_{1,n}\| = \|\phi_{2,n}\|, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei für $i \in \{1,2\}$, die Funktionen $\phi_{i,n}$ die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_{i,n}$, wie in Abschnitt 4.1 sind. Wegen

$$\|\phi_{i,n}\| \to \frac{\pi}{2}\sin^2\alpha_i, \quad i \in \{1,2\}$$

für $n \to \infty$ folgt $\sin^2\alpha_1 = \sin^2\alpha_2$ und damit $\kappa_{1,n} = \kappa_{2,n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. □

Wir wollen in diesem Abschnitt den folgenden Satz über die Lösbarkeit des inversen Problems von den Spektraldaten beweisen.

Satz 4.4.3. *Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen und $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge positiver Zahlen, die eine der vier Bedingungen*

$$\text{(4.3a)} \qquad \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\lambda}{n} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \textit{und} \qquad \kappa_n = \frac{\pi}{2} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{(4.3b)} \qquad \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{n} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \textit{und} \qquad \kappa_n = \frac{\pi}{2} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{(4.3c)} \qquad \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{n} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \textit{und} \qquad \lambda_n\kappa_n = \frac{\pi}{2} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{(4.3d)} \qquad \sqrt{\lambda_n} = n + 1 + \frac{\lambda}{n} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \textit{und} \qquad \lambda_n\kappa_n = \frac{\pi}{2} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

für $n \to \infty$ und eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllen. Dann existiert ein Sturm-Liouville Differentialausdruck τ auf $(0,\pi)$ mit Potential $q \in L^2(0,\pi)$, sowie Zahlen α, $\beta \in [0,\pi)$, sodass die Zahlen $(\lambda_n,\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Spektraldaten der selbstadjungierten Realisierung S von τ mit den Randbedingungen

$$f(0)\cos\alpha - f'(0)\sin\alpha = 0,$$
$$f(\pi)\cos\beta - f'(\pi)\sin\beta = 0,$$

$f \in \mathcal{D}(S)$ sind.

Aus Abschnitt 4.2 ist bekannt, dass diese Eigenschaften der Spektraldaten in diesem Fall notwendig sind. Wir haben mit diesem Satz also eine Charakterisierung aller möglichen Spektraldaten von selbstadjungierten Realisierungen mit getrennten Randbedingungen von regulären Sturm-Liouville Differentialausdrücken auf dem Intervall $(0,\pi)$ mit quadratisch integrierbaren Potentialen. Die vier Fälle in diesem Satz entsprechen den vier Fällen aus Abschnitt 4.2. Im ersten Fall gilt notwendigerweise α, $\beta \in (0,\pi)$, im zweiten Fall $\alpha \in (0,\pi)$, $\beta = 0$, im dritten Fall $\alpha = 0$, $\beta \in (0,\pi)$ und im vierten Fall $\alpha = \beta = 0$.

Wir wollen in diesem Abschnitt Satz 4.4.3 im Fall (4.3a) beweisen, die restlichen Fälle beweist man ähnlich. Seien dazu $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen und $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge positiver Zahlen, die

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{und} \qquad \kappa_n = \frac{\pi}{2} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right),$$

für $n \to \infty$ erfüllen. Wir beschränken uns zunächst also auf den Fall $\lambda = 0$.

Wie in Abschnitt 4.3 betrachten wir die Funktionen F_N, $N \in \mathbb{N}$

$$F_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}x \ \cos\sqrt{\lambda_n}y}{\kappa_n} - \frac{\cos nx \ \cos ny}{\kappa_{a,n}^0}, \quad x,y \in [0,\pi], \ N \in \mathbb{N}.$$

Wegen der geforderten Asymptotik der Folgen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, sieht man wie in Abschnitt 4.3, dass die Folge F_N für $N \to \infty$ in $L^2\left((0,\pi)^2\right)$ gegen eine Funktion $F \in L^2\left((0,\pi)^2\right)$ konvergiert. Um die Funktion F näher zu untersuchen führen wir, wie in Abschnitt 4.3 die Funktionen Φ_N, $N \in \mathbb{N}$

$$\Phi_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}t}{\kappa_n} - \frac{\cos nt}{\kappa_{a,n}^0}, \quad t \in [-2\pi, 2\pi], \ N \in \mathbb{N}$$

ein. Auch hier sieht man wieder, wie in Abschnitt 4.3, dass die Folge Φ_N für $N \to \infty$ in $L^2(-2\pi,2\pi)$ gegen eine Funktion $\Phi \in L^2(-2\pi,2\pi)$ konvergiert. Das sogar noch mehr gilt, zeigt die folgende Proposition.

PROPOSITION 4.4.4. *Die Folge Φ_N konvergiert gleichmäßig gegen eine absolut stetige Funktion $\Phi \in AC[-2\pi,2\pi]$ mit Ableitung $\Phi' \in L^2(-2\pi,2\pi)$. Die Funktionen Φ_N' konvergieren in $L^2(-2\pi,2\pi)$ gegen Φ'.*

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, dass die Folge

$$\Phi_N'(t) = \sum_{n=0}^{N} n\frac{\sin nt}{\kappa_{a,n}^0} - \sqrt{\lambda_n}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\kappa_n}, \quad t \in [-2\pi,2\pi], \ N \in \mathbb{N}$$

für $N \to \infty$ in $L^2(-2\pi,2\pi)$ konvergiert. Nach Voraussetzung gilt

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_n}{n} \quad \text{und} \quad \kappa_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ quadratisch summierbar sind. Daraus folgt

$$n\frac{\sin nt}{\kappa_{a,n}^0} - \sqrt{\lambda_n}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\kappa_n} = \frac{4}{\pi^2}b_n \sin nt - \frac{2}{\pi}a_n t\cos nt + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

gleichmäßig in $t \in [-2\pi,2\pi]$ für $n \to \infty$. Die Summe über den Fehlerterm konvergiert sogar gleichmäßig. Dass die Summen über die restlichen beiden Terme in $L^2(-2\pi,2\pi)$ konvergieren folgt genauso, wie im Beweis von Proposition 4.3.4. Also konvergiert die Folge Φ_N' für $N \to \infty$ gegen eine Funktion $\Phi' \in L^2(-2\pi,2\pi)$. Aus der Asymptotik der Zahlen κ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ folgt außerdem

$$|\Phi_N(0)| \le \sum_{n=0}^{N} \left|\frac{1}{\kappa_n} - \frac{1}{\kappa_{a,n}^0}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{\kappa_n} - \frac{1}{\kappa_{a,n}^0}\right| < \infty, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Also konvergiert die Folge $\Phi_N(0)$ für $N \to \infty$ gegen eine Zahl $\Phi(0) \in \mathbb{R}$. Aus

$$\Phi_N(t) = \Phi_N(0) + \int_0^t \Phi_N'(s)ds, \quad t \in [-2\pi,2\pi], \ N \in \mathbb{N}$$

folgt nun, dass die Folge Φ_N sogar gleichmäßig konvergiert und dass

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \int_0^t \Phi'(s)ds, \quad t \in [-2\pi,2\pi],$$

was auch die Bezeichnungen $\Phi(0)$ und Φ' rechtfertigt. □

Aus den Additionstheoremen der Winkelfunktionen folgt

$$F_N(x,y) = \frac{1}{2}\left(\Phi_N(x+y) + \Phi_N(x-y)\right), \quad x,\ y \in [0,\pi],\ N \in \mathbb{N}.$$

Also konvergiert auch die Folge F_N, $N \in \mathbb{N}$ gleichmäßig und es gilt

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left(\Phi(x+y) + \Phi(x-y)\right), \quad x,\ y \in [0,\pi].$$

Insbesondere ist F stetig.

Sind die Zahlen $(\lambda_n, \kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tatsächlich die Spektraldaten einer selbstadjungierten Realisierung eines regulären Sturm-Liouville Differentialausdrucks, so erfüllt der Kern des zugehörigen Transformationsoperators notwendigerweise die Integralgleichung aus Satz 4.3.6. Über diese Integralgleichung erhalten wir nun den gesuchten Kern K.

SATZ 4.4.5. *Es existiert eine eindeutige, stetige, reellwertige Funktion K auf Δ, die der Integralgleichung*

$$K(x,y) + \int_0^x K(x,t)F(t,y)dt + F(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Delta \tag{4.4}$$

genügt.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, dass für jedes $x \in [0,\pi]$ eine eindeutige, reellwertige Lösung $K_x \in C[0,x]$ der Integralgleichung

$$K_x(y) + \int_0^x K_x(t)F(t,y)dt + F(x,y) = 0, \quad y \in [0,x]$$

existiert. Dazu genügt es zu zeigen, dass -1 in der Resolventenmenge des Integraloperators V_x

$$V_x f(y) = \int_0^x F(t,y)f(t)dt, \quad y \in [0,x],\ f \in C[0,x]$$

auf $C[0,x]$ liegt. Da dieser Operator kompakt ist müssen wir zeigen, dass -1 kein Eigenwert ist. Sei also $g \in C[0,x]$, sodass

$$g(y) + V_x g(y) = g(y) + \int_0^x F(t,y)g(t)dt = 0, \quad y \in [0,x].$$

Daraus folgt mit der Parseval'schen Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^x |g(y)|^2\,dy + \int_0^x \int_0^x F(t,y)g(t)\overline{g(y)}dt\,dy \\
&= \int_0^x |g(y)|^2\,dy + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa_n} \int_0^x \int_0^x g(t)\overline{g(y)} \cos\sqrt{\lambda_n}t\, \cos\sqrt{\lambda_n}y\,dt\,dy\, + \\
&\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa_{a,n}^0} \int_0^x \int_0^x g(t)\overline{g(y)} \cos nt\, \cos ny\,dt\,dy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa_n} \left| \int_0^x g(t) \cos\sqrt{\lambda_n}t\ dt \right|^2.
\end{aligned}$$

Weil die Koeffizienten positiv sind, folgt daraus

$$\int_0^x g(t)\cos\sqrt{\lambda_n}t\,dt = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Aus Satz A.3.3 folgt damit $g = 0$, woraus die gewünschte Behauptung folgt.

Sei nun K die Funktion

$$K(x,y) = K_x(y), \quad (x,y) \in \Delta.$$

Diese Funktion ist offenbar eine Lösung der Integralgleichung. Um zu zeigen, dass K stetig ist, sei für jedes $x \in [0,\pi]$, $\tilde{V}_x$ der Operator

$$\tilde{V}_x f(t) = \int_0^1 xF(xs, xt) f(s) ds, \quad t \in [0,1],\ f \in C[0,1]$$

auf $C[0,1]$. Mit einer Substitution sieht man, dass die Funktion $\tilde{K}_x \in C[0,1]$

$$\tilde{K}_x(t) = K(x, xt), \quad t \in [0,1]$$

für jedes $x \in [0,\pi]$ eine Lösung von

$$\left(I + \tilde{V}_x\right) \tilde{K}_x + \tilde{F}_x = 0$$

ist, wobei $\tilde{F}_x \in C[0,1]$ gegeben ist durch

$$\tilde{F}_x(t) = F(x, xt), \quad t \in [0,1].$$

Für jedes $x \in (0,\pi]$ ist der Operator

$$U_x : \begin{cases} C[0,x] & \to & C[0,1] \\ f & \mapsto & f(x\,\cdot) \end{cases}$$

ein isometrischer Isomorphismus und mit einer Substitution sieht man, dass

$$U_x^{-1} \tilde{V}_x U_x = V_x$$

gilt. Die Operatoren $I + \tilde{V}_x$, $x \in (0,\pi]$ sind also invertierbar und es gilt

$$\left\| \left(I + \tilde{V}_x\right)^{-1} \right\| = \left\| (I + V_x)^{-1} \right\|, \quad x \in (0,\pi].$$

Da sowohl $V_0 = 0$, als auch $\tilde{V}_0 = 0$ ist auch $I + \tilde{V}_0$ invertierbar und diese Gleichheit gilt auch für $x = 0$.

Die Operatoren $\tilde{V}_x$ hängen bezüglich der Operatornormtopologie stetig von $x \in [0,\pi]$ ab. Ist nämlich $\varepsilon > 0$, so existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \quad \text{falls nur } |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \delta.$$

Sind nun x, $y \in [0,\pi]$ mit

$$|x - y| < \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2\|F\|_\infty}\right)$$

so folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{V}_x - \tilde{V}_y \right\| &\le \max_{s,t \in [0,1]} |xF(xs,xt) - yF(ys,yt)| \\ &\le \max_{s,t \in [0,1]} \pi \left|F(xs,xt) - F(ys,yt)\right| + |x - y| \, \|F\|_\infty < \varepsilon \end{aligned}$$

die Behauptung, wobei $\|\cdot\|_\infty$ hier die Supremumsnorm auf $[0,\pi]^2$ bezeichnet. Daraus folgt nun, dass auch die Inverse von $I + \tilde{V}_x$ stetig von $x \in [0,\pi]$

abhängt. Da die Funktion F stetig ist, sieht man, dass die Funktion $\tilde{F}_x$ stetig von $x \in [0,\pi]$ abhängt, woraus folgt, dass auch

$$\tilde{K}_x = \left(1 + \tilde{V}_x\right)^{-1} \tilde{F}_x$$

stetig von $x \in [0,\pi]$ abhängt. Also ist die Funktion $\tilde{K}$ auf $[0,\pi] \times [0,1]$

$$\tilde{K}(x,t) = K(x,xt), \quad x \in [0,\pi],\ t \in [0,1],$$

stetig, woraus die Stetigkeit von K folgt. Die Eindeutigkeit dieser Lösung folgt aus dem ersten Teil des Beweises. □

Falls die Zahlen $(\lambda_n, \kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Spektraldaten eines selbstadjungierten Sturm-Liouville Operators, wie in Satz 4.4.3 sind, so ist wegen Satz 4.4.5, die Funktion K notwendigerweise der Kern des zugehörigen Transformationsoperators. Wegen Gleichung (4.2a) steckt in diesem Fall das gesuchte Potential, sowie die Randbedingung bei 0 in dieser Funktion. Bevor wir diese Information jedoch herauslesen können, benötigen wir noch folgende Proposition.

