1. Überprüfen Sie, ob die gegebenen Vorschriften ein inneres Produkt auf den jeweiligen Vektorräumen definiert.

   (a) $V = \mathbb{R}^2, \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2$
   (b) $V = \mathbb{R}^2, \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$
   (c) $V = \mathbb{R}^2, \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1^2y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$

   Bemerkung: Bei (a) - (b) ist die Schreibweise $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y}$ mit einer geeigneten Matrix A nützlich.
   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 5.1

2. Untersuchen Sie, ob die angegebenen Vorschriften ein inneres Produkt auf dem Vektorraum $V = P_n$ aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich n definiert.

   (a) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$
   (b) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} xp(x)q(x)\,\mathrm{d}x$

   Bemerkung: Die Resultate zu (a) - (b) gelten ungeändert falls V jeweils der Vektorraum von integrierbaren Funktionen ist, für welche die auftretenden Integrale einen endlichen Wert annehmen.
   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 5.2

3. Bestimmen Sie den Abstand und den Winkel α zwischen den angebenen Vektoren im Sinne des angegebenen inneren Produktes.

   (a) $V = \mathbb{R}^3$, kanonisches inneres Produkt, $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)^T$, $\boldsymbol{y} = (-1, 2, 0)^T$
   (b) $V = \mathbb{R}^3$, kanonisches inneres Produkt, $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)^T$, $\boldsymbol{y} = (-5, 1, 1)^T$
   (c) $V = P_n, \quad \langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x, \quad p = x^2,\ q = x^3 - 2x$

   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 5.3

4. Im Vektorraum P der Polynome definiert

   $$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \qquad p, q \in P$$

   ein inneres Produkt.

   (a) Es seien $p(x) = x + 2$ und $q(x) = x^2 - 2x - 3$. Geben Sie $\langle p, q \rangle$ und $\|p\|_2$ an.
   (b) Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $p_0(x) = 1$ und $p_1(x) = x$ steht.

   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 5.4

5. Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und die zugehörige Basis B definiert durch

$$B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von V mit hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens.
Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 5.6

6. Betrachten Sie den Vektorraum $V = P_2$ aller Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 2 mit dem inneren Produkt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraum W, der zu $p(x) = 2x + 1$ orthogonal ist.

(b) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmid'schen Orthonormalisierungsverfahren eine orthonormale Basis $\{p_1, p_2, p_3\}$ bezüglich der Monombasis $B = \{1, x, x^2\}$.

(c) Berechnen Sie in den Abstand von $p(x) = 1 + x$ und $q(x) = x^2 - 1$ bezüglich des gegebenen inneren Produkts.

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 5.9

7. Gegeben sei ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $(V, \langle .,. \rangle)$, ein Unterraum U und ein Vektor $\boldsymbol{v} \in V$.
Betrachten Sie den konkreten Fall $V = \mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen inneren Produkt und

$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie nun jenen Vektor $\boldsymbol{u} \in U$, sodass $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|_2$ minimal ist und berechnen Sie anschließend $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|_2$.
Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 5.10

8. Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathbb{R}^5$ und den Unterraum U definiert durch

$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U und $U^\perp$.
Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 5.18

9. Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und den Unterraum $U = \mathcal{L}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, wobei

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie U geometrisch.

(a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis B von U.

(b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von $\boldsymbol{x}$ bezüglich der Orthonormalbasis, wobei $\boldsymbol{x} = (2, 6, 1)^T$.

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 5.32

10. Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum $V = (C[-1, 1], \langle ., . \rangle)$, wobei das Skalarprdukt und die Norm gegeben sind durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

(a) Betrachten Sie den Unterraum U von V mit der Basis $B = \{b_1, b_2\} = \{1, x\}$, d.h. $U = \{p(x) = ax + b, \, a, b \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von B bezüglich des gegebenen Skalarprodukts mithilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens.

(b) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von $v(x) = -\mathrm{e}^x \in V$ auf den Unterraum U.

Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 5.34