Darstellung eines hyponormalen Operators mithilfe der Hilberttransformation

Sebastian Bittner

März 2021

Generalvoraussetzung. H ist ein Hilbertraum.

1 Seminormale Operatoren

1.1 Definition. Für $X, Y \in L_b(H)$ ist der *Kommutator* von X und Y definiert als

$$[X, Y] := XY - YX.$$

$[X^*, X]$ nennt man den *Selbstkommutator* von X.

1.2 Definition. Ein Operator S auf einem Hilbertraum heißt *hyponormal*, falls der Selbstkommutator $[S^*, S]$ ein positiver Operator ist. Ist $-[S^*, S]$ positiv, so bezeichnet man S als *cohyponormal*. Ist ein Operator hyponormal oder cohyponormal, so bezeichnet man ihn als *seminormal*.

Insbesondere im Zusammenhang mit seminormalen Operatoren erweist es sich als nützlich, einen Operator $S \in L_b(H)$ in Real- und Imaginärteil aufzuteilen. Diese sind durch $\Re(S) := \frac{1}{2}(S + S^*)$ bzw. $\Im(S) := \frac{1}{2i}(S - S^*)$ definiert. Dabei sind $\Re(S)$ und $\Im(S)$ selbstadjungiert und es gilt $S = \Re(S) + i\Im(S)$.

1.3 Proposition. Sei A ein beschränkter Operator auf H. Setzen wir $X := \Re(A), Y := \Im(A)$, dann gilt

$$[A^*, A] = 2i[X, Y]. \tag{1}$$

1.4 Definition. Sei A ein fester selbstadjungierter, beschränkter Operator auf H. Dann sind die *Symbole* $S_A^{\pm}(T)$ des Operators $T \in L_b(H)$ bzgl. A definiert durch

$$S_A^{\pm}(T) := \lim_{t \to \pm\infty} e^{itA} T e^{-itA}, \tag{2}$$

falls diese Grenzwerte in $L_b(H)$ im Sinne der starken Operatortopologie existieren.

Die *Friedrichs-*Γ*-Operatoren* von T bzgl. A sind definiert durch

$$\Gamma^{\pm}_A(T) := \pm \int_0^{\pm\infty} e^{itA} T e^{-itA}\, dt := \lim_{s\to\pm\infty} \pm \int_0^{\pm s} e^{itA} T e^{-itA}\, dt, \tag{3}$$

falls diese Limiten in $L_b(H)$ im Sinne der starken Operatortopologie existieren.

Wdh.

$$e^{itX} := \int_{\sigma(X)} e^{its}\, dE(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itX)^n}{n!}$$

, E Spektralmaß zu X.

$A_t \to A$ in der starken Operatortopologie $:\Leftrightarrow A_t x \to Ax$ für alle $x \in H$.

1.5 Lemma. Sei $A : \mathbb{R} \to L_b(H)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $A' : \mathbb{R} \to L_b(H)$ und $\|A(t)\| \leq C, t \in \mathbb{R}$. Ist $A'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein positiver Operator, dann existieren die Limiten

$$\lim_{t\to+\infty} A(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to-\infty} A(t)$$

in $L_b(H)$ im Sinne der starken Operatortopologie.

1.6 Satz. Seien X, Y und D beschränkte selbstadjungierte Operatoren auf H, für die

$$i[X,Y] = D^2$$

gilt. Dann existieren $S^{\pm}_X(Y)$ und $\Gamma^{\pm}_X(D^2)$, wobei

$$Y = S^{\pm}_X(Y) \mp \Gamma^{\pm}_X(D^2).$$

Beweis. Mithilfe der Produktregel für Banachalgebren erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{itX} Y e^{-itX}) &= (e^{itX} iXY e^{-itX}) + (e^{itX} Y(-iX) e^{-itX})\\ &= e^{itX} i(XY - YX) e^{-itX} = e^{itX} D^2 e^{-itX} = (De^{-itX})^* De^{-itX}.\end{aligned}$$

Der Operator auf der rechten Seite ist offensichtlich positiv und die Norm von $e^{itX} Y e^{-itX}$ ist durch $\|Y\|$ beschränkt. Somit existiert gemäß Satz 1.5

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{itX} Y e^{-itX} = S^{\pm}_X(Y).$$

Nach dem Hauptsatz für Differential- und Integralrechnung gilt für $s \in \mathbb{R}$

$$e^{isX} Y e^{-isX} - Y = \int_0^s e^{itX} D^2 e^{-itX}\, dt.$$

Bildet man auf beiden Seiten den Limes gegen $\pm\infty$, so erhält man die Existenz von $\Gamma^{\pm}_X(D^2)$, wobei $S^{\pm}_X(Y) = Y \pm \Gamma^{\pm}_X(D^2)$. $\square$