Proposition 4.4.6. *Die Funktion*

$$x \mapsto K(x,x), \quad x \in [0,\pi]$$

ist absolut stetig mit quadratisch integrierbarer Ableitung.

Beweis. Wir verwenden die Notation aus dem Beweis von Satz 4.4.5. Zunächst nehmen wir an, dass Φ zweimal stetig differenzierbar auf $[-2\pi, 2\pi]$ ist. In diesem Fall ist auch $\tilde{F}_x$, $\tilde{V}_x$ und damit $(I + \tilde{V}_x)^{-1}$ und $\tilde{K}_x$ zweimal stetig differenzierbar bezüglich $x \in [0,\pi]$. Insbesondere ist dann natürlich auch die Abbildung

$$x \mapsto \tilde{K}_x(1) = K(x,x)$$

zweimal stetig differenzierbar auf $[0,\pi]$. Wir werden im Folgenden außerdem noch benötigen, dass die Lösung K in diesem Fall im Inneren von Δ zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass die Funktion $\tilde{K}$ auf $(0,\pi)\times(0,1)$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Dass die zweite Ableitung nach der ersten Variable existiert und stetig ist, haben wir bereits gesehen. Aus der Integralgleichung

$$\tilde{K}(x,t) + x\int_0^1 \tilde{K}(x,s)F(xs,xt)ds + F(x,xt) = 0, \quad x \in [0,\pi],\ t \in [0,1],$$

die $\tilde{K}$ erfüllt folgt, dass auch die zweite Ableitung nach der zweiten Variable, sowie die gemischte Ableitung existieren und stetig sind. Man sieht daraus sogar, dass diese Ableitungen stetig auf $[0,\pi] \times [0,1]$ fortgesetzt werden können. Wegen

$$K(x,y) = \tilde{K}\left(x, \frac{y}{x}\right), \quad 0 < y < x < \pi$$

können damit auch die entsprechenden Ableitungen von K, zumindest auf $\Delta\backslash\{(0,0)\}$ stetig fortgesetzt werden.

Um die Behauptung im allgemeinen Fall einzusehen, approximieren wir die Funktion K in geeigneter Weise. Wegen Satz 4.4.5 existiert für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine eindeutige stetige Funktion K_N auf Δ, sodass

$$(*) \qquad K_N(x,y) + \int_0^x K_N(x,t)F_N(t,y)dt + F_N(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Delta.$$

Wir wollen zuerst zeigen, dass die Lösungen K_N für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen K konvergieren. Neben der im Beweis von Satz 4.4.5 eingeführten Notation, setzen wir für $x \in [0,\pi]$, $N \in \mathbb{N}$

$$K_{N,x}(y) = K_N(x,y), \quad F_{N,x}(y) = F_N(x,y), \quad y \in [0,x]$$

$$\text{und} \quad V_{N,x}f(y) = \int_0^x f(t)F_N(t,y)dt, \quad y \in [0,x],\ f \in C[0,x].$$

Aus der Integralgleichung $(*)$, folgt für jedes $x \in [0,\pi]$ und $N \in \mathbb{N}$

$$(I + V_x)\, K_{N,x} + (V_{N,x} - V_x)\, K_{N,x} + F_{N,x} = 0$$

und daher

$$K_{N,x} + (I + V_x)^{-1} (V_{N,x} - V_x)\, K_{N,x} + (I + V_x)^{-1} F_{N,x} = 0.$$

Nach dem Beweis von Satz 4.4.5 ist die Abbildung

$$x \mapsto \left\| \left(I + \tilde{V}_x\right)^{-1} \right\|$$

stetig auf $[0,\pi]$. Es existiert daher eine Konstante $C_V \in \mathbb{R}$, sodass

$$\left\|(I + V_x)^{-1}\right\| = \left\| \left(I + \tilde{V}_x\right)^{-1} \right\| < C_V, \quad x \in [0,\pi].$$

Da die Funktionen F_N für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen F konvergieren, gilt

$$\left\|(I + V_x)^{-1} (V_{N,x} - V_x)\right\| \le \pi\, C_V \,\|F_N - F\|_\infty < \frac{1}{2}, \quad x \in [0,\pi],$$

falls nur $N \ge N_0$ für ein bestimmtes $N_0 \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$K_{N,x} = -\left(I + (I + V_x)^{-1} (V_{N,x} - V_x)\right)^{-1} (I + V_x)^{-1} F_{N,x}, \quad x \in [0,\pi]$$

für alle $N \ge N_0$. Bezeichnet man mit $\|\cdot\|_x$ die Norm in $C[0,x]$, so gilt daher

$$\|K_{N,x}\|_x \le \frac{C_V\, \|F_{N,x}\|_x}{1 - \left\|(I + V_x)^{-1} (V_{N,x} - V_x)\right\|} \le 2\, C_V C_F, \quad x \in [0,\pi]$$

für alle $N \ge N_0$, wobei $C_F \in \mathbb{R}$, sodass $\|F_N\|_\infty < C_F$, $N \in \mathbb{N}$. Die Funktionen K_N, $N \in \mathbb{N}$ sind also durch eine Konstante $C_K \in \mathbb{R}$ beschränkt. Aus der Integralgleichung $(*)$ folgt

$$(I + V_x)\, K_{N,x} + F_x = (V_x - V_{N,x})\, K_{N,x} + F_x - F_{N,x}, \quad x \in [0,\pi],\ N \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$(I + V_x)^{-1} F_x = -K_x, \quad x \in [0,\pi]$$

folgt daraus, für alle $x \in [0,\pi]$ und $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\|K_{N,x} - K_x\|_x = \\
&\quad = \left\| (I+V_x)^{-1} (V_x - V_{N,x}) K_{N,x} + (I+V_x)^{-1} (F_x - F_{N,x}) \right\|_x \\
&\quad \le \left\| (I+V_x)^{-1} \right\| \|V_x - V_{N,x}\| \|K_{N,x}\|_x + \left\| (I+V_x)^{-1} \right\| \|F_x - F_{N,x}\|_x \\
&\quad \le \pi C_V C_K \|F - F_N\|_\infty + C_V \|F - F_N\|_\infty .
\end{aligned}$$

Die Folge K_N konvergiert also für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen K.

Wir wollen als nächstes zeigen, dass für jedes $x \in (0,\pi)$ und $N \in \mathbb{N}$, die Funktionen $K^1_{N,x}$

$$K^1_{N,x}(y) = \frac{\partial K_N}{\partial x}(x,y), \quad y \in (0,x)$$

für $N \to \infty$ in $L^2(0,x)$ konvergieren. Differenziert man die Integralgleichung $(*)$ nach der ersten Variable, so erhält man für alle $N \in \mathbb{N}$ die Integralgleichung

$$(**) \qquad K^1_{N,x}(y) + \int_0^x K^1_{N,x}(t) F(t,y) dt + G_{N,x}(y) = 0, \quad 0 < y < x < \pi,$$

wobei für jedes $x \in (0,\pi)$ die Funktion $G_{N,x}$ auf $(0,x)$ gegeben ist durch

$$G_{N,x}(y) = K_N(x,x) F_N(x,y) + \frac{\partial F_N}{\partial x}(x,y), \quad y \in (0,x).$$

Für $x \in (0,\pi)$ und $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Operatoren W_x und $W_{N,x}$

$$\begin{aligned}
W_x f(y) &= \int_0^x f(t) F(t,y) dt, \qquad & y \in [0,x],\ f \in L^2(0,x), \\
W_{N,x} f(y) &= \int_0^x f(t) F_N(t,y) dt, \qquad & y \in [0,x],\ f \in L^2(0,x),
\end{aligned}$$

auf $L^2(0,x)$. Ähnlich wie im Beweis von Satz 4.4.5 sieht man, dass die Operatoren $I + W_x$, $x \in (0,\pi]$ invertierbar sind und dass

$$\left\| (I+W_x)^{-1} \right\| < C_W, \quad x \in (0,\pi),$$

für eine Konstante $C_W \in \mathbb{R}$ gilt. Mit dieser Notation folgt dann aus der Integralgleichung $(**)$

$$(I+W_x) K^1_{N,x} + (W_{N,x} - W_x) K^1_{N,x} + G_{N,x} = 0, \quad x \in (0,\pi),\ N \in \mathbb{N}.$$

Wie oben sieht man, dass

$$\begin{aligned}
\left\| (I+W_x)^{-1} (W_{N,x} - W_x) \right\| &\le C_W \|W_{N,x} - W_x\| \\
&\le C_W \|F_N - F\|_2 < \frac{1}{2}, \quad x \in (0,\pi),
\end{aligned}$$

falls nur $N \ge N_1$ für ein bestimmtes $N_1 \in \mathbb{N}$. Daraus folgt für alle $x \in (0,\pi)$ und $N \ge N_1$

$$K^1_{N,x} = -\left(I + (I+W_x)^{-1} (W_{N,x} - W_x) \right)^{-1} (I+W_x)^{-1} G_{N,x}$$

und damit

$$\begin{aligned}\left\|K^1_{N,x}\right\|_{2,x} &\leq \frac{C_W \left\|G_{N,x}\right\|_{2,x}}{1-\left\|(I+W_x)^{-1}\left(W_{N,x}-W_x\right)\right\|} \leq 2\,C_W \left\|G_{N,x}\right\|_{2,x}\\ &\leq 2\,C_W C_K \left\|F_{N,x}\right\|_{2,x} + 2\,C_W \left\|\frac{\partial F_N}{\partial x}(x,\,\cdot\,)\right\|_{2,x}\\ &\leq 2\sqrt{\pi}C_W C_K C_F + 2\,C_W \left\|\Phi'_N\right\|_{\Phi},\end{aligned}$$

wobei hier $\|\cdot\|_{2,x}$ die Norm in $L^2(0,x)$ und $\|\cdot\|_{\Phi}$ die Norm in $L^2(-2\pi,2\pi)$ bezeichnet. Die Normen der Funktionen $K^1_{N,x}$ in $L^2(0,x)$ sind also für alle $x \in (0,\pi)$ und alle $N \geq N_1$ durch eine Konstante $C^1_K \in \mathbb{R}$ beschränkt. Sei nun für jedes $x \in (0,\pi)$ die Funktion $G_x \in L^2(0,\pi)$

$$G_x(y) = K(x,x)F(x,y) + \frac{1}{2}\left(\Phi'(x+y)+\Phi'(x-y)\right), \quad y \in (0,x).$$

Für jedes $x \in (0,\pi)$ folgt dann aus der Gleichung

$$(I+W_x)\,K^1_{N,x} + G_x = (W_x - W_{N,x})\,K^1_{N,x} + G_x - G_{N,x}, \quad N \in \mathbb{N},$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\left\|K^1_{N,x} + (I+W_x)^{-1}\,G_x\right\|_{2,x} =\\ &= \left\|(I+W_x)^{-1}\,(W_x - W_{N,x})\,K^1_{N,x} + (I+W_x)^{-1}\,(G_x - G_{N,x})\right\|_{2,x}\\ &\leq \left\|(I+W_x)^{-1}\right\|\,\left\|W_x - W_{N,x}\right\|\,\left\|K^1_{N,x}\right\|_{2,x} + \left\|(I+W_x)^{-1}\right\|\,\left\|G_x - G_{N,x}\right\|_{2,x}\\ &\leq \pi\,C_W C^1_K \left\|F_N - F\right\|_{\infty} + C_W \left\|\Phi' - \Phi'_N\right\|_{\Phi} +\\ &\qquad\qquad + \sqrt{\pi}\,C_W\left(C_K \left\|F_N - F\right\|_{\infty} + C_F \left\|K_N - K\right\|_{\infty}\right)\\ &\leq C\left(\left\|F_N - F\right\|_{\infty} + \left\|K_N - K\right\|_{\infty} + \left\|\Phi'_N - \Phi'\right\|_{\Phi}\right),\end{aligned}$$

für alle $N \geq N_1$ und eine bestimmte Konstante $C \in \mathbb{R}$. Die Funktionen $K^1_{N,x}$, $N \in \mathbb{N}$ konvergieren also für $N \to \infty$ in $L^2(0,x)$ gegen die Funktion $K^1_x = -(I+W_x)^{-1}G_x$, und zwar gleichmäßig für alle $x \in (0,\pi)$.

