Università degli studi di Trieste

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Tesi di Laurea Specialistica in Analisi Matematica

CONVERGENZA DI CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO PER TRAVI SOTTILI IN ELASTICITÀ NONLINEARE.

Relatore:
Chiar.ma Dott.ssa
MARIA GIOVANNA MORA

Presentata da:
ELISA DAVOLI

Sessione estiva
Anno Accademico 2008-2009

Indice

Introduzione

In ingegneria strutturale e in scienza delle costruzioni è un procedimento comune utilizzare modelli bidimensionali o unidimensionali per descrivere il comportamento elastico di una struttura tridimensionale 'sottile', in cui cioè una o più dimensioni siano trascurabili rispetto alle altre. Esempi di strutture sottili sono membrane, piastre o gusci, il cui spessore è molto piccolo rispetto alle dimensioni longitudinali, o ancora corde o travi, la cui sezione è molto piccola rispetto alla dimensione longitudinale. Scopo di questa tesi è studiare il comportamento asintotico di configurazioni di equilibrio di una trave elastica sottile quando il parametro che ne descrive lo spessore tende a zero, individuando così un'equazione di equilibrio limite unidimensionale.

La relazione fra la teoria tridimensionale dell'elasticità e i diversi modelli approssimanti è rimasta per molti anni una questione aperta. La derivazione classica di questi modelli ridotti si basa infatti su un'espansione asintotica formale della teoria tridimensionale in termini del parametro che descrive lo spessore dell'oggetto, supponendo ipotesi cinematiche piuttosto restrittive sulle deformazioni tridimensionali. Questo modo di procedere ha portato alla presenza in letteratura di numerose teorie ridotte, che risultano a volte in contraddizione l'una con l'altra e il cui ambito di validità è tipicamente non chiaro.

Il primo risultato di derivazione matematicamente rigorosa nell'ambito dell'elasticità nonlineare è stato ottenuto all'inizio degli anni '90, da E. Acerbi, G. Buttazzo e D. Percivale, in [A-B-P]. In questo articolo, il comportamento asintotico di una trave elastica sottile è studiato utilizzando un approccio variazionale, basato su tecniche di Γ-convergenza. Quest'ultima è una convergenza di tipo variazionale, introdotta da De Giorgi verso la metà degli anni '70 ([DG-F]). Nell'ambito dei problemi di riduzione di dimensione, la Γ-convergenza garantisce la convergenza dei punti di minimo dell'energia tridimensionale a punti di minimo di opportuni funzionali limite. (Per le proprietà generali della Γ-convergenza si veda la monografia [DM]).

Lo stesso tipo di approccio è stato poi utilizzato per studiare il comportamento asintotico di una piastra sottile nei lavori di H. Le Dret e A. Raoult ([L-R]) e di G. Friesecke, R.D. James e S. Müller, ([F-J-M], [F-J-M2]), in cui si è arrivati a identificare una gerarchia di modelli bidimensionali, ognuno dei quali corrisponde a un diverso ordine di grandezza (in termini del parametro spessore) delle forze di carico applicate.

Negli anni successivi, ad opera di M.G. Mora, S. Müller e L. Scardia ([M-M], [M-M3], [S]), si è giunti ad una classificazione analoga per le travi, completando così il lavoro di E. Acerbi, G. Buttazzo e D. Percivale. Più precisamente, sia $\Omega_h = (0, L) \times hS$ la configurazione di riferimento di una trave tridimensionale, dove $L > 0$, S è un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^2$ con frontiera lipschitziana e h è un parametro positivo tendente a zero. Si suppone che l'energia elastica (per unità di sezione) associata a una deformazione $v : \Omega_h \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $v \in W^{1,2}(\Omega_h, \mathbb{R}^3)$, sia data dal funzionale:

$$\mathcal{E}^h(v) = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_h} W(\nabla v(z))dz,$$

dove la densità di energia elastica $W : \mathcal{M}^{3\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfa opportune proprietà di frame-indifference e coercività ed è minima sull'insieme delle rotazioni (si veda la Sezione 1.1). Poiché si è interessati a studiare il comportamento asintotico di $\mathcal{E}^h$ per $h \to 0$, è conveniente effettuare il cambio di variabili $z = (x_1, hx_2, hx_3)$ e riscalare le deformazioni, ponendo $y(x) = v(z)$.