1.7 Korollar. Sei S ein hyponormaler Operator auf H und $D := \sqrt{\frac{1}{2}[S^*, S]}$. Ist $S = X + iY$ die Zerlegung von S in Real- und Imaginärteil, so existieren $S^{\pm}_X(Y)$ und $\Gamma^{\pm}_X(D^2)$ im Sinne von Definition 1.4 und es gilt

$$S = X + i[S^{\pm}_X(Y) \mp \Gamma^{\pm}_X(D^2)].$$

2 Hilbertraum-wertige L^2- und direkte Integralräume

2.1 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ist für ein $f : \Omega \to H$ die Abbildung $(f(.), a)_H$ für alle $a \in H$ messbar bzgl. $\mathcal{A}$ und der Borel-Sigmaalgebra auf $\mathbb{C}$, so bezeichnet man f als *schwach messbar*.

2.2 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und H ein separabler Hilbertraum. Dann ist $L^2(\Omega, \mu, H)$ definiert als die Menge der Funktionen $f : \Omega \to H$ mit

- f ist schwach messbar,
- $\int_\Omega \|f(t)\|_H^2 \; d\mu(t) < +\infty$.

Wir definieren auf diesem Raum das Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_\Omega (f(t), g(t))_H \; d\mu(t). \tag{4}$$

Wie üblich identifizieren wir zwei Funktionen aus $L^2(\Omega, \mu, H)$, wenn sie μ-fast überall übereinstimmen.

2.3 Definition. Sei H ein separabler Hilbertraum, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $((H(t))_{t\in\Omega}$ eine Familie von abgeschlossenen Unterräumen von H. Dann ist

$$\int_\Omega \oplus H(t) \; d\mu(t) \tag{5}$$

definiert als die Menge der $f \in L^2(\Omega, \mu, H)$ derart, dass $f(t) \in H(t)$ $\mu - f\ddot{u}$. Wir bezeichnen (5) als *direkten Integralraum*.

2.4 Satz. Der Vektorraum $L^2(\Omega, \mu, H)$ zusammen mit dem Skalarprodukt (4) ist ein Hilbertraum und ein wie in (5) definierter Raum ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\Omega, \mu, H)$.

2.5 Bemerkung. Sei $\{0\} =: H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq ... \leq H_\infty := H$ eine Folge von abgeschlossenen Unterräumen von H mit $\dim H_k = k$ für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} H_n} = H$. Sei weiters $n : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $\{t \in \Omega : n(t) = k\} \in \mathcal{A}$. Betrachte nun den direkten Integralraum

$$\int_\Omega \oplus H(t) \; d\mu(t)$$

mit $H(t) := H_{n(t)}$.

3 Zerlegbare Operatoren

3.1 Generalvoraussetzung. In diesem Abschnitt bezeichnet H einen separablen Hilbertraum, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ einen σ-endlichen Maßraum und

$$\tilde{H} := \int_\Omega \oplus H(t)\ d\mu(t)$$

einen direkten Integralraum mit $H(t) \leq H, t \in \Omega$.

3.2 Definition. Ein beschränkter Operator B auf $\tilde{H}$ heißt *zerlegbar* (engl. *decomposable*), wenn es eine Familie $(B(t))_{t\in\Omega}$ mit $B(t) \in L_b(H(t)),\ t \in \Omega$, gibt, die $\mathrm{esssup}_{t\in\Omega}\|B(t)\| < +\infty$ und $Bh(t) = B(t)h(t)\ \mu - f\ddot{u}$ für alle $h \in \tilde{H}$ erfüllt. Wir schreiben

$$B = \int_\Omega \oplus B(t)\ d\mu(t)$$

für diesen Sachverhalt.

3.3 Proposition. Erfülle $\tilde{H}$ die zusätzlichen Eigenschaften aus Bemerkung 2.5 und seien

$$A = \int_\Omega \oplus A(t)\ d\mu(t) \quad \text{und} \quad B = \int_\Omega \oplus B(t)\ d\mu(t)$$

zerlegbare Operatoren auf $\tilde{H}$. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Ist $(\tilde{B}(t))_{t\in\Omega}$ mit $\tilde{B}(t) \in L_b(H(t))$ eine weitere Familie, die $B = \int_\Omega \oplus\tilde{B}(t)\ d\mu(t)$ erfüllt, so gilt $B(t) = \tilde{B}(t)\ \mu - f\ddot{u}$.

(ii) $AB = \int_\Omega \oplus A(t)B(t)\ d\mu(t)$.

(iii) $B^* = \int_\Omega \oplus B(t)^*\ d\mu(t)$.