Sei nun für jedes $N \in \mathbb{N}$, K^D_N die Ableitung der Funktion $x \mapsto K_N(x,x)$ auf $[0,\pi]$, also

$$K_N(x,x) = K_N(0,0) + \int_0^x K^D_N(t)dt, \quad x \in [0,\pi].$$

Wir wollen nun schließlich zeigen, dass diese Funktionen für $N \to \infty$ in $L^2(0,\pi)$ konvergieren. In diesem Fall, folgt nämlich

$$K(x,x) = K(0,0) + \int_0^x \lim_{N\to\infty} K^D_N(t)dt, \quad x \in [0,\pi]$$

und damit die gewünschte Behauptung. Aus der Integralgleichung $(*)$ folgt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}-K^D_N(x) = K_N(x,x)F_N(x,x) &+ \int_0^x K_N(x,t)\frac{\partial F_N}{\partial y}(t,x)dt +\\ &+ \int_0^x K^1_{N,x}(t)F_N(t,x)dt + F^D_N(x), \quad x \in (0,\pi),\end{aligned}$$

wobei F_N^D die Ableitung der Funktion $x \mapsto F_N(x,x)$ auf $[0,\pi]$ bezeichnet. Wir müssen also zeigen, dass die einzelnen Summanden in $L^2(0,\pi)$ konvergieren. Da die Funktionen K_N und F_N gleichmäßig konvergieren, konvergiert der erste Summand sogar gleichmäßig. Auch der zweite und dritte Summand konvergiert gleichmäßig, denn

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \left| K_N(x,t)\frac{\partial F_N}{\partial y}(t,x) - K(x,t)\frac{1}{2}\left(\Phi'(t+x) - \Phi'(t-x)\right)\right| dt \leq \\
&\quad\leq \int_0^x |K_N(x,t) - K(x,t)| \left|\frac{\partial F_N}{\partial y}(t,x)\right| dt + \\
&\qquad + \int_0^x |K(x,t)| \left|\frac{\partial F_N}{\partial y}(t,x) - \frac{1}{2}\left(\Phi'(t+x) - \Phi'(t-x)\right)\right| dt \\
&\quad\leq \|K_N - K\|_\infty \sqrt{\pi} \left\|\Phi_N'\right\|_\Phi + C_K\sqrt{\pi}\left\|\Phi_N' - \Phi'\right\|_\Phi,
\end{aligned}$$

für alle $x \in (0,\pi)$, $N \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \left|K_{N,x}^1(t)F_N(t,x) - K_x^1(t)F(t,x)\right| dt \leq \\
&\quad\leq \int_0^x \left|K_{N,x}^1(t)\right| |F_N(t,x) - F(t,x)| \, dt + \\
&\qquad + \int_0^x |F(t,x)| \left|K_{N,x}^1(t) - K_x^1(t)\right| dt \\
&\quad\leq \|F_N - F\|_\infty \sqrt{\pi} \left\|K_{N,x}^1\right\|_{2,x} + C_F\sqrt{\pi}\left\|K_{N,x}^1 - K_x^1\right\|_{2,x} \\
&\quad\leq \|F_N - F\|_\infty \sqrt{\pi}\, C_K^1 + \\
&\qquad + C_F\sqrt{\pi}\, C\left(\|K_N - K\|_\infty + \|F_N - F\|_\infty + \left\|\Phi_N' - \Phi'\right\|_\Phi\right),
\end{aligned}$$

für alle $x \in (0,\pi)$, $N \geq N_1$. Wegen

$$F_N(x,x) = \frac{1}{2}\left(\Phi_N(2x) + \Phi_N(0)\right), \quad x \in [0,\pi],\ N \in \mathbb{N}$$

konvergiert auch

$$F_N^D(x) = \Phi_N'(2x), \quad x \in [0,\pi],\ N \in \mathbb{N}$$

für $N \to \infty$ in $L^2(0,\pi)$, womit der Beweis beendet ist. □

Wegen dieser Proposition gilt

$$K(x,x) = \cot\alpha + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt, \quad x \in [0,\pi],$$

für ein reellwertiges $q \in L^2(0,\pi)$ und ein $\alpha \in (0,\pi)$. Die Funktion q wird wegen Gleichung (4.2a) das Potential unseres Differentialausdrucks werden. Sei also im Folgenden τ der Sturm-Liouville Differentialausdruck auf $(0,\pi)$ mit Potential q und S diejenige selbstadjungierte Realisierung von τ mit der Randbedingung

$$f(0)\cos\alpha - f'(0)\sin\alpha = 0, \quad f \in \mathcal{D}(S)$$

bei 0 und der Randbedingung

$$W\left(f, \phi_{\lambda_0}\right)(\pi) = f(\pi)\phi_{\lambda_0}'(\pi) - f'(\pi)\phi_{\lambda_0}(\pi) = 0, \quad f \in \mathcal{D}(S)$$

bei π. Die Funktionen ϕ_z, $z \in \mathbb{C}$ sind dabei wieder, wie in Abschnitt 4.1 die Lösung der Gleichung $(\tau - z)u = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(0) = \sin\alpha \quad \text{und} \quad u'(0) = \cos\alpha.$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Zahlen $(\lambda_n, \kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tatsächlich die Spektraldaten von S sind. Dazu zeigen wir zuerst, dass die Funktion K der Kern des Transformationsoperators von S ist.

Proposition 4.4.7. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Funktion*

$$\varphi_z(x) = \cos\sqrt{z}x + \int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{z}t\,dt, \quad x \in [0,\pi]$$

eine Lösung von $(\tau - z)u = 0$ und zwar diejenige mit den Anfangswerten

$$u(0) = 1 \quad \textit{und} \quad u'(0) = \cot\alpha.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst unter der Annahme, dass Φ zweimal stetig differenzierbar auf $[-2\pi, 2\pi]$ ist. Nach dem Beweis von Proposition 4.4.6 ist K in diesem Fall zweimal stetig partiell differenzierbar im Inneren von Δ und die Ableitungen sind stetig auf $\Delta\backslash\{(0,0)\}$ fortsetzbar. Aus der Integralgleichung (4.4) folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,y) + \frac{q(x)}{2}F(x,y) + K(x,x)\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) +& \\ + \frac{\partial K}{\partial x}(x,x)F(x,y) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t)F(t,y)dt = 0&,\end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x,y) + \int_0^x K(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t,y)dt = 0$$

für alle (x,y) aus dem Inneren von Δ. Aus der Darstellung von F durch die Funktion Φ sieht man unmittelbar, dass

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(t,0) = \frac{\partial F}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t \in [0,\pi]$$

gilt. Weiters sieht man durch Differenzieren der Integralgleichung (4.4) nach der zweiten Variable, dass

$$\frac{\partial K}{\partial y}(x,0) = -\int_0^x K(x,t)\frac{\partial F}{\partial y}(t,0)dt - \frac{\partial F}{\partial y}(x,0) = 0, \quad x \in (0,\pi).$$

Subtrahiert man die obigen Gleichungen, so erhält man damit und durch partielle Integration für alle (x,y) im Inneren von Δ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x,y) - q(x)K(x,y) +& \\ + \int_0^x \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x,t) - q(x)K(x,t)\right)F(t,y)dt = 0&.\end{aligned}$$

Da die Funktion

$$H_x(y) = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x,y) - q(x)K(x,y), \quad y \in (0,x)$$

für jedes $x \in (0, \pi)$ stetig auf $[0, x]$ fortgesetzt werden kann, gilt also

$$(I + V_x)\, H_x = 0, \quad x \in (0, \pi),$$

wobei die Operatoren V_x, $x \in (0, x)$ wie im Beweis von Satz 4.4.5 definiert sind. Daraus folgt aber $H_x = 0$, $x \in (0, \pi)$ und damit

$$(**) \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x, y) + q(x)K(x, y), \quad 0 < y < x < \pi.$$

Differenziert man die Funktionen φ_z, $z \in \mathbb{C}$, so erhält man

$$\varphi_z'(x) = -\sqrt{z} \sin \sqrt{z}x + K(x, x) \cos \sqrt{z}x + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) \cos \sqrt{z}t \, dt,$$

für alle $x \in (0, \pi)$ und

$$\varphi_z''(x) = -z \cos \sqrt{z}x + \frac{q(x)}{2} \cos \sqrt{z}x - K(x, x)\sqrt{z} \sin \sqrt{z}x + \\ + \frac{\partial K}{\partial x}(x, x) \cos \sqrt{z}x + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t) \cos \sqrt{z}t \, dt, \quad x \in (0, \pi).$$

Mit $(*)$, $(**)$, der Gleichung

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial K}{\partial y}(x, x) = \frac{q(x)}{2}, \quad x \in (0, \pi)$$

und partieller Integration erhält man damit

$$-\varphi_z''(x) + q(x)\varphi_z(x) = z\varphi_z, \quad x \in (0, \pi),\ z \in \mathbb{C}.$$

Da die Funktionen φ_z, $z \in \mathbb{C}$ auch die geforderten Anfangswerte annehmen, ist die Behauptung in diesem Fall bewiesen.

Um die Behauptung auch im allgemeinen Fall einzusehen, verwenden wir die Funktionen K_N, $N \in \mathbb{N}$ aus dem Beweis von Proposition 4.4.6. Aus dem bereits Gezeigten folgt, dass die entsprechenden Funktionen $\varphi_{N,z}$, $z \in \mathbb{C}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\varphi_{N,z}(x) = \cos \sqrt{z}x + \cot \alpha_N \frac{\sin \sqrt{z}x}{\sqrt{z}} + \\ + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{z}(x - t)}{\sqrt{z}} q_N(t)\varphi_{N,z}(t) dt, \quad x \in [0, \pi]$$

erfüllen, wobei

$$K_N(x, x) = \cot \alpha_N + \frac{1}{2} \int_0^x q_N(s) ds, \quad x \in [0, \pi].$$

Da die Funktionen K_N für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen K konvergieren folgt, dass die Funktionen $\varphi_{N,z}$ für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen φ_z konvergieren und α_N gegen α konvergiert. Außerdem konvergieren nach dem Beweis von Proposition 4.4.6 die Potentiale q_N für $N \to \infty$ in $L^2(0, \pi)$ gegen q. Bildet man in obiger Gleichung den Grenzwert für $N \to \infty$, so erhält man

$$\varphi_z(x) = \cos \sqrt{z}x + \cot \alpha \frac{\sin \sqrt{z}x}{\sqrt{z}} + \\ + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{z}(x - t)}{\sqrt{z}} q(t)\varphi_z(t) dt, \quad x \in [0, \pi],$$

woraus die Behauptung im allgemeinen Fall folgt. □

Der Operator $I+V$, wobei

$$Vf(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt, \quad x \in [0,\pi],\ f \in L^2(0,\pi),$$

ist also der Transformationsoperator von S. Wir wollen nun die Inverse von $I+V$ bestimmen. Sei dazu L die Funktion

$$L(x,y) = F(x,y) + \int_0^y K(y,t)F(x,t)dt, \quad (x,y) \in \Delta \tag{4.5}$$

auf Δ und W der Operator

$$Wf(x) = \int_0^x L(x,t)f(t)dt, \quad x \in [0,\pi],\ f \in L^2(0,\pi),$$

auf $L^2(0,\pi)$.

Proposition 4.4.8. *Der Operator $I+W$ ist die Inverse von $I+V$.*

Beweis. Da die Funktionen φ_z, $z \in \mathbb{C}$ aus Proposition 4.4.7 den ganzen Raum $L^2(0,\pi)$ aufspannen, genügt es zu zeigen, dass die Gleichung

$$\cos\sqrt{z}x = \varphi_z(x) + \int_0^x L(x,t)\varphi_z(t)dt, \quad x \in [0,\pi]$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Der Beweis davon ist ähnlich dem Beweis von Proposition 4.4.7. Wir nehmen zuerst wieder an, dass Φ zweimal stetig differenzierbar ist. Wie im Beweis von Proposition 4.4.7 sieht man, dass

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) - q(y)L(x,y), \quad 0 < y < x < \pi$$

gilt. Weiters folgt aus (4.5)

$$\begin{aligned} L(x,x) &= F(x,x) + \int_0^x K(x,t)F(x,t)dt \\ &= -K(x,x) = -\cot\alpha - \frac{1}{2}\int_0^x q(s)ds, \quad x \in [0,\pi] \end{aligned}$$

und für alle $z \in \mathbb{C}$ und $x \in (0,\pi)$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,0)\varphi_z(0) - L(x,0)\varphi_z'(0) = \cot\alpha\, F(x,0)\varphi_z(0) - F(x,0)\varphi_z'(0) = 0.$$

Ist nun $z \in \mathbb{C}$ und setzt man

$$f_z(x) = \varphi_z(x) + \int_0^x L(x,t)\varphi_z(t)dt, \quad x \in [0,\pi],$$

so folgt daraus, ähnlich wie im Beweis von Proposition 4.4.7

$$-f_z''(x) = z\varphi_z(x) + z\int_0^x L(x,t)\varphi_z(t)dt = zf_z(x), \quad x \in [0,\pi].$$

Da die Funktionen f_z, $z \in \mathbb{C}$ die Anfangswerte $f_z(0) = 1$ und

$$f_z'(0) = \varphi_z'(0) + L(0,0)\varphi_z(0) = \cot\alpha - K(0,0) = 0$$

annehmen, ist damit die Behauptung in diesem Fall bewiesen.

Um die Behauptung auch im allgemeinen Fall einzusehen, verwenden wir wieder, wie im Beweis von Proposition 4.4.7 die Funktionen F_N und K_N, $N \in \mathbb{N}$. Die entsprechenden Funktionen L_N, $N \in \mathbb{N}$

$$L_N(x,y) = F_N(x,y) + \int_0^y K_N(y,t)F_N(x,t)dt, \quad (x,y) \in \Delta$$

auf Δ konvergieren für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen L und die Funktionen $\varphi_{N,z}$, $N \in \mathbb{N}$ konvergieren für jedes $z \in \mathbb{C}$ für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen die Funktion φ_z. Nach dem bereits Gezeigten gilt

$$\cos\sqrt{z}x = \varphi_{N,z}(x) + \int_0^x L_N(x,t)\varphi_{N,z}(t)dt, \quad x \in [0,\pi].$$

Bildet man den Grenzwert für $N \to \infty$, so erhält man das Gewünschte. $\square$

Für jedes $f \in L^2(0,\pi)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{F}f$ die Fouriertransformierte von f bezüglich S, wie in Abschnitt 4.1, also

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \int_0^\pi f(t)\phi_\lambda(t)dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4.4.9. *Für jedes $f \in L^2(0,\pi)$ gilt die Gleichung*

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\kappa_n} |\mathcal{F}f(\lambda_n)|^2 = \sin^2\alpha \, \|f\|^2.$$

Beweis. Ist $f \in L^2(0,\pi)$, so gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\lambda) &= \int_0^\pi f(t)\phi_\lambda(t)dt = \sin\alpha \int_0^\pi f(t)\varphi_\lambda(t)dt \\
&= \sin\alpha \int_0^\pi f(t)\cos\sqrt{\lambda}t\,dt + \sin\alpha \int_0^\pi f(t)\int_0^t K(t,s)\cos\sqrt{\lambda}s\,ds\,dt \\
&= \sin\alpha \int_0^\pi g(t)\cos\sqrt{\lambda}t\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

wobei

$$(*) \qquad g(t) = f(t) + \int_t^\pi K(s,t)f(s)ds = (I+V^*)f(t), \quad t \in [0,\pi].$$

