1. (UE-Skriptum 3.2) Gegeben seien die folgenden Abbildungen.

$$\varphi\colon P_n \to P_{n-1},\ \varphi(p) = p'(x), \qquad \psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \psi(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2$$
$$\text{und} \quad \xi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \xi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Überprüfen Sie die Abbildungen φ, ψ, ξ jeweils auf Linearität.

   (b) Falls die Abbildungen jeweils linear sind, bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ bzw. der Monombasis $\{1, x, \ldots, x^n\}$ von P_n.

   (c) Bestimmen Sie jeweils das Bild und den Kern aller linearen Abbildungen.

   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 3.2

2. Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in V$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \varphi(A) = AM - MA$$

   linear ist und bestimmen Sie eine Basis des Kerns sowie des Bildes von φ. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 3.6

3. Gegeben seien die linearen Abbildungen $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie für die folgenden linearen Abbildungen die Abbildungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis an.

$$5\varphi + 3\psi, \quad \varphi \circ \psi, \quad \psi \circ \varphi, \quad \varphi^2, \quad \psi^2, \quad \psi^{-1}$$

   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 3.7

4. Gesucht sei eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, sodass gilt

$$\operatorname{Bild}(\varphi) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \operatorname{Kern}(\varphi) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Geben Sie die Abbildungsmatrix φ bezüglich der kanonischen Basis an. Ist die Abbildung φ durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt?

   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 3.8

5. Gegeben sei eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 + 2x_3)^T.$$

   (a) Zeigen Sie, dass φ bejektiv ist.

   (b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ^{-1} bezüglich der kanonischen Basis.

   (c) Gegeben sei $\boldsymbol{v} = (1, 1, 1)^T$. Bestimmen Sie $\varphi^{-1}(\boldsymbol{v})$.

   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 3.9

6. Betrachten Sie den Vektorraum $V = P_3$ aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3. Gegeben sei die Abbildung φ durch $\varphi(p) = p'$, wobei mit p' die Ableitung des Polynoms zu verstehen ist. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[\varphi(B)]_B$ für die Basis

$$B = \{x^2, 2x^2 - 1, x^2 - x, x^3 + 2x^2 + x + 2\}.$$

   Lösung. Siehe Übungsskriptum, Beispiel 3.13