3.4 Lemma. Erfülle $\tilde{H}$ die zusätzlichen Bedingungen aus Bemerkung 2.5 und sei $P : \tilde{H} \to \tilde{H}$ eine zerlegbare orthogonale Projektion, also

$$P = \int_\Omega \oplus P(t)\ d\mu(t).$$

Dann ist $P(t)$ eine orthogonale Projektion für μ-fast alle t auf einen Raum $Z(t)$. Dabei gilt

$$ran\ P = \int_\Omega \oplus Z(t)\ d\mu(t) =: Z.$$

Ist weiters

$$B = \int_\Omega \oplus B(t)\ d\mu(t)$$

ein zerlegbarer Operator auf $\tilde{H}$, der gegenüber Z invariant ist, so ist $B(t)$ $Z(t)$-invariant $\mu - f\ddot{u}$ und es gilt $B|_Z = \int_\Omega \oplus B(t)|_{Z(t)}\ d\mu(t)$.

Beweis. Laut Proposition 3.3, (ii) und (iii) gilt $P = PP = \int_\Omega \oplus P(t)P(t)\ d\mu(t)$ und $P = P^* = \int_\Omega \oplus P(t)^*\ d\mu(t)$. Nach Proposition 3.3, (i) folgt $P(t) = P^*(t) = P(t)P(t)\ \mu - f\ddot{u}$.

Dabei gilt

$$h \in Z \Leftrightarrow h(t) \in Z(t)\ \mu - f\ddot{u} \Leftrightarrow Ph(t) = P(t)h(t) = h(t)\ \mu - f\ddot{u} \Leftrightarrow h \in ran\ P,$$

also $Z = ran\ P$.

Die Z-Invarianz von B ist zur Gleichheit $BP = PBP$ äquivalent. Nach Proposition 3.3, (i) und (ii) bedeutet diese, dass $B(t)P(t) = P(t)B(t)P(t)$ für μ-fast alle t. Folglich gilt $(B(t))(Z(t)) = (B(t))(ran\ P(t)) \subseteq Z(t)$ für fast alle t. Klarerweise gilt auch $\text{esssup}_{t\in\Omega}\|B(t)|_{Z(t)}\| < +\infty$ und

$$B|_Z h(t) = B(t)h(t) = B(t)|_{Z(t)}h(t)$$

für $h \in Z$ und μ-fast alle t.

$\square$

3.5 Bemerkung. Für $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ ist

$$M_f h(t) := f(t)h(t)$$

ein beschränkter Operator auf $\tilde{H}$ mit $\|M_f\| \leq \|f\|_{L^\infty}$.

3.6 Satz. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$ offen oder abgeschlossen und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf Ω. Ein beschränkter Operator auf $L^2(\Omega, \mu, H)$ ist genau dann zerlegbar, wenn er für alle $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ mit dem Multiplikationsoperator M_f aus Bemerkung 3.5 kommutiert.

Das Resultat kann auf einfache Weise auf manche direkte Integralräume erweitert werden.

3.7 Korollar. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$ offen oder abgeschlossen und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf Ω. Ist $P = \int_\Omega \oplus P(t)\ d\mu(t) \in L_b(L^2(\Omega, \mu, H))$ eine zerlegbare orthogonale Projektion, so ist ein beschränkter Operator auf $ran\ P$ genau dann zerlegbar, wenn er für alle $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ mit dem Multiplikationsoperator $M_f \in L_b(ran\ P)$ kommutiert.

Beweis. Laut Lemma 3.4 ist $ran\ P$ ein direkter Integralraum, womit $M_f \in L_b(ran\ P)$ wohldefiniert ist.

Jeder zerlegbare Operator kommutiert klarerweise mit allen Multiplikationsoperatoren. Sei also $B \in L_b(ran\ P)$ ein Operator, der mit allen M_f kommutiert. Da P zerlegbar ist, gilt $BPM_f h = BM_f Ph = M_f BPh$ für $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ und $h \in L^2(\Omega, \mu, H)$. Nach Satz 3.7 ist $BP \in L_b(L^2(\Omega, \mu, H))$ zerlegbar, also

$$BP = \int_\Omega \oplus \tilde{B}(t)\ d\mu(t).$$

Da BP *ran* P-invariant ist, ist $\tilde{B}(t)$ laut Lemma 3.4 *ran* $P(t)$-invariant. Folglich gilt $B(t) := \tilde{B}(t)|_{ran\ P(t)} \in L_b(H(t))$ sowie

$$B = BP|_{ran\ P} = \int_\Omega \oplus B(t)\ d\mu(t).$$

□

Dieses Resultat kann für eine beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen noch verbessert werden.

3.8 Korollar. Sei die beschränkte Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen oder abgeschlossen und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf Ω. Ist $P = \int_\Omega \oplus P(t)\ d\mu(t) \in L_b(L^2(\Omega, \mu, H))$ eine zerlegbare orthogonale Projektion, so ist ein beschränkter Operator auf *ran* P genau dann zerlegbar, wenn er mit dem durch $\Lambda h(t) := th(t)$ definierten Operator kommutiert.