Aus der Integralgleichung (4.4), sowie der Gleichung (4.5) folgt damit

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi F(x,t)g(t)dt &= \int_0^\pi f(t)\left(F(x,t) + \int_0^t K(t,s)F(s,x)ds\right)dt \\
&= \int_0^x f(t)\left(F(x,t) + \int_0^t K(t,s)F(s,x)ds\right)dt + \\
&\qquad + \int_x^\pi f(t)\left(F(t,x) + \int_0^t K(t,s)F(s,x)ds\right)dt \\
&= \int_0^x L(x,t)f(t)dt - \int_x^\pi K(t,x)f(t)dt, \quad x \in [0,\pi].
\end{aligned}$$

Man erhält daraus mit $(*)$ und

$$f(x) = (I+V^*)^{-1}g(x) = (I+W^*)g(x) = g(x) + \int_x^\pi L(t,x)g(t)dt, \quad x \in [0,\pi]$$

die Gleichung

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin^2\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\kappa_n}\left|\mathcal{F}f(\lambda_n)\right|^2 = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\int_0^\pi g(t)\cos nt dt\right|^2}{\kappa_{a,n}^0} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\int_0^\pi g(t)\cos\sqrt{\lambda_n}t dt\right|^2}{\kappa_n} - \frac{\left|\int_0^\pi g(t)\cos nt dt\right|^2}{\kappa_{a,n}^0} \\
&= \|g\|^2 + \int_0^\pi\int_0^\pi \overline{g(s)}g(t)F(s,t)dt\,ds \\
&= \|g\|^2 + \int_0^\pi \overline{g(s)}\left(\int_0^s L(s,t)f(t)dt - \int_s^\pi K(t,s)f(t)dt\right)ds \\
&= \|g\|^2 + \int_0^\pi f(t)\int_t^\pi L(s,t)\overline{g(s)}ds\,dt - \int_0^\pi \overline{g(s)}\int_s^\pi K(t,s)f(t)dt\,ds \\
&= \|g\|^2 + \int_0^\pi f(t)\left(\overline{f(t)} - \overline{g(t)}\right)dt - \int_0^\pi \overline{g(s)}\left(g(s) - f(s)\right)ds \\
&= \|f\|^2.
\end{aligned}
$$

□

Wir zeigen nun, dass die Zahlen $(\lambda_n, \kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tatsächlich die Spektraldaten von S sind.

SATZ 4.4.10. *Die Zahlen $(\lambda_n, \kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind die Spektraldaten von S.*

BEWEIS. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von S, wenn

$$W(\phi_\lambda, \phi_{\lambda_0})(\pi) = 0.$$

Da die Funktionen ϕ_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ die Randbedingung bei 0 erfüllen, gilt

$$
\begin{aligned}
W(\phi_{\lambda_n}, \phi_{\lambda_m})(\pi) &= W(\phi_{\lambda_n}, \phi_{\lambda_m})(\pi) - W(\phi_{\lambda_n}, \phi_{\lambda_m})(0) \\
&= \int_0^\pi W(\phi_{\lambda_n}, \phi_{\lambda_m})'(t)dt \\
&= (\lambda_n - \lambda_m)\int_0^\pi \phi_{\lambda_n}(t)\phi_{\lambda_m}(t)dt, \quad n,\ m \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}
$$

Um zu zeigen, dass die Zahlen λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ Eigenwerte von S sind, genügt es daher zu zeigen, dass die Funktionen ϕ_{λ_n}, $n \in \mathbb{N}_0$ paarweise orthogonal aufeinander sind. Für jedes feste $m \in \mathbb{N}_0$ folgt aus der Asymptotik der Zahlen λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ und der Funktionen ϕ_{λ_n}, $n \in \mathbb{N}_0$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \phi_{\lambda_n}(t)\phi_{\lambda_m}(t)dt &= \frac{\phi_{\lambda_n}(\pi)\phi_{\lambda_m}'(\pi) - \phi_{\lambda_n}'(\pi)\phi_{\lambda_m}(\pi)}{\lambda_n - \lambda_m} \\
&= \phi_{\lambda_m}(\pi)\sin\alpha\,\frac{\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}\pi}{\lambda_n - \lambda_m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

für $n \to \infty$. Daraus folgt, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\kappa_n}\int_0^\pi \phi_{\lambda_n}(t)\phi_{\lambda_m}(t)dt\ \phi_{\lambda_n}(x), \quad x \in [0,\pi]$$

absolut und gleichmäßig konvergiert. Aus Proposition 4.4.9 erhält man

$$(f,g)\sin^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa_n} \mathcal{F}f\,(\lambda_n)\,\overline{\mathcal{F}g\,(\lambda_n)}, \quad f,\ g \in L^2(0,\pi),$$

woraus die Gleichheit

$$(\phi_{\lambda_m}, f)\sin^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\phi_{\lambda_n}, \phi_{\lambda_m})}{\kappa_n}\,(\phi_{\lambda_n}, f) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\phi_{\lambda_n}, \phi_{\lambda_m})}{\kappa_n}\phi_{\lambda_n}, f\right),$$

für alle $f \in L^2(0,\pi)$ folgt. Also gilt notwendigerweise

$$\sin^2\alpha\ \phi_{\lambda_m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa_n} \int_0^{\pi} \phi_{\lambda_n}(t)\phi_{\lambda_m}(t)dt\ \phi_{\lambda_n}(x), \quad x \in [0,\pi].$$

Durch Anwenden des Transformationsoperators $I+V$ folgt

$$\sin^2\alpha\ \cos\sqrt{\lambda_m}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa_n} \int_0^{\pi} \phi_{\lambda_n}(t)\phi_{\lambda_m}(t)dt\ \cos\sqrt{\lambda_n}x, \quad x \in [0,\pi].$$

Aus Satz A.3.3 folgt daher für alle $n,\ m \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{1}{\kappa_n}\int_0^{\pi} \phi_{\lambda_n}(t)\phi_{\lambda_m}(t)dt = \begin{cases} \sin^2\alpha, & \text{falls } n = m \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Zahlen λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ sind also Eigenwerte von S. Dass diese Zahlen bereits alle Eigenwerte von S sind, folgt aus der Asymptotik der Zahlen λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen

$$\|\phi_{\lambda_n}\|^2 = \int_0^{\pi} \phi_{\lambda_n}(t)\phi_{\lambda_n}(t)dt = \kappa_n \sin^2\alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

sind die Zahlen $(\lambda_n, \kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Spektraldaten des Operators S. □

Wir haben damit Satz 4.4.3 im Fall (4.3a) unter der zusätzlichen Voraussetzung $\lambda = 0$ bewiesen. Den allgemeinen Fall $\lambda \neq 0$ führen wir nun auf diesen Fall zurück.

Beweis von Satz 4.4.3. Sei λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ eine streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen und κ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ eine Folge positiver Zahlen, die

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\lambda}{n} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad \kappa_n = \frac{\pi}{2} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

für $n \to \infty$ und eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllen. Wir betrachten die Folgen $\tilde\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\tilde\kappa_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, definiert durch

$$\tilde\lambda_n = \lambda_n - 2\lambda \quad \text{und} \quad \tilde\kappa_n = \kappa_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Diese Folgen erfüllen

$$\sqrt{\tilde\lambda_n} = n + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad \tilde\kappa_n = \frac{\pi}{2} + \ell^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

für $n \to \infty$. Nach dem bereits Gezeigten existiert daher ein Sturm-Liouville Differentialausdruck $\tilde\tau$ mit Potential $\tilde q \in L^2(0,\pi)$, sowie Zahlen $\alpha,\ \beta \in [0,\pi)$, sodass die Zahlen $(\tilde{\lambda}_n, \tilde{\kappa}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Spektraldaten der selbstadjungierten Realisierung $\tilde{S}$ von $\tilde{\tau}$ mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} f(0)\cos\alpha - f'(0)\sin\alpha &= 0, \\ f(\pi)\cos\beta - f'(\pi)\sin\beta &= 0, \end{aligned}$$

sind. Sei nun τ der Sturm-Liouville Differentialausdruck auf $(0,\pi)$ mit Potential $q = \tilde{q} + 2\lambda$ und S die selbstadjungierte Realisierung von τ mit den selben Randbedingungen wie $\tilde{S}$. Man sieht daraus, dass die Definitionsbereiche von S und $\tilde{S}$ übereinstimmen und dass $S = \tilde{S} + 2\lambda$ gilt. Die Eigenwerte von S sind also genau die Zahlen $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n + 2\lambda$, $n \in \mathbb{N}_0$. Bezeichnet man mit ϕ_z und $\tilde{\phi}_z$, $z \in \mathbb{C}$ die entsprechenden Lösungen, wie in Abschnitt 4.1, so gilt wegen

$$\phi_z = \tilde{\phi}_{z-2\lambda}, \quad z \in \mathbb{C}$$

außerdem

$$\|\phi_{\lambda_n}\|^2 = \left\|\tilde{\phi}_{\lambda_n-2\lambda}\right\|^2 = \left\|\tilde{\phi}_{\tilde{\lambda}_n}\right\|^2 = \tilde{\kappa}_n \sin^2\alpha = \kappa_n \sin^2\alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Zahlen $(\lambda_n, \kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind also die Spektraldaten von S. □

4.5. Inverse und halbinverse Eindeutigkeitssätze

Sei τ in diesem Abschnitt wieder ein regulärer Sturm-Liouville Differentialausdruck auf dem Intervall $(0,\pi)$ mit Potential $q \in L^1(0,\pi)$ und $\beta \in [0,\pi)$. Für jedes $\alpha \in [0,\pi)$ sei S_α die selbstadjungierte Realisierung von τ mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} f(0)\cos\alpha - f'(0)\sin\alpha &= 0, \\ f(\pi)\cos\beta - f'(\pi)\sin\beta &= 0, \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{D}(S_\alpha)$. Weiters bezeichnen wir mit m_α die Weyl-Titchmarsh m-Funktion des Operators S_α und mit σ_α das Spektrum von S_α.

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ sei u_z die Lösung von $(\tau - z)u = 0$ mit den Anfangswerten

$$u_z(\pi) = \sin\beta \quad \text{und} \quad u_z'(\pi) = \cos\beta.$$

Die Funktionen u_z, $z \in \mathbb{C}$ erfüllen also die Randbedingung bei π und eine reelle Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert von S_α, wenn u_λ zusätzlich die entsprechende Randbedingung bei 0 erfüllt, also

$$\lambda \in \sigma_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad u_\lambda(0)\cos\alpha - u_\lambda'(0)\sin\alpha = 0.$$

Da die Lösung u_z für jedes $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ein skalares Vielfaches der Weyl-Lösung ψ_z ist, erhält man mit Gleichung (3.2) aus Abschnitt 3.4

$$m_\alpha(z) = \frac{u_z(0)\sin\alpha + u_z'(0)\cos\alpha}{u_z(0)\cos\alpha - u_z'(0)\sin\alpha}, \quad z \in \varrho(S_\alpha)$$

und insbesondere für $\alpha = 0$

$$m_0(z) = \frac{u_z'(0)}{u_z(0)}, \quad z \in \varrho(S_0).$$

Zusammenfassend gilt

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma_\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad u_\lambda(0)\cos\alpha - u'_\lambda(0)\sin\alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad u_\lambda(0) = 0, && \text{falls } \alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad m_0(\lambda) = \cot\alpha, && \text{falls } \alpha \in (0,\pi).
\end{aligned}$$

Insbesondere sieht man daraus, dass die Spektren σ_α für verschiedene Zahlen α paarweise disjunkt sind, also

$$\sigma_{\alpha_1} \cap \sigma_{\alpha_2} = \emptyset, \quad \alpha_1,\ \alpha_2 \in [0,\pi),\ \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Wir wollen in diesem Abschnitt Eindeutigkeitssätze zeigen, die Teilmengen der Spektren σ_α verwenden. Dazu sei für jedes $M_\alpha \subseteq \sigma_\alpha$ die Funktion N_{M_α} auf $\mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion von M_α, also

$$N_{M_\alpha}(t) = \#\left\{\lambda \in M_\alpha \mid \lambda \leq t\right\} = \sum_{\substack{\lambda \in M_\alpha \\ \lambda \leq t}} 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Als Vorbereitung für die folgenden Eindeutigkeitssätze brauchen wir noch eine Variante des Phragmén-Lindelöf Prinzips.

Lemma 4.5.1. *Sei f eine ganze Funktion, $\eta \in (0,1)$ und $r_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ eine Folge positiver Zahlen, sodass*

$$\sup_{\substack{z\in\mathbb{C} \\ |z|=r_k}} |f(z)| \leq Ce^{Br_k^\eta}, \quad k \in \mathbb{N}$$

für bestimmte Konstanten B, $C \in \mathbb{R}$. Falls f zusätzlich

$$f(ix) \to 0, \quad \textit{für } |x| \to \infty \textit{ in } \mathbb{R}$$

erfüllt, so gilt $f = 0$.