Con la definizione $\nabla_h y := \left(\partial_1 y, \frac{\partial_2 y}{h}, \frac{\partial_3 y}{h}\right)$, si ottiene

$$\mathcal{E}^h(v) = I^h(y) = \int_\Omega W(\nabla_h y)dx.$$

Inoltre, si assume per semplicità che le forze di carico applicate alla trave agiscano in direzione ortogonale alla sua fibra mediana e che abbiano densità $h^\alpha(f_2 e_2 + f_3 e_3)$, con $\alpha \geq 0$, $f_2, f_3 \in L^2(0, L)$. L'energia totale (per unità di sezione) associata a una deformazione riscalata $y \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ è quindi data dal funzionale

$$J^h(y) = I^h(y) - \int_\Omega h^\alpha(f_2 y_2 + f_3 y_3)dx.$$

A seconda del valore di α, si ha un diverso comportamento asintotico dell'energia J^h, che e' descritto al limite da un opportuno funzionale unidimensionale I_α. Più precisamente, si può dimostrare che l'energia J^h in corrispondenza dei suoi punti di minimo riscala come h^β, dove $\beta = \alpha$ se $0 \leq \alpha \leq 2$ e $\beta = 2\alpha - 2$ se $\alpha > 2$. Il funzionale limite I_α si ottiene quindi come Γ-limite dei funzionali $h^{-\alpha}J^h$ per $0 \leq \alpha \leq 2$ e $h^{-2\alpha+2}J^h$ per $\alpha > 2$. Nel caso $\alpha = 0$, studiato in [A-B-P], il comportamento limite è quello di una stringa unidimensionale, ovvero l'energia associata ad una deformazione dipende solo dagli effetti di allungamento. Per $0 < \alpha < 2$ il funzionale limite è degenere: il contributo dell'energia elastica risulta infatti nullo su isometrie e compressioni e infinito altrimenti. Il caso $\alpha = 2$ è stato discusso in [M-M3], ottenendo che al limite le uniche deformazioni ammissibili della trave sono isometrie della sua fibra mediana e che l'energia ad esse associata dipende soltanto dagli effetti di curvatura e torsione. Per $\alpha > 2$ si ha che le deformazioni limite sono non solo delle isometrie ma addirittura dei movimenti rigidi. Si ha quindi un effetto di linearizzazione, che porta ad un'energia dipendente dai piccoli spostamenti attorno al moto rigido limite provocati dalla deformazione. In particolare, per $\alpha = 3$ il Γ-limite corrisponde all'analogo unidimensionale del funzionale di von Kármán per le piastre. Per $\alpha > 3$ il Γ-limite corrisponde al funzionale lineare per le travi, mentre per $2 < \alpha < 3$ l'energia è ancora lineare, ma contiene un vincolo nonlineare di tipo isometrico (si veda Sezione 1.3).

L'approccio mediante Gamma-convergenza non assicura a priori proprietà di convergenza per le configurazioni di equilibrio tridimensionali che non siano minimizzanti.

I primi lavori sullo studio del comportamento asintotico delle configurazioni di equilibrio sono stati realizzati per le travi nel caso $\alpha = 2$ da M.G.Mora, S.Müller e M.G.Schultz ([M-M-S]) e per le piastre nel caso $\alpha \geq 3$, da S.Müller e R.Pakzad ([M-P]), provando la convergenza a meno di sottosuccessioni dei punti di equilibrio tridimensionali a punti di equilibrio del Γ-limite I_α. In tali articoli si richiede che la densità di energia elastica sia ovunque differenziabile con derivata a crescita lineare, ovvero:

$$|DW(F)| \leq C(1 + |F|) \text{ per ogni } F \in \mathcal{M}^{3\times 3}. \tag{1}$$

Tale condizione garantisce che sia ben posta la definizione tradizionale di punto stazionario per i funzionali J^h e che la condizione di stazionarietà sia soddisfatta dai punti di minimo locale (si veda in proposito l'Osservazione 1.2.2).

Il primo risultato ottenuto in questa tesi, che completa il lavoro [M-M-S], è la dimostrazione della convergenza delle configurazioni di equilibrio per una trave sottile nel caso $\alpha > 2$ e sotto l'ipotesi (1). Più precisamente, dato $\alpha > 2$, ogni successione $(y^h) \subset W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ soddisfacente la condizione al bordo

$$y^h(0, x_2, x_3) = (0, hx_2, hx_3), \tag{2}$$

la stima dell'energia

$$\int_\Omega W(\nabla_h y^h) dx \leq Ch^{2\alpha-2} \tag{3}$$

e la condizione di stazionarietà:

$$\int_\Omega DW(\nabla_h y^h) : \nabla_h \phi dx - \int_\Omega h^\alpha (f_2\phi_2 + f_3\phi_3) dx = 0 \tag{4}$$

per ogni $\phi \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tale che $\phi(0, x_2, x_3) = 0$, converge a meno di sottosuccessioni ad un punto stazionario del Γ-limite I_α (Teorema 3.1.1).