Beweis. Wähle C so groß, dass $\Omega \subseteq [-C, C]$. Wegen

$$\|\Lambda h\|^2 = \int_\Omega \|th(t)\|_H^2\ d\mu(t) \leq C^2 \int_\Omega \|h(t)\|_H^2\ d\mu(t) = C^2\|h\|^2$$

und

$$(\Lambda g, h) = \int_\Omega t \cdot (g(t), h(t))\ d\mu(t) = (g, \Lambda h)$$

ist Λ beschränkt und selbstadjungiert. Wir definieren die Abbildung $E : \mathcal{A} \to L_b(ran\ P)$ durch

$$E(\Delta)h(t) := \mathbb{1}_\Delta(t)h(t).$$

Offenbar ist E ein Spektralmaß. Wir zeigen, dass dieses Spektralmaß mit jenem von Λ übereinstimmt. Dazu sei zuerst angemerkt, dass $E_{g,h}(\Delta) = \int_\Delta (g(t), h(t))\ d\mu(t)$ und daher $E_{g,h}$ bezüglich μ die Dichte $(g(.), h(.))$ hat. Sei $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Für $g, h \in ran\ P$ gilt

$$\int_\Omega f\ dE_{g,h} = \int_\Omega f(t)(g(t), h(t))\ d\mu(t) = (M_f g, h) \tag{6}$$

und damit

$$\int_\Omega f\ dE = M_f.$$

Da Ω beschränkt ist, gilt $(t \mapsto t) \in L^\infty(\Omega, \mu)$ und daher $\int_\Omega (t \mapsto t)\ dE = M_{(t \mapsto t)} = \Lambda$, womit E das Spektralmaß zu Λ ist.

Sei schließlich B ein beschränkter Operator auf *ran* P. Ist B zerlegbar, so kommutiert er klarerweise mit Λ. Kommutiert B andererseits mit Λ, so kommutiert er auch mit allen $\int_\Omega f\ dE = M_f,\ f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Nach Korollar 3.7 ist der Operator daher zerlegbar.

4 Die Hilberttransformierte

4.1 Definition. Für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ ist die *Hilberttransformierte* Q definiert durch

$$Qf(x) := \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-x}\, dt := \frac{1}{\pi i} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{[|t-x|>\epsilon]} \frac{f(t)}{t-x}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

4.2 Satz. Die in (7) definierten Limiten existieren für λ-fast alle x und Qf stimmt für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $F^* M_{sgn} F f$ überein, wobei M_{sgn} den Multiplikationsoperator mit $sgn(t)$ und F die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R})$ bezeichnet. $Q = F^* M_{sgn} F$ ist als Zusammensetzung von unitären Operatoren wieder ein solcher. Wir erhalten

4.3 Korollar. Die Hilberttransformation ist ein unitärer linearer Operator auf $L^2(\mathbb{R})$.

5 Operatorlift

5.1 Definition. Sei $\phi : G \to \mathbb{C}$ mit einer beliebigen Menge G, H ein Hilbertraum und $\psi \in H$. Dann setzen wir

$$\phi \otimes \psi := \begin{cases} G & \to \quad H, \\ x & \mapsto \quad \phi(x) \cdot \psi. \end{cases}$$

5.2 Lemma. Sei H ein separabler Hilbertraum mit abzählbarer Orthonormalbasis $(\psi_j)_{j \in J}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(\phi_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega, \mu)$. Dann ist $(\phi_i \otimes \psi_j)_{i \in I, j \in J}$ eine ONB von $L^2(\Omega, \mu, H)$.

5.3 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum derart, dass $L^2(\Omega, \mu)$ separabel ist und H ein separabler Hilbertraum. Sei $(\phi_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalbasis von $L^2(\Omega, \mu)$ und $(\psi_j)_{j \in J}$ eine von H. Dann ist der *Operatorlift* $\hat{T}$ eines Operators $T \in L_b(L^2(\Omega, \mu))$ für ein $h = \sum_{i,j} \xi_{i,j} \phi_i \otimes \psi_j \in L^2(\Omega, \mu, H)$ mit $(\xi_{i,j})_{i \in I, j \in J} \in \ell^2(I \times J)$ definiert als

$$\hat{T}(\sum_{i,j} \xi_{i,j} \phi_i \otimes \psi_j) := \sum_{i,j} \xi_{i,j} (T\phi_i) \otimes \psi_j. \tag{8}$$

5.4 Proposition. Mit der Notation aus Definition 5.3 gelten die folgenden Aussagen.

(i) Der Operatorlift ist wohldefiniert, die Doppelsumme in (8) ist also unbedingt konvergent und der Ausdruck in (8) ist unabhängig von den gewählten Orthonormalbasen. $\hat{T}$ ist ein beschränkter Operator auf $L^2(\Omega, \mu, H)$ mit $\|\hat{T}\| \leq \|T\|$.