Beweis. Wir wählen eine, im Folgenden feste Zahl $\nu \in (\eta, 1)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ sei g_ε die auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ analytische Funktion

$$g_\varepsilon(z) = e^{-\varepsilon e^{\nu \log z}}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0],$$

wobei log denjenigen auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ analytischen Zweig des Logarithmus bezeichnet, für den $\log 1 = 0$ gilt. Es gilt dann

$$\left|g_\varepsilon\left(re^{i\varphi}\right)\right| = e^{-\varepsilon r^\nu \cos(\nu\varphi)} \leq e^{-\varepsilon r^\nu \cos\frac{\nu\pi}{2}}, \quad r > 0,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Insbesondere ist g_ε auf der imaginären Achse durch 1 beschränkt. Sei nun ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z_0) > 0$ gegeben und $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$r_k > \max\left(|z_0|, \left|\frac{2B}{\varepsilon\cos\frac{\nu\pi}{2}}\right|^{\frac{1}{\nu-\eta}}, \left|\frac{\log(CK^{-1})}{B}\right|^{\frac{1}{\eta}}\right),$$

wobei $K \in \mathbb{R}$, sodass $|f(ix)| \leq K$, $x \in \mathbb{R}$. Weiters bezeichnen wir mit $D \subseteq \mathbb{C}$ den Kreissektor

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r_k,\ \mathrm{Re}(z) > 0\}.$$

Die Funktion $|fg_\varepsilon|$ ist auf der imaginären Achse durch K beschränkt. Außerdem folgt für alle $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aus der Voraussetzung an r_k

$$\left|f\left(r_k e^{i\varphi}\right) g_\varepsilon\left(r_k e^{i\varphi}\right)\right| \leq Ce^{Br_k^\eta} e^{-\varepsilon r_k^\nu \cos\frac{\nu\pi}{2}} \leq Ce^{-Br_k^\eta} \leq K.$$

Diese Funktion ist also auf dem Rand von D durch K beschränkt. Nach dem Maximumsprinzip gilt daher $|fg_\varepsilon| \leq K$ auf ganz D, insbesondere auch für z_0, also

$$|f(z_0)g_\varepsilon(z_0)| = \left| f(z_0)e^{-\varepsilon e^{\nu \log z_0}} \right| \leq K.$$

Da diese Abschätzung für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt daraus $|f(z_0)| \leq K$. Also ist f auf der ganzen rechten Halbebene durch K beschränkt. Entsprechend zeigt man, dass f auch auf der linken Halbebene durch K beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist damit f konstant und wegen $f(ix) \to 0$ für $x \to \infty$ gilt $f = 0$. □

Wir wollen nun einige Eindeutigkeitssätze beweisen. Seien dazu τ_1 und τ_2 zwei reguläre Sturm-Liouville Differentialausdrücke auf $(0, \pi)$ mit Potentialen q_1 und q_2 und β_1, $\beta_2 \in [0, \pi)$. Weiters sei für jedes $\alpha \in [0, \pi)$ und $i \in \{1, 2\}$, $S_{i,\alpha}$ die selbstadjungierte Realisierung von τ_i mit den Randbedingungen

$$f(0)\cos\alpha - f'(0)\sin\alpha = 0,$$
$$f(\pi)\cos\beta_i - f'(\pi)\sin\beta_i = 0,$$

$f \in \mathcal{D}(S_{i,\alpha})$ und die Größen $m_{i,\alpha}$, $\sigma_{i,\alpha}$ und $u_{i,\alpha}$ wie am Anfang dieses Abschnitts definiert.

Satz 4.5.2. *Seien $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in [0, \pi)$ paarweise verschieden. Weiters seien $M_{\alpha_i} \subseteq \sigma_{1,\alpha_i}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$ Teilmengen der Spektren, sodass*

$$N_{M_{\alpha_i}}(t) \geq \eta_i \, N_{\sigma_{1,\alpha_i}}(t) + k_i, \quad t \geq t_0, \ i \in \{1, \ldots, N\},$$

für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, wobei die Zahlen $\eta_i \in [0, 1]$, $k_i \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{i=1}^{N} \eta_i \geq 2 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{N} k_i \geq 0$$

erfüllen. Gilt dann $M_{\alpha_i} \subseteq \sigma_{2,\alpha_i}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, so folgt $m_{1,0} = m_{2,0}$ und damit $q_1 = q_2$ und $\beta_1 = \beta_2$.

Beweis. Wir betrachten die Produkte

$$H_{M_{\alpha_i}}(z) = \prod_{\lambda \in M_{\alpha_i}} E_\lambda(z), \quad z \in \mathbb{C}, \ i \in \{1, \ldots, N\},$$

wobei E_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ die ganzen Funktionen

$$E_\lambda(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{\lambda}, & \text{falls } \lambda \neq 0 \\ z, & \text{falls } \lambda = 0 \end{cases}$$

sind. Wie in Abschnitt A.2 sieht man, dass diese Produkte wegen der Asymptotik der Eigenwerte lokal gleichmäßig konvergieren. Die Nullstellen dieser Funktionen $H_{M_{\alpha_i}}$ sind einfach und genau die Elemente von M_{α_i}. Außerdem haben wir für diese Funktionen die Abschätzungen aus Lemma A.2.2 und Lemma A.2.3 zur Verfügung. Da die Mengen M_{α_i} paarweise disjunkt sind hat auch die Funktion

$$H(z) = \prod_{i=1}^{N} H_{M_{\alpha_i}}(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

nur einfache Nullstellen. Ist $\lambda \in M_{\alpha_i}$ für ein $i \in \{1, \dots, N\}$, so gilt nach Voraussetzung

$$m_{1,0}(\lambda) = \cot \alpha_i = m_{2,0}(\lambda), \quad \text{falls } \alpha_i \in (0, \pi)$$

und

$$u_{1,\lambda}(0) = u_{2,\lambda}(0) = 0, \quad \text{falls } \alpha_i = 0.$$

In beiden Fällen folgt daraus

$$u'_{1,\lambda}(0)u_{2,\lambda}(0) - u'_{2,\lambda}(0)u_{1,\lambda}(0) = 0.$$

Die Funktion G

$$G(z) = \frac{u'_{1,z}(0)u_{2,z}(0) - u'_{2,z}(0)u_{1,z}(0)}{H(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{N} M_{\alpha_i} \right)$$

lässt sich daher analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. Nach Satz 1.2.8 und Lemma A.2.3 erfüllt sie die erste Voraussetzung von Lemma 4.5.1. Wie in Lemma 4.2.1 sieht man, dass

$$u_{i,z}(0) = \mathcal{O}\left(e^{\sqrt{-z}\pi}\right), \quad i \in \{1, 2\},$$

für $|z| \to \infty$ in $\mathbb{C}$ gilt. Ist $\beta = 0$, so gilt sogar

$$u_{i,z}(0) = \mathcal{O}\left(\frac{e^{\sqrt{-z}\pi}}{\sqrt{z}}\right), \quad i \in \{1, 2\},$$

für $|z| \to \infty$ in $\mathbb{C}$. Mit Lemma A.2.2, sowie der Voraussetzung an die Zahlen η_i und k_i, $i \in \{1, \dots, N\}$ folgt damit

$$\begin{aligned}
|G(ix)| &= \frac{|u_{1,ix}(0)u_{2,ix}(0)|}{|H(ix)|} \left|m_{1,0}(ix) - m_{2,0}(ix)\right| \\
&\leq Ce^{\left(2 - \sum_{i=1}^{N} \eta_i\right)\pi \mathrm{Re}\sqrt{-ix}} |x|^{-\sum_{i=1}^{N} k_i} \left|m_{1,0}(ix) - m_{2,0}(ix)\right| \\
&\leq C \left|m_{1,0}(ix) - m_{2,0}(ix)\right|, \quad x \in \mathbb{R},\ |x| > R
\end{aligned}$$

für bestimmte Konstanten C, $R \in \mathbb{R}$. Aus Satz 3.4.7 folgt, dass dieser Ausdruck gegen Null konvergiert, falls $|x| \to \infty$ in $\mathbb{R}$. Nach Lemma 4.5.1 gilt also notwendigerweise $G = 0$ und damit $m_{1,0} = m_{2,0}$. □

Die Forderung an die Zahlen k_i in diesem Satz kann in manchen, aber nicht in allen Fällen abgeschwächt werden. Fordert man beispielsweise, dass die Randbedingung bei π, a priori gleich ist, also $\beta_1 = \beta_2$ und dass bei 0 keine Dirichlet-Randbedingungen vorliegen, also $\alpha_1, \dots, \alpha_N \neq 0$, so genügt auch schon

$$\sum_{i=1}^{N} k_i \geq -1.$$

Das folgt daraus, dass man in diesem Fall bessere Abschätzungen für die, im Beweis auftretenden Funktionen $H_{M_{\alpha_i}}$ hat. Anschaulich bedeutet das, dass man in diesem Fall um einen Eigenwert weniger benötigt, um das Potential eindeutig zu bestimmen.

Als einen Spezialfall dieses Satzes erhalten wir, dass zwei Spektren ausreichen, um das Potential und die Randbedingung bei π eindeutig zu bestimmen.

Korollar 4.5.3. *Gilt*

$$\sigma_{1,\alpha_1} = \sigma_{2,\alpha_1} \quad \textit{und} \quad \sigma_{1,\alpha_2} = \sigma_{2,\alpha_2},$$

für zwei verschiedene α_1*,* $\alpha_2 \in [0, \pi)$*, so gilt bereits* $m_{1,0} = m_{2,0}$*.*

Die Bemerkung nach Satz 4.5.2 gilt auch hier. Ist die Randbedingung bei π a priori bekannt und gilt α_1, $\alpha_2 \neq 0$, so genügt es auch, wenn sich eines der zwei Spektren um einen Eigenwert unterscheiden. Insbesondere sieht man, dass ein einzelner Eigenwert in diesem Fall nicht unabhängig von den restlichen Eigenwerten der zwei Spektren ist.

Setzt man voraus, dass die Potentiale q_1 und q_2 für ein $c \in (0, \pi)$ auf dem Intervall $(0, c)$ übereinstimmen, so kann man erwarten, dass weniger Information über die Spektren notwendig ist, um auf Gleichheit der Potentiale zu schließen. Die folgende Verallgemeinerung von Satz 4.5.2 zeigt, dass das tatsächlich der Fall ist.

Satz 4.5.4. *Seien* $c \in [0, \pi)$*,* $N \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in [0, \pi)$ *paarweise verschieden. Weiters seien* $M_{\alpha_i} \subseteq \sigma_{1,\alpha_i}$*,* $i \in \{1, \ldots, N\}$ *Teilmengen der Spektren, sodass*

$$N_{M_{\alpha_i}}(t) \geq \eta_i \; N_{\sigma_{1,\alpha_i}}(t) + k_i, \quad t \geq t_0, \; i \in \{1, \ldots, N\},$$

für ein $t_0 \in \mathbb{R}$*, wobei die Zahlen* $\eta_i \in [0, 1]$*,* $k_i \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{i=1}^{N} \eta_i \geq 2\left(1 - \frac{c}{\pi}\right) \quad \textit{und} \quad \sum_{i=1}^{N} k_i \geq 0$$

erfüllen. Gilt dann $q_1(x) = q_2(x)$ *für fast alle* $x \in (0, c)$*, sowie* $M_{\alpha_i} \subseteq \sigma_{2,\alpha_i}$*,* $i \in \{1, \ldots, N\}$*, so folgt* $m_{1,0} = m_{2,0}$ *und damit* $q_1 = q_2$ *und* $\beta_1 = \beta_2$*.*

Beweis. Wir können uns auf den Fall $c \in (0, \pi)$ einschränken. Mit der Notation, wie im Beweis von Satz 4.5.2 gilt

$$\begin{aligned} |G(ix)| &= \frac{|u_{1,ix}(0) u_{2,ix}(0)|}{|H(ix)|} \, |m_{1,0}(ix) - m_{2,0}(ix)| \\ &\leq C e^{2c \operatorname{Re} \sqrt{-ix}} \, |m_{1,0}(ix) - m_{2,0}(ix)| \, , \quad x \in \mathbb{R}, \; |x| > R \end{aligned}$$

für Konstanten C, $R \in \mathbb{R}$. Mit dem lokalen Eindeutigkeitssatz 3.5.5 folgt

$$|G(ix)| \to 0, \quad \text{für } |x| \to \infty \text{ in } \mathbb{R}.$$

Nach Lemma 4.5.1 gilt daher $G = 0$ und damit $m_{1,0} = m_{2,0}$. □

Auch hier genügt unter der zusätzlichen Voraussetzung $\beta_1 = \beta_2$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \neq 0$ wieder die Forderung

$$\sum_{i=1}^{N} k_i \geq -1.$$

Kennt man das Potential auf dem halben Intervall, so genügt bereits ein Spektrum um den Operator eindeutig zu bestimmen.

Korollar 4.5.5. *Gilt für ein* $\alpha \in [0, \pi)$

$$\sigma_{1,\alpha} = \sigma_{2,\alpha} \quad \textit{und} \quad q_1(x) = q_2(x), \quad \textit{für fast alle } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

so gilt bereits $m_{1,0} = m_{2,0}$*.*

4.6. Symmetrische Potentiale

Im vorigen Abschnitt 4.5 haben wir gesehen, dass falls das Potential lokal um den Randpunkt 0 bekannt ist, weniger Eigenwerte notwendig sind um das Potential eindeutig zu bestimmen. In diesem Abschnitt wollen wir die Eindeutigkeit unter der Annahme eines symmetrischen Potentials untersuchen. Sei dazu τ ein regulärer Sturm-Liouville Differentialausdruck auf dem Intervall $(0, \pi)$ mit einem Potential q, das symmetrisch um den Intervallmittelpunkt ist, also

$$q(x) = q(\pi - x), \quad \text{für fast alle } x \in (0, \pi).$$

Weiters sei $\alpha \in [0, \pi)$ und S die selbstadjungierte Realisierung von τ mit den symmetrischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} f(0) \cos\alpha - f'(0) \sin\alpha &= 0, \\ f(\pi) \cos\alpha + f'(\pi) \sin\alpha &= 0, \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{D}(S)$. Diese Randbedingungen sind ein Spezialfall der allgemeineren Randbedingungen aus Abschnitt 4.1. Nämlich der Fall, in dem $\sin(\alpha+\beta) = 0$ gilt, also $\alpha + \beta = 0$ modulo π.

