1. Sei $(G, \diamond)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für alle $a \in G$ neben der Rechenregel $a \diamond e = a$ auch, $e \diamond a = a$, sowie aus der üblichen Regenregel $a \diamond a^{-1} = e$ auch $a^{-1} \diamond a = e$ erfüllt ist. Dies gilt, obwohl die Gruppe nicht kommutativ ist und das Kommutativgesetz nicht ausgenutzt werden darf.

2. Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Addition $\oplus$ und Multiplikation $\odot$ modulo 4 in $\mathbb{Z}_4$ an. Begründen Sie, dass $\mathbb{Z}_4$ mit den so definierten Verknüpfungen einen kommutativen Ring mit Einselemen darstellt.

3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_8$ keinen Körper bildet.

4. (UE-Skriptum 1.2) Sei $V = \{(a, b)\colon a, b \in \mathbb{R}\}$. Auf V wird die Operation der Addition in V und Multiplikation mit einem Skalar $s \in \mathbb{R}$ definiert als

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \qquad s(a, b) = (s^2 a, s^2 b).$$

   Untersuchen Sie, ob V mit diesen Operationen einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ darstellt.

5. Seien p_1 und p_2 quadratische Polynome, gegeben durch

$$p_1(x) = -x^2 - x + 1, \qquad p_2(x) = 2x^2 + 2x + 2.$$

   $U = \mathcal{L}(p_1, p_2)$ ist ein Unterraum des Polynomraumes $P_2 = \{ax^2 + bx + c\colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $B = \{p_1, p_2\}$ eine Basis von U ist.
   (b) Bestimmen Sie die Dimension von U.
   (c) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $q(x) = ax^2 - 2x + 6 \in U$ erfüllt ist.

6. (UE-Skriptum 1.4) Sei $V = \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass W ein Unterraum von V ist und bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis. Interpretieren Sie W geometrisch.

   (a) $W = \{(x_1, x_2, 0)^T\colon x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$
   (b) $W = \{(x_1, x_2, x_3)^T\colon x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$
   (c) $W = \{(x_1, x_2, x_3)^T\colon \boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R}\}$

7. (UE-Skriptum 1.12) Sind die folgenden Polynome aus dem Vektorraum P_3 linear abhängig oder linear unabhängig?

   (a) $x^2, x^2 - 2, x^3 + x, x^3 + 2x^2 + 1$
   (b) $1, x, x^2 - 2, x^3 + x, x^3 + 2x + 1$

8. (UE-Skriptum 1.18) Seien U und V die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^3$

$$U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \quad W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 = 2x_3\}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von U, V, $U \cap W$, $U + W$.

(b) Überprüfen Sie anhand dieses Beispiels die Aussage

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$