(ii) Für $A, B \in L_b(L^2(\Omega,\mu))$ gilt

$$\hat{A}\hat{B} = \widehat{AB}. \tag{9}$$

(iii) Ist T bijektiv, so ist es auch $\hat{T}$ und es gilt $(\hat{T})^{-1} = \widehat{T^{-1}}$.

(iv) Ist T isometrisch, so auch $\hat{T}$.

(v) Ist $T = M_f \in L_b(L^2(\Omega,\mu))$ der Multiplikationsoperator mit einer Funktion $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$, so ist $\hat{T}$ der Multiplikationsoperator mit ebendieser Funktion auf $L^2(\Omega,\mu,H)$.

(vi) Sei $\Omega := \mathbb{R}$, $\mu := \lambda$ und T_s der Translationsoperator um $s \in \mathbb{R}$, $T_s h(t) := h(t-s)$. Dann ist $\hat{T}_s$ der entsprechende Translationsoperator auf $L^2(\mathbb{R},\lambda,H)$.

6 Darstellung eines hyponormalen Operators

Sei $S = X + iY$ ein hyponormaler Operator auf dem separablen Hilbertraum H mit $\Re S = X$ und $\Im S = Y$. Gemäß Korollar 1.7 existieren $S_X^{\pm}(Y)$ und $\Gamma_X^{\pm}(D^2)$ und es gilt

$$S = X + i[S_X^{\pm}(Y) \mp \Gamma_X^{\pm}(D^2)],$$

wobei $D := \sqrt{\frac{1}{2}[S^*,S]} = \sqrt{i[X,Y]}$.

Wir setzen zunächst

$$R := \overline{ran\ D}.$$

Abhängig von diesem Unterraum wollen wir H in

$$H_1 := cls\{\bigcup_{k=0}^{\infty} X^k R\}$$

und $H_2 := H_1^{\perp}$ aufteilen. Offenbar ist H_1 abgeschlossen, X-invariant und wegen $X = X^*$ sogar X-reduzierend. Dementsprechend setzen wir $X_1 := X|_{H_1}$ und $X_2 := X|_{H_2}$.

Schritt 1: Die Darstellung von X_1. Wir wollen diesen Operator auf einem direkten Integralraum $Z_1 \leq L^2(\Omega,\lambda,R)$ mit einem kompakten Intervall $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ darstellen.

Dazu definieren wir den Operator $J : H \to L^2(\mathbb{R},R)$ durch

$$(Jf)(t) := De^{-itX}f, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Wir zeigen, dass dieser Operator beschränkt ist, wobei $ker\ J = H_2$. Nach Korollar 1.7 existiert

$$\Gamma_X(D^2) := \Gamma_X^+(D^2) + \Gamma_X^-(D^2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} D^2 e^{-itX} dt$$

als beschränkter Operator, wobei dieses uneigentliche Integral im Sinne der starken Operatortopologie zu verstehen ist. Für ein f in H gilt wegen $(e^{-itX})^* = e^{itX}$ und $D^* = D$

$$\begin{aligned}\|Jf\|^2_{L^2(\mathbb{R},R)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (De^{-itX}f, De^{-itX}f)_H\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itX}D^2e^{-itX}f, f)_H\ dt = (\Gamma_X(D^2)f, f)_H \leq \|\Gamma_X(D^2)\|\|f\|^2_H.\end{aligned}$$

J ist also ein beschränkter Operator.

Ein Vektor $f \in H$ liegt genau dann in $ker\ J$, wenn

$$De^{-itX}f = 0 \qquad \lambda - f\ddot{u}.$$

Da $(t \mapsto De^{-itX}f)$ stetig ist, ist $f \in ker\ J$ äquivalent zu

$$0 = (De^{-itX}f, g) = (f, e^{itX}Dg), \qquad t \in \mathbb{R},\ g \in H.$$

Da H_1 auch e^{itX}-invariant ist, gilt $e^{itX}Dg \in H_1$. Also folgt aus $f \in H_2 = H_1^\perp$, dass $(f, e^{itX}Dg) = 0,\ g \in H$. Gilt andererseits diese Gleichung für ein $f \in H$ und alle $g \in H$, so folgt durch n-maliges Ableiten $0 = \frac{d^n}{dt^n}(f, e^{itX}Dg) = (f, (iX)^n e^{itX}Dg)$. Für $t = 0$ erhalten wir $0 = -i^n(f, (iX)^n Dg) = (f, X^n Dg)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $f \perp X^n R,\ n \in \mathbb{N}$, und folglich $f \perp cls\{\bigcup_{i=0}^{\infty} X^i R\} = H_1$. Insgesamt haben wir $ker\ J = H_2$ gezeigt.

