1. (UE-Skriptum 3.14) Betrachten Sie die Vektorräume $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$ mit den jeweiligen Basen
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{und} \qquad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$
Weiters sei eine lineare Abbildung definiert durch
$$\varphi\colon V \to W, \qquad [\varphi(B)]_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie für $\boldsymbol{a} = (0,5,6)^T$ den Vektor $\varphi(\boldsymbol{a}) \in W$.

2. Die beiden Vektoren
$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
bilden eine Basis des Vektorraums $V = \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die zugehörige duale Basis von V^*.

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und eine Basis $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ gegeben durch
$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die duale Basis $B^* = \{b^1, b^2, b^3\}$ des Dualraums V^*.

4. (UE-Skriptum 4.6) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert durch
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie $\det A$.

5. (UE-Skriptum 4.2) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert durch
$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a & 3 & 2-a \\ a+2 & 2 & 8 & a \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -a & -1 & a-5 & 1-a \end{pmatrix}$$
mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass gilt $\det A = 0$.

6. (UE-Skriptum 4.3) Betrachten Sie die beiden Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Untersuchen Sie, ob die beiden Matrizen ähnlich sind. Überprüfen Sie zunächst, ob $\det A = \det B$ gilt. Bestimmen Sie anschließend die Matrix $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass gilt $TAT^{-1} = B$ als Lösung der Matrizengleichung $TA = BT$.

7. (UE-Skriptum 4.10) Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} cx_1 - x_2 &= b_1 \\ -x_1 + cx_2 - x_3 &= b_2 \\ -x_2 + cx_3 &= b_3 \end{aligned}$$

mit der Inhomogenität $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Welche Aussagen können Sie anhand der Determinante der Koeffizientenmatrix über die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit des Parameters $c \in \mathbb{R}$ treffen? Betrachten Sie hierfür die beiden Fälle

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$