Proposition 4.6.1. *Jeder Eigenvektoren ϕ von S ist symmetrisch oder antisymmetrisch, also*

$$\phi(x) = \pm\phi(\pi - x), \quad x \in (0, \pi).$$

Insbesondere gilt

$$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \textit{oder} \quad \phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Beweis. Sei ϕ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Setzt man

$$g(x) = f(\pi - x), \quad x \in [0, \pi],$$

so gilt

$$\begin{aligned} \tau g(x) &= -g''(x) + q(x)g(x) = -f''(\pi - x) + q(\pi - x)f(\pi - x) \\ &= Sf(\pi - x) = \lambda f(\pi - x) = \lambda g(x), \end{aligned}$$

für fast alle $x \in (0, \pi)$. Außerdem erfüllt g die Randbedingungen, denn

$$\begin{aligned} g(0) \cos\alpha - g'(0) \sin\alpha &= f(\pi) \cos\alpha + f'(\pi) \sin\alpha = 0, \\ g(\pi) \cos\alpha + g'(\pi) \sin\alpha &= f(0) \cos\alpha - f'(0) \sin\alpha = 0. \end{aligned}$$

Da alle Eigenwerte einfach sind, folgt daraus $f = cg$, für eine Konstante $c \in \mathbb{C}^\times$. Aus

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

folgert man, $c = 1$ oder $c = -1$, woraus genau die Behauptung folgt. □

Wir wollen nun Eindeutigkeitssätze im Fall von symmetrischen Potentialen beweisen. Dazu seien τ_1 und τ_2 reguläre Sturm-Liouville Differentialausdrücke auf dem Intervall $(0, \pi)$ mit symmetrischen Potentialen q_1 und q_2. Weiters seien α_1, $\alpha_2 \in [0, \pi)$ und S_1 und S_2 die entsprechenden selbstadjungierten Realisierungen mit symmetrischen Randbedingunen wie oben.

Satz 4.6.2. *Stimmen die Spektren von S_1 und S_2 überein, also*

$$\sigma\left(S_1\right) = \sigma\left(S_2\right),$$

so gilt bereits $q_1 = q_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$.

Beweis. Für jedes $z \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2\}$ sei $u_{i,z}$ die Lösung von $(\tau_i - z)\, u = 0$ mit den Anfangswerten

$$u_{i,z}(\pi) = -\sin\alpha \quad \text{und} \quad u_{i,z}'(\pi) = \cos\alpha.$$

Weiters sei $S_{i,0}$ die selbstadjungierte Realisierung von $\tau_i|_{(\pi/2,\pi)}$ mit Dirichlet-Randbedingungen bei $\pi/2$ und der selben Randbedingung wie S_i bei π. Dann gilt für die m-Funktion m_i von $S_{i,0}$

$$m_i(z) = \frac{u_{i,z}'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{u_{i,z}\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \quad z \in \varrho\left(S_{i,0}\right).$$

Aus Proposition 4.6.1 folgt nun, dass

$$u_{1,\lambda}\left(\frac{\pi}{2}\right) u_{2,\lambda}'\left(\frac{\pi}{2}\right) - u_{2,\lambda}\left(\frac{\pi}{2}\right) u_{1,\lambda}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \lambda \in \sigma(S_1).$$

Setzt man

$$H(z) = \prod_{\lambda \in \sigma(S_1)} E_\lambda(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

wobei E_λ, $\lambda \in \sigma(S_1)$ die ganzen Funktionen

$$E_\lambda(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{\lambda}, & \text{falls } \lambda \neq 0 \\ z, & \text{falls } \lambda = 0 \end{cases}$$

sind, so lässt sich die Funktion G

$$G(z) = \frac{u_{1,z}\left(\frac{\pi}{2}\right) u_{2,z}'\left(\frac{\pi}{2}\right) - u_{2,z}\left(\frac{\pi}{2}\right) u_{1,z}'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{H(z)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\sigma(S_1)$$

analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. Wie im Beweis von Satz 4.5.2 genügt es nun zu zeigen, dass

$$|G(ix)| = \frac{\left|u_{1,ix}\left(\frac{\pi}{2}\right) u_{2,ix}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|}{|H(ix)|} \left|m_1(ix) - m_2(ix)\right| \to 0$$

für $|x| \to \infty$ in $\mathbb{R}$. Das folgt aber wie im Beweis von Satz 4.5.2 aus Lemma 4.2.1, Lemma A.2.1 sowie Satz 3.4.7. □

4.7. Anmerkungen

Wir wollen dieses Kapitel mit einigen ergänzenden und weiterführenden Anmerkungen beschließen.

1. Dass wir uns auf das Intervall $(0, \pi)$ festgelegt haben, stellt keine wesentliche Einschränkung dar. Jeder reguläre Sturm-Liouville Differentialausdruck lässt sich durch eine geeignete Transformation in einen Sturm-Liouville Differentialausdruck auf dem Intervall $(0, \pi)$ überführen. Die Eigenwerte eines so transformierten Operators unterscheiden sich um einen positiven Faktor von den Eigenwerten des ursprünglichen Operators.

2. Wir haben in Abschnitt 4.2 das asymptotische Verhalten der Eigenwerte für integrierbare und quadratisch integrierbare Potentiale untersucht. Fordert man zusätzliche Regularität von q, wie beispielsweise beschränkte Variation oder Differenzierbarkeit, so erhält man bessere asymptotische Abschätzungen. Ergebnisse dieser Art finden sich beispielsweise in [48], [49], [25] und [33].

3. Satz 4.2.8 über die gleichgradige Konvergenz von Fourierentwicklungen gilt auch, falls man nur $q \in L^1(0, \pi)$ fordert. Siehe beispielsweise [52].

4. In Abschnitt 4.4 haben wir alle möglichen Spektraldaten von Sturm-Liouville Operatoren mit quadratisch integrierbaren Potentialen bestimmt. Im Gegensatz dazu sind die möglichen Spektraldaten von Operatoren mit nur integrierbarem Potential nicht nur durch die Asymptotik aus Satz 4.2.4 und Satz 4.2.6 bestimmt. Man muss in diesem Fall auch noch fordern, dass der Grenzwert Φ der Funktionen Φ_N aus Abschnitt 4.4, die auch hier wegen der Asymptotik zumindest in $L^2(-2\pi, 2\pi)$ konvergieren, absolut stetig ist. Man kann auch zeigen, dass diese Bedingung notwendig ist. Man hat damit also eine Charakterisierung aller möglichen Spektraldaten von Sturm-Liouville Differentialoperatoren mit integrierbaren Potentialen. Siehe beispielsweise [29] oder [31].

5. Eines der ersten Eindeutigkeitsresultate war, dass zwei Spektren das Potential eindeutig bestimmen, siehe [33]. Satz 4.5.2 ist eine Verallgemeinerung davon. Eindeutigkeitssätze dieser Art, die Teilmengen der Spektren verwenden findet man in [39] und [40].

6. Falls sich in Korollar 4.5.3 eines der beiden Spektren um endlich viele Eigenwerte unterscheiden, so kann man die Differenz der Potentiale q_1 und q_2 durch bestimmte Lösungen darstellen. Für solche Ergebnisse, siehe beispielsweise [34], [37] oder [32].

7. Eindeutigkeitssätze, die Kenntnis des Potentials auf dem halben Intervall voraussetzen, wurden zuerst in [35] bewiesen. Erweiterungen auf beliebige Intervalle um einen Randpunkt, wie in Satz 4.5.4 findet man in [39], [40] und [44]. Wir haben diese Ergebnisse mit Hilfe des lokalen Eindeutigkeitssatzes 3.5.5 gezeigt, was den Beweis sehr vereinfacht.

8. Setzt man in Satz 4.5.4 zusätzlich voraus, dass die Potentiale q_1 und q_2, für ein $n \in \mathbb{N}_0$ in einer Umgebung von c, $2n$-mal stetig differenzierbar sind, so genügt auch die Forderung

$$\sum_{i=1}^{N} k_i \geq -n - 1.$$

Das folgt daraus, dass man in diesem Fall eine bessere Abschätzung für die Differenz

$$m_{1,0}(ix) - m_{2,0}(ix),$$

für $|x| \to \infty$ in $\mathbb{R}$ zur Verfügung hat. Die notwendigen Abschätzungen findet man in [50], [51] oder auch in [39].

9. Auch falls man fordert, dass die Differenz der Potentiale q_1 und q_2 für ein $p \in (1, \infty)$ in $L^p(0, \pi)$ liegt, sind weniger Eigenwerte notwendig. Solche Resultate findet man in [41] und [42].

10. Weitere Ergebnisse für symmetrische Potentiale findet man beispielsweise in [37] oder [32].

ANHANG A

Einige funktionentheoretische Hilfssätze

A.1. Nevanlinna-Funktionen

Eine analytische Funktion $m : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ heißt Nevanlinna-Funktion. Solche Funktionen werden oft auch als Pick-, Herglotz- oder R-Funktionen bezeichnet. Wir sammeln in diesem Abschnitt einige grundlegenden Eigenschaften dieser Funktionen.

Satz A.1.1. *Sei m eine Nevanlinna-Funktion. Dann existiert ein eindeutiges Borelmaß ρ auf $\mathbb{R}$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\lambda^2} d\rho(\lambda) < \infty,$$

sodass

$$m(z) = c_1 + c_2 z + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} d\rho(\lambda), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Dabei ist

$$c_1 = \operatorname{Re}\, m(i), \quad c_2 = \lim_{\eta \nearrow \infty} \frac{m(i\eta)}{i\eta} \geq 0$$

und ρ das Maß, dass für $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$ gegeben ist durch

$$\rho\,(\lambda_1, \lambda_2] = \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2+\delta} \operatorname{Im}\, m(\lambda + i\varepsilon) d\lambda. \tag{A.1}$$

Ist $f \in C(\mathbb{R})$ eine stetige Funktion und $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$, so gilt

$$\int_{(\lambda_1,\lambda_2]} f d\rho = \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_2+\delta} f(\lambda) \operatorname{Im}\, m(\lambda + i\varepsilon) d\lambda. \tag{A.2}$$

Weiters benötigen wir in Abschnitt 3.2 noch die folgende Eigenschaften von Nevanlinna-Funktionen.

Proposition A.1.2. *Sei m eine Nevanlinna-Funktion und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\varepsilon \left|\operatorname{Re}\, m(\lambda + i\varepsilon)\right| \to 0, \quad \textit{für } \varepsilon \searrow 0.$$

Sind $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$ und $\varepsilon_0 > 0$, so gilt

$$\varepsilon \left|m(\lambda + i\varepsilon)\right| \leq C, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Diese und weitere Eigenschaften von Nevanlinna-Funktionen findet man beispielsweise in [6], [7], [8], [9], [10], [11] oder [12].

A.2. Abschätzungen für eine Klasse ganzer Funktionen

Sei $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ eine streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen, die einer der Abschätzungen

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \mathcal{O}\left(n^{-1}\right), \tag{A.3a}$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(n^{-1}\right), \tag{A.3b}$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + 1 + \mathcal{O}\left(n^{-1}\right), \tag{A.3c}$$

für $n \to \infty$ genügt. Wir betrachten das Produkt

$$H_{\mathbb{N}_0}(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}_0} E_n(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

wobei die ganzen Funktionen E_n, $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$E_n(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{\lambda_n}, & \text{falls } \lambda_n \neq 0 \\ z, & \text{falls } \lambda_n = 0 \end{cases}$$

definiert sind. Wegen der Abschätzung, der die Zahlen λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ genügen, konvergiert die Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |1 - E_n(z)| \leq |1 - z| + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_0 \\ \lambda_n\neq 0}} \left|\frac{z}{\lambda_n}\right|, \quad z \in \mathbb{C}$$

lokal absolut und gleichmäßig. Aus diesem Grund konvergiert auch obiges Produkt lokal gleichmäßig und die Nullstellen der Funktion $H_{\mathbb{N}_0}$ sind einfach und genau die Zahlen λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Lemma A.2.1. *Die Funktion $H_{\mathbb{N}_0}$ erfüllt*

$$|H_{\mathbb{N}_0}(ix)|^{-1} = \mathcal{O}\left(e^{-\pi \operatorname{Re}\sqrt{-ix}}|x|^{-1/2}\right), \qquad \textit{falls } (\text{A.3a}) \textit{ gilt},$$

$$|H_{\mathbb{N}_0}(ix)|^{-1} = \mathcal{O}\left(e^{-\pi \operatorname{Re}\sqrt{-ix}}\right), \qquad \textit{falls } (\text{A.3b}) \textit{ gilt},$$

$$|H_{\mathbb{N}_0}(ix)|^{-1} = \mathcal{O}\left(e^{-\pi \operatorname{Re}\sqrt{-ix}}|x|^{1/2}\right), \qquad \textit{falls } (\text{A.3c}) \textit{ gilt},$$

für $|x| \to \infty$ in $\mathbb{R}$.