Für den Translationsoperator $T_s \in L_b(L^2(\mathbb{R}, R))$ mit $s \in \mathbb{R}$,

$$(T_s h)(t) := h(t-s), \qquad t \in \mathbb{R},$$

gilt

$$(Je^{isX}f)(t) = De^{-itX}e^{isX}f = De^{-i(t-s)X}f = (Jf)(t-s) = (T_sJf)(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

also

$$Je^{isX} = T_sJ. \tag{10}$$

Wir sehen, dass $T_s(ran\ J) \subseteq ran\ J$, und folglich $T_s(\overline{ran\ J}) \subseteq \overline{T_s(ran\ J)} \subseteq \overline{ran\ J}$.

Sei $J = WK$ die polare Faktorisierung von J , mit positivem Operator $K = \sqrt{J^*J} \in L_b(H)$ und der partiellen Isometrie $W : H \to L^2(\mathbb{R}, R)$, wobei $ker\ W = (ran\ K)^\perp$ und $ran\ K = \overline{ran\ J}$. Wegen $(ran\ K)^\perp = ker\ K = ker\ J =$

H_2 folgt $\overline{ran\ K} = (ker\ K)^\perp = H_1$, also ist $W|_{H_1}$ ein isometrischer Operator mit $ran\ W|_{H_1} = \overline{ran\ J}$ und $W|_{H_2} = 0$. Aus (10) erhalten wir

$$J^*Je^{isX} = J^*T_sJ = J^*T_{-s}^*J = (T_{-s}J)^*J = (Je^{-isX})^*J = e^{isX}J^*J. \tag{11}$$

e^{isX} kommutiert also mit J^*J und folglich auch mit K. Daher gilt

$$We^{isX}f = We^{isX}Kg = WKe^{isX}g = T_sWKg = T_sWf, \qquad f = Kg \in ran\ K, s \in \mathbb{R}.$$

Da $ran\ K$ dicht in H_1 liegt, erhalten wir

$$(We^{isX})|_{H_1} = (T_sW)|_{H_1}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Sei $\hat{F}$ der Operatorlift der Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}, R)$ und $V := \hat{F}^*W : H \to L^2(\mathbb{R}, R)$. Da $\hat{F}$ wegen Proposition 5.4, (iii) und (iv) unitär ist, bildet V den Raum H_1 isometrisch auf einen bestimmten Unterraum Z_1 von $L^2(\mathbb{R}, R)$ ab, womit $V_1 := V|_{H_1 \to Z_1}$ unitär ist.

Aus Proposition 5.4 folgt $T_s\hat{F} = \hat{F}M_s$, wobei $M_s \in L_b(L^2(\mathbb{R}, R))$ definiert ist als $M_sh(t) := e^{ist}h(t)$. Es gilt also

$$(Ve^{isX})|_{H_1} = (\hat{F}^*We^{isX})|_{H_1} = (\hat{F}^*T_sW)|_{H_1} = (M_s\hat{F}^*W)|_{H_1} = (M_sV)|_{H_1}. \tag{12}$$

Wegen dieser Gleichung ist Z_1 für jedes s M_s-invariant und damit auch $M_s^* = M_{-s}$-invariant.

Für $f \in H_1$ hat die Funktion $(s \mapsto Ve^{isX}f = M_sVf)$ die Ableitung iVX_1f an der Stelle $s = 0$. Für $g \in L^2(\mathbb{R}, R)$ gilt

$$\begin{aligned}(\frac{d}{ds}M_sVf, g) &= \int_{\mathbb{R}} (\frac{d}{ds}e^{ist}Vf(t), g(t))_H \ d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{ds}e^{ist}(Vf(t), g(t))_H \ d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} ite^{ist}(Vf(t), g(t))_H \ d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} (itM_sVf(t), g(t))_H \ d\lambda(t).\end{aligned} \tag{13}$$

Mit $F(t) := \frac{d}{ds}e^{ist}Vf(t) - itM_sVf(t)$ und

$$G(t) := \begin{cases} \frac{F(t)}{\|F(t)\|} \cdot e^{-t^2}, & \text{falls } F(t) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gilt $G \in L^2(\mathbb{R}, R)$ und wir erhalten

$$0 = \int_{\mathbb{R}} (F(t), G(t)) \ d\lambda(t) = \int_{[F \neq 0]} \|F(t)\| \cdot e^{-t^2} \ d\lambda(t).$$

Infolge gilt $F = 0$ und daher $(t \mapsto itM_sVf(t)) = \frac{d}{ds}e^{ist}Vf(t)$. Insbesondere stimmt die Ableitung an der Stelle $s = 0$ mit $(t \mapsto itVf) \in Z_1$ überein. Definiert man für ein $h \in L^2(\mathbb{R}, R)$ mit $(t \mapsto th(t)) \in L^2(\mathbb{R}, R)$ wie üblich Λ durch

$$\Lambda h(t) := th(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

so existiert $\Lambda V f$ und es gilt $V X_1 f = \Lambda V f$. Daraus folgt $V_1 X_1 V_1^* = \Lambda|_{Z_1} =: \Lambda_1$ und damit insbesondere, dass Z_1 ein Λ-reduzierender Unterraum ist, auf dem Λ einen beschränkten, überall definierten Operator darstellt.