Nel caso $\alpha \geq 3$ la dimostrazione di questo risultato non presenta difficoltà aggiuntive rispetto al caso delle piastre, studiato in [M-P]. Lo strumento chiave è la stima di rigidità dimostrata da G. Friesecke, R.D. James e S. Müller in [F-J-M], che assicura la compattezza delle deformazioni y^h e permette di decomporre il gradiente riscalato $\nabla_h y^h$ nel prodotto di una rotazione e di un termine di strain, che risulta debolmente compatto in L^2. A questo punto si può introdurre una variabile di stress, associata alla nuova variabile di strain, in termini della quale si può esprimere l'equazione di Eulero-Lagrange tridimensionale (4). La compattezza debole degli strain in L^2 garantisce, grazie all'ipotesi di crescita (1), la compattezza degli stress in L^2, che risulta sufficiente per passare al limite nelle equazioni di Eulero-Lagrange.
Nel caso $2 < \alpha < 3$, nonostante la presenza del vincolo nonlineare, la dimostrazione si può estendere senza difficoltà, grazie alla natura unidimensionale del problema limite.

L'ipotesi (1) ha tuttavia lo svantaggio di non essere compatibile con la richiesta fisica che la densità di energia elastica soddisfi:

$$\begin{gathered} W(F) \to +\infty \text{ per } \det(F) \to 0, \\ W(F) = +\infty \text{ se } \det(F) < 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Tali condizioni corrispondono alla richiesta che forti compressioni della trave abbiano energia molto alta e che sia rispettata l'incompenetrabilità della materia, restringendo l'insieme delle deformazioni ammissibili alle mappe con gradiente a determinante positivo. D'altra parte, senza l'ipotesi (1) di crescita lineare della mappa DW, la definizione classica di punti stazionari dell'energia tridimensionale non è ben posta (si veda l'Osservazione 1.2.2). In [B] J.M. Ball ha mostrato come, sotto le ipotesi (5) e la condizione di crescita

$$|DW(F)F^T| \leq k(W(F)+1) \text{ per ogni } F \in \mathcal{M}^{3\times 3}_+, \tag{6}$$

dove $\mathcal{M}^{3\times 3}_+ = \{F \in \mathcal{M}^{3\times 3} : \det F > 0\}$, sia possibile dare una definizione alternativa di punto stazionario, così da ottenere una nuova condizione del primo ordine per le configurazioni di equilibrio tridimensionali. Più precisamente, una deformazione $w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ soddisfacente le condizioni al bordo (2) è un punto stazionario alla Ball se verifica:

$$\int_\Omega DW(\nabla_h w)(\nabla_h w)^T : \nabla\phi(w) dz dx = \int_\Omega h^\alpha (f_2\phi_2(w) + f_3\phi_3(w)) dx, \qquad (7)$$

per ogni $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ limitata, con derivate prime limitate e tale che $\phi(0, hx_2, hx_3) = 0$ per $(x_2, x_3) \in S$. Nel recente lavoro [M-S], sotto le ipotesi (5) e (6), si è dimostrata la convergenza di punti stazionari alla Ball a punti stazionari del Γ-limite, nel caso delle piastre e per il regime $\alpha \geq 3$.

Il secondo risultato ottenuto, che rappresenta la parte piu' interessante di questa tesi, riguarda lo studio della convergenza dei punti stazionari alla Ball, per una trave sottile, sotto le ipotesi fisiche (5) e (6). Più dettagliatamente, si è dimostrato che, dato $\alpha > 2$, ogni successione $(y^h) \subset W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ soddisfacente la condizione al bordo (2), la stima dell'energia (3) e la condizione di stazionarietà alla Ball (7) converge, a meno di sottosuccessioni, a un punto stazionario del Γ-limite I_α (Teorema 4.1.1). Per $\alpha \geq 3$ la dimostrazione di questo risultato segue lo schema di ragionamento utilizzato nel caso di ipotesi di crescita lineare; tuttavia, si hanno difficoltà aggiuntive dovute all'indebolimento delle proprietà di convergenza degli stress. Infatti, sotto le ipotesi (5) e (6), l'uniforme limitatezza degli strain assicura solamente convergenza debole in L^1 degli stress, che non è sufficiente per passare al limite nelle equazioni di Eulero-Lagrange (7). Tale difficoltà viene superata osservando che si può costruire una successione di insiemi che invadono Ω, tali che, su di essi gli stress convergano debolmente in L^2, mentre sul complementare forniscano contributo trascurabile per $h \to 0$.

Per $2 < \alpha < 3$ il problema presenta una difficoltà ulteriore, legata al fatto che nella definizione di punti stazionari alla Ball si utilizzano funzioni test valutate non sulla configurazione di riferimento, ma sulla configurazione deformata.