Beweis. Wir zeigen nur die Behauptung im ersten Fall (A.3a). Sind $c,\ d \in [0, \infty)$ und $0 \leq c \leq d$, so gilt offenbar

$$\frac{1 + c^2x^2}{1 + d^2x^2} \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Gilt andererseits $0 < d < c$, so hat man

$$\frac{1 + c^2x^2}{1 + d^2x^2} = 1 + \frac{\left(c^2 - d^2\right)x^2}{1 + d^2x^2} \leq 1 + \frac{c^2 - d^2}{d^2} = \frac{c^2}{d^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{$**$}$$

Wegen der Produktdarstellung der Sinusfunktion

$$\sin z = z \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

sowie den Gleichungen $(*)$ und $(**)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R} \backslash [-1, 1]$

$$\begin{aligned}\frac{\left|\sqrt{ix}\sin i\sqrt{-ix}\pi\right|^2}{|H_{\mathbb{N}_0}(ix)|^2} &= \frac{x^2\pi^2}{|E_0(ix)|^2}\prod_{n\in\mathbb{N}}\frac{1+\frac{x^2}{n^4}}{|E_n(ix)|^2} \\ &\leq 2\max\left(\lambda_0^2, 1\right)\pi^2 \prod_{\substack{n\in\mathbb{N}\\|\lambda_n|>n^2}}\frac{\lambda_n^2}{n^4},\end{aligned}$$

wobei das Produkt wegen der Asymptotik der Zahlen λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{\lambda_n}{n^2} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{für } n \to \infty$$

konvergiert. Weiters gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin i\sqrt{-ix}\pi}{e^{\sqrt{-ix}\pi}}\right| &= \frac{1}{2}\left|\frac{e^{-\sqrt{-ix}\pi} - e^{\sqrt{-ix}\pi}}{e^{\sqrt{-ix}\pi}}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|1 - e^{-2\sqrt{-ix}\pi}\right| \to \frac{1}{2},\end{aligned}$$

für $|x| \to \infty$ in $\mathbb{R}$ und daher

$$\frac{\left|e^{\sqrt{-ix}\pi}\right|}{\left|\sin i\sqrt{-ix}\pi\right|} \leq C_1, \quad x \in \mathbb{R},\ |x| > R_1$$

für bestimmte Konstanten C_1, $R_1 \in \mathbb{R}$. Zusammen ergibt sich die Behauptung im Fall (A.3a)

$$\frac{\left|\sqrt{ix}e^{\sqrt{-ix}\pi}\right|}{|H_{\mathbb{N}_0}(ix)|} \leq C_2. \quad x \in \mathbb{R},\ |x| > R_2$$

für Konstanten C_2, $R_2 \in \mathbb{R}$. Die restlichen Fälle beweist man ähnlich, wobei man im Fall (A.3b) die Kosinusfunktion, statt der Sinusfunktion verwendet. $\square$

Sei nun M eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ und H_M die ganze Funktion

$$H_M(z) = \prod_{n\in M} E_n(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Die Nullstellen dieser Funktion sind einfach und genau die Zahlen λ_n, $n \in M$. Weiters sei N_M die Verteilungsfunktion

$$N_M(t) = \#\{n \in M \mid \lambda_n \leq t\} = \sum_{\substack{n\in M\\\lambda_n\leq t}} 1, \quad t \in \mathbb{R}$$

der Menge $\{\lambda_n \mid n \in M\}$. Diese Verteilungsfunktion erfüllt, wegen der Asymptotik der Zahlen λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$

$$N_M(t) \leq N_{\mathbb{N}_0}(t) = \mathcal{O}\left(\sqrt{t}\right),$$

für $t \to \infty$. Für die Funktionen H_M gilt eine Verallgemeinerung von Lemma A.2.1.

LEMMA A.2.2. *Seien* $\eta \in [0,1]$ *und* $k \in \mathbb{Z}$, *sodass*

$$N_M(t) \geq \eta\, N_{\mathbb{N}_0}(t) + k, \quad t \geq t_0,$$

für ein $t_0 \in \mathbb{R}$. *Dann erfüllt die Funktion* H_M

$$|H_M(ix)|^{-1} = \mathcal{O}\left(e^{-\eta\pi \operatorname{Re}\sqrt{-ix}}|x|^{-k-\eta/2}\right), \qquad \textit{falls (A.3a) gilt,}$$

$$|H_M(ix)|^{-1} = \mathcal{O}\left(e^{-\eta\pi \operatorname{Re}\sqrt{-ix}}|x|^{-k}\right), \qquad \textit{falls (A.3b) gilt,}$$

$$|H_M(ix)|^{-1} = \mathcal{O}\left(e^{-\eta\pi \operatorname{Re}\sqrt{-ix}}|x|^{-k+\eta/2}\right), \qquad \textit{falls (A.3c) gilt,}$$

für $|x| \to \infty$ *in* $\mathbb{R}$.

BEWEIS. Wir setzen zunächst voraus, dass $\lambda_n \neq 0$ für alle $n \in M$. Sei $t_0 \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ kleiner als jedes λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Mit partieller Integration folgt für jede Teilmenge M von $\mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\log|H_M(ix)| &= \sum_{n\in M} \log\left|1 - \frac{ix}{\lambda_n}\right| = \frac{1}{2}\sum_{n\in M}\log\left(1 + \frac{x^2}{\lambda_n^2}\right) \\
&= \left[\frac{N_M(t)}{2}\log\left(1+\frac{x^2}{t^2}\right)\right]_{t=t_0}^{\infty} + \int_{t_0}^{\infty}\frac{x^2}{t^2+x^2}\frac{N_M(t)}{t}dt \\
&= \int_{t_0}^{\infty}\frac{x^2}{t^2+x^2}\frac{N_M(t)}{t}dt, \quad x \in \mathbb{R}^\times.
\end{aligned}$$

Der Randterm bei t_0 verschwindet, da N_M in einer Umgebung von t_0 verschwindet. Derjenige bei ∞, da die Abschätzungen

$$|N_M(t)| \leq |t| \quad \text{und} \quad \log\left(1+\frac{x^2}{t^2}\right) \leq \frac{x^2}{t^2}$$

gelten, falls nur t groß genug ist. Nach Voraussetzung gilt

$$N_{\mathbb{N}_0}(t) \geq N_M(t) \geq \eta\, N_{\mathbb{N}_0}(t) + k, \quad t \geq t_1,$$

für eine Konstante $t_1 \geq t_0$ und daher

$$\begin{aligned}
\log|H_M(ix)| &= \int_{t_0}^{\infty}\frac{x^2}{t^2+x^2}\frac{N_M(t)}{t}dt \\
&\geq \eta\int_{t_0}^{\infty}\frac{x^2}{t^2+x^2}\frac{N_{\mathbb{N}_0}(t)}{t}dt + \int_{t_0}^{\infty}\frac{x^2}{t^2+x^2}\frac{k}{t}dt \, + \\
&\qquad\qquad + \int_{t_0}^{t_1}\frac{x^2}{t^2+x^2}\frac{N_M(t)-\eta\, N_{\mathbb{N}_0}(t)+k}{t}dt \\
&\geq \eta\log|H_{\mathbb{N}_0}(ix)| + \left[-\frac{k}{2}\log\left(1+\frac{x^2}{t^2}\right)\right]_{t=t_0}^{\infty} + C \\
&= \eta\log|H_{\mathbb{N}_0}(ix)| + k\log\left|1-\frac{ix}{t_0}\right| + C, \quad x \in \mathbb{R}^\times
\end{aligned}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ so klein ist, dass

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{x^2}{t^2+x^2}\frac{N_M(t)-\eta\, N_{\mathbb{N}_0}(t)+k}{t}dt \geq C, \quad x \in \mathbb{R}^\times$$

gilt, was möglich ist, da dieses Integral gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}$ beschränkt ist. Daraus folgt nun

$$|H_M(ix)| \geq |H_{\mathbb{N}_0}(ix)|^\eta \left|1 - \frac{ix}{t_0}\right|^k e^C, \quad x \in \mathbb{R}^\times.$$

Wegen der elementaren Ungleichung

$$\left|\frac{x}{t_0}\right| \leq \left|1 - \frac{ix}{t_0}\right| \leq 2\left|\frac{x}{t_0}\right|, \quad x \in \mathbb{R},\ |x| > |t_0|$$

folgen die Behauptungen in allen drei Fällen mit Hilfe von Lemma A.2.1.

Falls nun ein $n_0 \in M$ existiert, sodass $\lambda_{n_0} = 0$, so betrachten wir die Menge $\tilde{M} = M \backslash \{n_0\}$. Es gilt dann

$$N_{\tilde{M}}(t) = N_M(t) - 1 \geq \eta\, N_{\mathbb{N}_0}(t) + k - 1,$$

für alle hinreichend großen $t \in \mathbb{R}$. Da wir das bereits Gezeigte auf die Funktion $H_{\tilde{M}}$ anwenden können, folgt die Behauptung aus der Gleichung

$$H_M(z) = z\, H_{\tilde{M}}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

□

In Abschnitt 4.5 benötigen wir außerdem noch eine Abschätzung über den minimalen Betrag der Funktionen H_M.

Lemma A.2.3. *Für jedes $\rho > \frac{1}{2}$ existiert eine Folge $r_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ positiver Zahlen mit $r_k \to \infty$ für $k \to \infty$, sodass*

$$\inf_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ |z| = r_k}} |H_M(z)| \geq e^{B r_k^\rho}$$

für eine Konstante $B \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir setzen für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$d_n = \begin{cases} |\lambda_n|^{-\rho}, & \text{falls } \lambda_n \neq 0 \\ 1, & \text{falls } \lambda_n = 0. \end{cases}$$

Besteht $G \subseteq \mathbb{C}$ aus allen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - \lambda_n| > d_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, so gilt für alle $z \in G$

$$\log|H_M(z)| = \\ = \sum_{\substack{n \in M \\ |\lambda_n| \leq 1}} \log|E_n(z)| + \sum_{\substack{n \in M \\ 1 < |\lambda_n| \leq 2|z|}} \log\left|1 - \frac{z}{\lambda_n}\right| + \sum_{\substack{n \in M \\ |\lambda_n| > 2|z|}} \log\left|1 - \frac{z}{\lambda_n}\right|.$$

Die erste Summe kann man durch

$$\sum_{\substack{n \in M \\ |\lambda_n| \leq 1}} \log|E_n(z)| \geq \sum_{\substack{n \in M \\ 0 < |\lambda_n| \leq 1}} \log\left|1 - \frac{z}{\lambda_n}\right| \geq \sum_{\substack{n \in M \\ 0 < |\lambda_n| \leq 1}} \log\left(\left|\frac{z}{\lambda_n}\right| - 1\right)$$
$$\geq \sum_{\substack{n \in M \\ 0 < |\lambda_n| \leq 1}} \log 1 = 0$$

abschätzen, falls nur $|z| > 2$. Um die zweite Summe abzuschätzen, sieht man zunächst, dass in diesem Fall

$$\left|1 - \frac{z}{\lambda_n}\right| = \left|\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n}\right| \geq |\lambda_n|^{-\rho-1} \geq 2^{-\rho-1}|z|^{-\rho-1}$$

gilt, woraus aus der Asymptotik der Verteilungsfunktion N_M

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\in M\\ 1<|\lambda_n|\leq 2|z|}} \log\left|1 - \frac{z}{\lambda_n}\right| &\geq -(\rho+1)N_M(2|z|)\log 2|z| \\ &\geq -C_1|z|^\rho, \quad z \in G,\ |z| > R_1\end{aligned}$$

für Konstanten $C_1,\ R_1 \in \mathbb{R}$ folgt. Um die dritte Summe abzuschätzen bemerken wir zuerst, dass

$$\log(1-x) \geq -Cx, \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$ gilt. Wir erhalten daher wegen $2|z| < |\lambda_n|$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\in M\\ |\lambda_n|>2|z|}} \log\left|1 - \frac{z}{\lambda_n}\right| &\geq \sum_{\substack{n\in M\\ |\lambda_n|>2|z|}} \log\left(1 - \left|\frac{z}{\lambda_n}\right|\right) \geq -C \sum_{\substack{n\in M\\ |\lambda_n|>2|z|}} \frac{|z|}{|\lambda_n|} \\ &= -C \sum_{\substack{n\in M\\ |\lambda_n|>2|z|}} \left|\frac{z}{\lambda_n}\right|^\rho \left|\frac{z}{\lambda_n}\right|^{1-\rho} \geq -C2^{\rho-1}|z|^\rho \sum_{n\in M} |\lambda_n|^{-\rho},\end{aligned}$$

wobei die letzte Summe wegen dem asymptotischen Verhalten der Zahlen λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiert. Zusammen erhält man damit

$$\log|H_M(z)| \geq C_2|z|^\rho, \quad z \in G,\ |z| > R_2$$

für bestimmte Konstanten $C_2,\ R_2 \in \mathbb{R}$. Es bleibt zu zeigen, dass das Gebiet G beliebig große Kreise enthält. Für die Radien der ausgenommenen Kugeln gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} d_n \leq 1 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_0\\ \lambda_n\neq 0}} |\lambda_n|^{-\rho} < \infty$$

wegen der Asymptotik der Zahlen λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Die ausgenommene Menge ist daher so klein, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $r_k > k$ existiert, sodass $\pm r_k$ in G liegt. Da die Mittelpunkte der ausgenommenen Kugeln auf der reellen Achse liegen, sind damit auch die Kreise mit Radius r_k um den Ursprung in G enthalten. □

A.3. Vollständige und minimale Funktionensysteme

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum und $v_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wir sagen die Vektoren v_n, $n \in \mathbb{N}_0$ sind vollständig in $\mathcal{H}$, falls der von ihnen aufgespannte Raum dicht in $\mathcal{H}$ liegt. Äquivalent dazu ist, dass für jedes $w \in \mathcal{H}$

$$w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_n, w)_{\mathcal{H}} = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Weiters sagen wir die Vektoren v_n, $n \in \mathbb{N}_0$ sind minimal oder stark linear unabhängig in $\mathcal{H}$, falls für jede Folge $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} a_n v_n \right\|_{\mathcal{H}} = 0$$

bereits $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Sind die Vektoren v_n, $n \in \mathbb{N}_0$ vollständig in $\mathcal{H}$, so sind diese Vektoren genau dann zusätzlich auch minimal in $\mathcal{H}$, wenn für jedes $n_0 \in \mathbb{N}_0$ die Vektoren v_n, $n \in \mathbb{N}_0 \backslash \{n_0\}$ nicht vollständig in $\mathcal{H}$ sind.

Bekannterweise sind die Funktionen

$$e^{ikx}, \quad x \in (-\pi, \pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

vollständig und minimal in $L^2(-\pi, \pi)$. Wir betrachten in diesem Abschnitt nun allgemein die Funktionen

$$e_k(x) = e^{i\omega_k x}, \quad x \in (-\pi, \pi),\ k \in \mathbb{Z},$$

wobei die komplexen Zahlen $\omega_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ paarweise verschieden sein sollen. In [17], [18], [19] und [20] findet man notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass diese Funktionen vollständig und minimal sind.

Satz A.3.1. *Die Folge e_k, $k \in \mathbb{Z}$ ist vollständig in $L^2(-\pi, \pi)$, falls*

$$|\omega_k| \leq |k| + \frac{1}{4},$$

für fast alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beweise dieses Satzes findet man in [19] Appendix III oder in [20] Abschnitt 3.2. In [20] wird auch gezeigt, dass $1/4$ die größtmögliche Konstante ist, für die das gilt.