Schließlich zeigen wir noch, dass alle $h \in Z_1$ außerhalb einer beschränkten Menge verschwinden. Wir setzen dazu $\Omega := [-2\|\Lambda_1\|_{L_b(Z_1)}, 2\|\Lambda_1\|_{L_b(Z_1)}]$ und zeigen

$$\|h \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\Omega}\| = 0 \tag{14}$$

für alle $h \in Z_1$. Dazu sei angenommen, dass $\|h \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\Omega}\| > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\Lambda_1^n h \in Z_1$ und

$$\begin{aligned}\|\Lambda_1^n h\|^2 &\geq \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega} (|t^n| \|h(t)\|_H)^2 \; d\lambda(t) \\ &\geq (2\|\Lambda_1\|)^{2n} \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega} \|h(t)\|_H^2 \; d\lambda(t) = \left(2^n \|\Lambda_1\|^n \|h \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\Omega}\|\right)^2.\end{aligned}$$

Mit hinreichend großem n gilt $2^n\|h \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\Omega}\| > \|h\|$ und folglich $\|\Lambda_1^n h\| \geq 2^n\|\Lambda_1\|^n\|h \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\Omega}\| > \|\Lambda_1\|^n\|h\|$, was zu $\|\Lambda_1^n h\| \leq \|\Lambda_1\|^n\|h\|$ im Widerspruch steht.

Wegen (14) gilt also $h = 0 \; \lambda - f\ddot{u}$ auf $\mathbb{R} \setminus \Omega$. Z_1 kann somit auf kanonische Art als Unterraum von $L^2(\Omega, \lambda, R)$ betrachtet werden. Bezeichnet P_{Z_1} die orthogonale Projektion auf Z_1 in $L^2(\Omega, \lambda, R)$, so kommutiert in weiterer Folge $\Lambda|_{L^2(\Omega,\lambda,R)}$ mit P_{Z_1}. Nach Korollar 3.8 gilt

$$P_{Z_1} = \int_\Omega \oplus P_{Z_1}(t) \; d\lambda(t) \tag{15}$$

und gemäß Lemma 3.4 ist $P_{Z_1}(t)$ für λ-fast alle t die orthogonale Projektion auf einen Raum $Z_1(t)$, wobei

$$Z_1 = \int_\Omega \oplus Z_1(t) \; d\lambda(t). \tag{16}$$

Zusammenfassend ist also X_1 unitär äquivalent zu Λ_1 auf dem Raum Z_1, der eine Darstellung wie in (16) besitzt.

Schritt 2: Die Darstellung von $\Gamma_X^{\pm}(D^2)$ auf Z_1. Aufgrund von

$$(\Gamma_X^{\pm}(D^2)f, f) = (\pm \int_0^{\pm\infty} e^{itX} D^2 e^{-itX} f \; dt, f) = \pm \int_0^{\pm\infty} (e^{itX} D^2 e^{-itX} f, f) \; dt \geq 0$$

für alle $f \in H$ ist $\Gamma_X^{\pm}(D^2)$ positiv und infolge selbstadjungiert. Wegen $e^{itX} D^2 e^{-itX} g \in e^{itX} ran \; D \subseteq e^{itX} H_1 \subseteq H_1$ reduziert H_1 den Operator $\Gamma_X^{\pm}(D^2)$. Außerdem verschwindet er auf H_2, da für ein $g \in H_2$

$$(\sqrt{\Gamma_X^{\pm}(D^2)}g, \sqrt{\Gamma_X^{\pm}(D^2)}g) = (\Gamma_X^{\pm}(D^2)g, g) = \pm \int_0^{\pm\infty} (e^{itX} D^2 e^{-itX} g, g) \; dt = 0, \tag{17}$$

weshalb $\Gamma_X^{\pm}(D^2)g = \sqrt{\Gamma_X^{\pm}(D^2)}^2 g = 0$.