Satz A.3.1 kann auch auf den Fall verallgemeinert werden, wenn nicht alle Zahlen ω_k, $k \in \mathbb{Z}$ paarweise verschieden sind. Fordert man, dass

$$\mu_k = \#\{l \in \mathbb{Z} \mid \omega_k = \omega_l\} < \infty, \quad k \in \mathbb{Z},$$

so sind unter der Voraussetzung von Satz A.3.1, die Funktionen

$$x^j e^{i\omega_k x}, \quad x \in (-\pi, \pi),\ k \in \mathbb{Z},\ j \in \{0, \dots, \mu_k - 1\}$$

vollständig in $L^2(-\pi, \pi)$.

Für die Minimalität der Funktionen e_k, $k \in \mathbb{Z}$ werden wir die folgende Bedingung verwenden.

Satz A.3.2. *Die Folge e_k, $k \in \mathbb{Z}$ ist genau dann minimal in $L^2(-\pi, \pi)$, wenn eine ganze Funktion $\varphi \neq 0$ vom Exponentialtyp höchstens π existiert, die in allen Punkten ω_k, $k \in \mathbb{Z}$ verschwindet und*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi(t)|^2}{1 + |t|^2} dt < \infty$$

erfüllt.

Einen Beweis dieses Satzes findet man beispielsweise in [19] Appendix III.

Als Folgerung dieser Sätze erhält man, das von uns in Abschnitt 4.4 benötigte Ergebnis. Sei dazu $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ eine streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen, die einer der Abschätzungen

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \mathcal{O}\left(n^{-1}\right), \tag{A.4a}$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(n^{-1}\right), \tag{A.4b}$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + 1 + \mathcal{O}\left(n^{-1}\right), \tag{A.4c}$$

für $n \to \infty$ genügt. Weiters seien c_n und s_n, $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktionen

$$c_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x \quad \text{und} \quad s_n(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad x \in [0,\pi],\ n \in \mathbb{N}_0$$

auf $[0,\pi]$. Im Fall $\lambda_n = 0$ ist die Funktion s_n dabei wieder als

$$s_n(x) = x, \quad x \in [0,\pi]$$

zu interpretieren.

Satz A.3.3. *Die Folge c_n, $n \in \mathbb{N}_0$ ist vollständig und minimal in $L^2(0,\pi)$, falls* (A.4a) *oder* (A.4b) *gilt.*

Die Folge s_n, $n \in \mathbb{N}_0$ ist vollständig und minimal in $L^2(0,\pi)$, falls (A.4b) *oder* (A.4c) *gilt.*

Beweis. Wir zeigen nur, dass die Folge c_n, $n \in \mathbb{N}_0$ im Fall (A.4a) vollständig und minimal ist, die restlichen Fälle beweist man ähnlich. Seien dazu $e_{j,n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $j \in \{1,2\}$ die Funktionen

$$e_{j,n}(x) = e^{i(-1)^j\sqrt{\lambda_n}x}, \quad x \in [-\pi,\pi],\ n \in \mathbb{N}_0,\ j \in \{1,2\}.$$

Nach Satz A.3.1 und der Voraussetzung an die Zahlen λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, sind die Funktionen $e_{j,n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $j \in \{1,2\}$ vollständig in $L^2(-\pi,\pi)$. Sei nun $f \in L^2(0,\pi)$, sodass

$$\int_0^\pi f(x)\cos\sqrt{\lambda_n}x\,dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Bezeichnet man mit $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in [0,\pi) \\ f(-x), & \text{falls } x \in (-\pi,0) \end{cases}$$

die gerade Fortsetzung von f auf $(-\pi,\pi)$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $j \in \{1,2\}$

$$\int_{-\pi}^\pi \tilde{f}(x)e^{i(-1)^j\sqrt{\lambda_n}x}dx = 2\int_0^\pi f(x)\cos\sqrt{\lambda_n}x\,dx = 0.$$

Aus der Vollständigkeit der Funktionen $e_{j,n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $j \in \{1,2\}$ folgt $\tilde{f} = 0$ in $L^2(-\pi,\pi)$ und daher $f = 0$. Die Funktionen c_n, $n \in \mathbb{N}_0$ sind also vollständig in $L^2(0,\pi)$. Es bleibt zu zeigen, dass diese Funktionen auch minimal in $L^2(0,\pi)$ sind. Sei dazu, wie in Abschnitt A.2, $H_{\mathbb{N}_0}$ die ganze Funktion

$$H_{\mathbb{N}_0}(z) = \prod_{n=0}^\infty E_n(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

wobei E_n, $n \in \mathbb{N}_0$ die ganzen Funktionen

$$E_n(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{\lambda_n}, & \text{falls } \lambda_n \neq 0 \\ z, & \text{falls } \lambda_n = 0 \end{cases}$$

sind. Die Nullstellen der ganzen Funktion G

$$G(z) = H\left(z^2\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

sind genau die Werte $\pm\sqrt{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen Lemma A.2.1 verschwindet G jedoch nicht auf ganz $\mathbb{C}$. Außerdem ist G von Exponentialtyp höchstens π (siehe [15] Lemma 9.6.3) und es gilt

$$G(x) = \mathcal{O}\left(x\right), \quad \text{für } |x| \to \infty \text{ in } \mathbb{R}.$$

Aus Satz A.3.2 folgt damit, dass für alle $j_0 \in \{1,2\}$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$, die Folge $e_{j,n}$, $(j,n) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}_0 \backslash \{(j_0, n_0)\}$ minimal ist. Wir zeigen die Behauptung zunächst unter der Annahme, dass $\lambda_{n_0} = 0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Seien dazu $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} a_n c_n \right\| = 0.$$

Damit gilt

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a_n}{2} \left(e_{1,n} + e_{2,n}\right) + a_{n_0} e_{1,n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{N} \frac{a_n}{2} \left(e_{1,n} + e_{2,n}\right) \right\| = 0,$$

und daher $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Die Folge c_n, $n \in \mathbb{N}_0$ ist also in diesem Fall minimal in $L^2(0,\pi)$. Es bleibt also die Behauptung im Fall $\lambda_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ zu beweisen. Dazu genügt es zu zeigen, dass für jedes $n_0 \in \mathbb{N}_0$ die Folge c_n, $n \in \mathbb{N} \backslash \{n_0\}$ nicht vollständig in $L^2(0,\pi)$ ist. Wegen dem bereits Gezeigten ist die Folge $e_{j,n}$, $j \in \{1,2\}$, $n \in \mathbb{N}_0 \backslash \{n_0\}$ nicht vollständig in $L^2(-\pi,\pi)$. Es existiert also eine Funktion $\tilde{f} \in L^2(-\pi,\pi)$, $\tilde{f} \neq 0$, sodass

$$(*) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) e_{j,n}(x) dx = 0, \quad j \in \{1,2\},\ n \in \mathbb{N}_0 \backslash \{n_0\}.$$

Sei nun f die Funktion

$$f(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(-x), \quad x \in (0,\pi)$$

auf $(0,\pi)$. Wäre $f = 0$, so hätte man

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) dx = 0.$$

Zusammen mit $(*)$ würde daraus aber $\tilde{f} = 0$ folgen, also muss $f \neq 0$ gelten. Da dann für alle $n \in \mathbb{N}_0 \backslash \{n_0\}$

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos\sqrt{\lambda_n} x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \left(e_{1,n}(x) + e_{2,n}(x)\right) dx = 0$$

gilt, ist die Folge c_n, $n \in \mathbb{N}_0 \backslash \{n_0\}$ nicht vollständig in $L^2(0,\pi)$. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen Teil 1: Grundlagen*, Teubner, Stuttgart, 2000.

[2] ———, *Lineare Operatoren in Hilberträumen Teil 2: Anwendungen*, Teubner, Stuttgart, 2003.

[3] ———, *Spectral theory of ordinary differential operators*, Springer, Berlin, 1987.

[4] N. Dunford und J. Schwartz, *Linear Operators Part I: General theory*, Wiley, New York, 1988.

[5] ———, *Linear Operators Part II: Spectral theory*, Wiley, New York, 1988.

[6] N. Achiezer und I. Glazman, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*, Akad.-Verl., Berlin, 1968.

[7] W. Donoghue, *Monotone matrix functions and analytic continuation*, Springer, Berlin, 1974.

[8] N. Aronszajn und W. Donoghue, *On exponential representations of analytic functions in the upper half-plane with positive imaginary part*, Journal d'Analyse Math. **5** (1956), 321–388.

[9] I. Kac und M. Krein, *R-functions – Analytic functions mapping the upper halfplane into itself*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **103** (1974), 1–18.

[10] P. Koosis, *Introduction to H_p spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[11] I. Privalov, *Randeigenschaften analytischer Funktionen*, Deutscher Verlag d. Wiss., Berlin, 1956.

[12] M. Rosenblum und J. Rovnyak, *Topics in Hardy classes and univalent functions*, Birkhäuser, Basel, 1994.

[13] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[14] E. Hille und R. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, American Math. Soc., Providence, RI, 1965.

[15] R. Boas, *Entire functions*, Acad. Press, New York, NY, 1954.

[16] A. Holland, *Introduction to the theory of entire functions*, Acad. Press, New York, NY, 1973.

[17] R. Paley und N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, American Math. Soc., Providence, RI, 1934.

[18] N. Levinson, *Gap and density theorems*, American Math. Soc., Providence, RI, 1940.

[19] B. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, American Math. Soc., Providence, RI, 1964.

[20] R. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Acad. Press, New York, NY, 2001.

[21] G. Pólya und G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer, Berlin, 1972.

[22] K. Jörgens und F. Rellich, *Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Springer, Berlin, 1976.

[23] A. Zettl, *Sturm-Liouville theory*, American Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[24] W. Amrein, A. Hinz und D. Pearson, *Sturm-Liouville Theory – Past and Present*, Birkhäuser, 2005.

[25] V. Marchenko, *Sturm-Liouville Operators and Applications*, Birkhäuser, Basel, 1986.

[26] B. Levitan und I. Sargsjan, *Sturm-Liouville and Dirac operators*, Kluwer, Dordrecht, 1991.

[27] F. Gesztesy und M. Zinchenko, *On spectral theory for Schrödinger operators with strongly singular potentials*, Math. Nachrichten **279** (2006), 1041–1082.

[28] B. Levitan und I. Sargsjan, *Introduction to spectral theory*, American Math. Soc., Providence, RI, 1975.
[29] B. Levitan, *Inverse Sturm-Liouville problems*, VNU Science Press, Utrecht, 1987.
[30] I. Gel'fand und B. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*, American Math. Soc. Transl. **1** (1955), 253–304.
[31] M. Gasymov und B. Levitan, *Determination of a differential equation by two of its spectra*, Russian Math. Surveys **19(2)** (1964), 1–63.
[32] B. Levitan, *On the determination of the Sturm-Liouville operator from one and two spectra*, Mathematics of the USSR **12(1)** (1978), 179–193.
[33] G. Borg, *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe*, Acta Math. **78** (1946), 1–96.
[34] H. Hochstadt, *The inverse Sturm-Liouville problem*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 715–729.
[35] H. Hochstadt und B. Lieberman, *An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data*, SIAM Journal on Appl. Math. **34(4)** (1978), 676–680.
[36] O. Hald, *Inverse eigenvalue problem for the mantle*, Geophysical Journal of the Royal Astr. Soc. **62** (1980), 41–48.
[37] ———, *The inverse Sturm-Liouville problem with symmetric potentials*, Acta Math. **141** (1978), 263–291.
[38] F. Gesztesy und B. Simon, *Inverse spectral analysis with partial information on the potential, I. The case of an a.c. component in the spectrum*, Helv. Phys. Acta **70** (1997), 66–71.
[39] ———, *Inverse spectral analysis with partial information on the potential, II. The case of discrete spectrum*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 2765–2787.
[40] F. Gesztesy, R. del Rio und B. Simon, *Inverse spectral analysis with partial information on the potential, III. Updating boundary conditions*, Int. Math. Research Notices **15** (1997), 751–758.
[41] L. Amour und T. Raoux, *Inverse spectral results for Schrödinger operators on the unit interval with potentials in L^p spaces*, Inverse Problems **23(6)** (2007), 2367–2373.
[42] L. Amour, J. Faupin und T. Raoux, *Inverse spectral results for Schrödinger operators on the unit interval with partial information given on the potentials*, Journal of Math. Phys. **50(3)** (2009).
[43] F. Gesztesy und B. Simon, *On the determination of the potential from three spectra*, American Math. Soc. Transl. Ser. 2 **189** (1999), 85–92.
[44] M. Horváth, *On the inverse spectral theory of Schrödinger and Dirac operators*, Trans. American Math. Soc. **353(10)** (2001), 4155–4171.
[45] B. Simon, *A new approach to inverse spectral theory, I. Fundamental formalism*, Annals of Math. **150** (1999), 1029–1057.
[46] F. Gesztesy und B. Simon, *A new approach to inverse spectral theory, II. General real potentials and the connection to the spectral measure*, Annals of Math. **152** (2000), 593–643.
[47] ———, *On local Borg-Marchenko uniqueness results*, Commun. Math. Phys. **211** (2000), 273–287.
[48] C. Fulton und S. Pruess, *Eigenvalue and Eigenfunction Asymptotics for Regular Sturm-Liouville Problems*, Journal of Math. Analysis and Applications **188** (1994), 297–340.
[49] C. Fulton, *An integral equation iterative scheme for asymptotic expansions of spectral quantities for regular Sturm-Liouville problems*, J. Integral Equations and Appl. **4** (1982), 163–172.
[50] A. Danielyan und B. Levitan, *On the asymptotic behavior of the Weyl-Titchmarsh m-function*, Mathematics of the USSR **36(3)** (1991), 487–496.
[51] A. Rybkin, *Some new and old asymptotic representations of the Jost solution and the Weyl m-function for Schrödinger operators on the line*, Bulletin of the London Math. Soc. **34** (2002), 61–72.
[52] M. Crum, *On the Sturm-Liouville Expansion*, Quart. Journal of Math. **6** (1955), 288–292.