Für ein $h \in L^2(\mathbb{R}, R)$ gilt

$$J^* h = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} Dh(t)\ dt, \tag{18}$$

falls dieses uneigentliche Riemann-Integral existiert, denn für ein $g \in H$ gilt dann

$$\begin{aligned}(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} Dh(t)\ dt, g)_H &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itX} Dh(t), g)_H\ dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (h(t), (Jg)(t))_H\ dt &= (h, Jg)_{L^2(\mathbb{R},R)} = (J^*h, g)_H.\end{aligned}$$

Für $h \in ran\ J$ existiert das Integral in (18), da für $f \in H$ mit $Jf = h$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} Dh(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} DDe^{-itX} f\ dt = \Gamma_X(D^2)f. \tag{19}$$

Kombinieren wir (18) und (19), so erhalten wir $J^*J = \Gamma_X(D^2)$. Bezeichnen wir mit M_+ bzw. M_- den Multiplikationsoperator mit der charakteristischen Funktion zu $\mathbb{R}_+$ bzw. $\mathbb{R}_-$, so gilt für $f \in H$ auch

$$J^* M_{\pm} J f = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\pm}}(t) e^{itX} DDe^{-itX} f dt = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} e^{itX} D^2 e^{-itX} f\ dt = \Gamma_X^{\pm}(D^2) f.$$

Es sei bemerkt, dass diese Gleichung von rechts nach links gelesen werden sollte, da die Existenz des Integrals im zweiten Term die Darstellung von J^* wie in (18) garantiert.

Wegen $ran\ V = Z_1$ gilt $P_{Z_1} V = V$. Wir erinnern uns, dass $J = WK = \hat{F}\hat{F}^* WK = \hat{F} VK$ und folgern daraus

$$\begin{aligned} V_1[\Gamma_X^{\pm}(D^2)]|_{H_1} V_1^* &= V_1 (J^* M_{\pm} J)|_{H_1} V_1^* \\ &= V_1 K|_{H_1} V_1^* (P_{Z_1} \hat{F}^* M_{\pm} \hat{F})|_{Z_1} V_1 K|_{H_1} V_1^* = B(P_{Z_1} P_{\pm})|_{Z_1} B, \end{aligned} \tag{20}$$

wobei $B := V_1 K|_{H_1} V_1^* \in L_b(Z_1)$ und $P_{\pm} := (\hat{F}^* M_{\pm} \hat{F})$.

Wegen Gleichung (12) und weil e^{isX} gemäß (11) mit K kommutiert, gilt

$$\begin{aligned} BM_s|_{Z_1} &= V_1 K|_{H_1} ((M_{-s})|_{Z_1} V_1)^* = V_1 K|_{H_1} (V_1 (e^{-isX})|_{H_1})^* \\ &= V_1 K|_{H_1} e^{isX}|_{H_1} V_1^* = V_1 e^{isX}|_{H_1} K|_{H_1} V_1^* = M_s|_{Z_1} V_1 K|_{H_1} V_1^* = M_s|_{Z_1} B. \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass - wie bereits bemerkt - e^{isX} den Raum H_1 und M_s Z_1 reduziert. Ähnlich wie in (13) sieht man, dass für $f \in Z_1$ die Ableitung von $(t \mapsto M_t f)$ an der Stelle $t = 0$ gleich Λf ist, womit B auch mit Λ_1 kommutiert. Nach Korollar 3.8 ist B infolge zerlegbar in

$$B = \int_{\Omega} \oplus B(t)\ d\lambda(t). \tag{21}$$

Ist M_{sgn} der Multiplikationsoperator mit $sgn(t)$ auf $L^2(\mathbb{R}, R)$, so folgt $P_+ - P_- = \hat{F}^*(M_+ - M_-)\hat{F} = \hat{F}^* M_{sgn}\hat{F}$. Wegen Satz 4.2 und Proposition 5.4 gilt $\hat{F}^* M_{sgn}\hat{F} = \hat{Q}$, wobei $\hat{Q}$ den Operatorlift der Hilberttransformation bezeichnet.

Also erhalten wir $P_+ - P_- = \hat{Q}$ und wegen $P_+ + P_- = I_{L^2(\mathbb{R},R)}$ auch $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm \hat{Q})$. Zusammen mit (15), (20) und (21) folgt für den Operator

$$\Gamma_1^{\pm} := V_1[\Gamma_X^{\pm}(D^2)]|_{H_1} V_1^* = BP_{Z_1}\frac{1}{2}(I \pm \hat{Q})B = \frac{1}{2}[B^2 \pm BP_{Z_1}\hat{Q}B]$$

die Formel

$$\Gamma_1^{\pm} f(x) = \frac{1}{2}[B^2(x)f(x) \pm \frac{B(x)P_{Z_1}(x)}{\pi i}\int_\Omega \frac{B(t)f(t)}{t-x}dt], \qquad f \in Z_1, \qquad (22)$$

wobei hier das Integral rein formal zu verstehen ist, also $\frac{1}{i\pi}\int_\Omega \frac{h(t)}{t-x}\,dt := (\hat{Q}h)(x)$.