La natura di questa difficoltà può essere spiegata euristicamente con la seguente osservazione. Se un punto stazionario y è invertibile e la sua inversa ω è sufficientemente regolare, per ogni $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\psi(0, x_2, x_3) = 0$, si può considerare una funzione test della forma $\phi = \psi \circ w$. In questo modo, la (7) si riduce formalmente a:

$$\int_\Omega DW(\nabla_h y) : \nabla_h \psi dx = \int_\Omega h^\alpha (f_2\psi_2 + f_3\psi_3) dx,$$

che è la definizione di punti stazionari valida sotto l'ipotesi (1) di crescita lineare di DW. Per $\alpha \geq 3$, il teorema di rigidità consente di individuare uno sviluppo asintotico dei punti stazionari y^h, a partire dal quale è possibile costruire delle 'inverse approssimate', cioè delle mappe ω^h tali che $\omega^h \circ y^h$ converga alla deformazione identità per $h \to 0$. Per $2 < \alpha < 3$, la costruzione di un'inversa approssimata ω^h richiede di migliorare lo sviluppo asintotico di y^h quanto più α è vicino a 2 (si veda la Proposizione 4.1.2 e l'Osservazione 4.1.3).

In conclusione, i risultati dimostrati in questa tesi completano lo studio del comportamento asintotico delle configurazioni di equilibrio di una trave sottile per $\alpha > 2$. Il caso $\alpha = 2$ sotto condizioni fisiche di crescita è un problema ancora aperto. Un'altra questione aperta è lo studio del regime $2 < \alpha < 3$ per una piastra sottile, anche sotto ipotesi di crescita lineare della funzione DW. Le ulteriori difficoltà sono legate alla natura bidimensionale del problema, che porta a proprietà di compattezza più deboli e rende meno trattabile il vincolo nonlineare. Si ritiene che alcune delle idee esposte nello studio delle travi per $2 < \alpha < 3$ possano comunque offrire suggerimenti per affrontare il problema analogo nel caso delle piastre.

La tesi è suddivisa in quattro capitoli. Nel primo capitolo si descrive la formulazione del problema, illustrando il significato delle ipotesi sulla densità di energia elastica e sottolineandone alcune proprietà. Si confrontano poi le diverse ipotesi di crescita considerate. Infine si presentano i modelli unidimensionali e se ne ricavano le equazioni di Eulero-Lagrange. Nel secondo capitolo si dimostrano un primo risultato di approssimazione mediante rotazioni per successioni di deformazioni soddisfacenti la stima dell'energia (3), che deriva da un teorema di rigidità enunciato da G. Friesecke, R.D. James e S. Müller in [F-J-M] e un risultato di compattezza. Nel terzo capitolo si dimostra il risultato di convergenza per le configurazioni di equilibrio sotto ipotesi di crescita lineare per $\alpha > 2$. Nell'ultimo capitolo si completa lo studio dei punti di equilibrio per $\alpha > 2$ per le travi, provando il risultato di convergenza sotto ipotesi fisiche di crescita.

Capitolo 1

Ipotesi e risultati preliminari

In questo capitolo si descriverà la formulazione variazionale del problema e si illustreranno le ipotesi di lavoro. Più precisamente, nella prima sezione si definirà la densità di energia elastica e se ne discuteranno le caratteristiche principali. Nella seconda sezione si analizzerà il legame fra le ipotesi di crescita sulla densità di energia elastica e la definizione di punto stazionario per una trave tridimensionale. Infine si illustrerà come la Γ-convergenza permetta di derivare in modo rigoroso modelli unidimensionali approssimanti per travi sottili e si ricaveranno le equazioni di Eulero-Lagrange dei funzionali limite.

Consideriamo una trave $\Omega_h = (0, L) \times hS$, dove S è un aperto limitato e connesso di $\mathbb{R}^2$ con frontiera lipschitziana, $L > 0$ e $h > 0$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $|S| = 1$ e che valgano le seguenti ipotesi di normalizzazione su S:

$$\int_S x_2 dx_2 dx_3 = \int_S x_3 dx_2 dx_3 = 0, \tag{1.1}$$

$$\int_S x_2 x_3 dx_2 dx_3 = 0, \tag{1.2}$$

dove l'ipotesi (1.1) equivale a richiedere che il punto $(0, 0)$ sia il baricentro di S e l'ipotesi (1.2) individua gli assi x_2 e x_3 come assi centrali di inerzia di S. Supponiamo inoltre che Ω_h sia la configurazione di riferimento di un corpo

costituito da un materiale iperelastico, soggetto a deformazioni $v : \Omega_h \to \mathbb{R}^3$, con $v \in W^{1,2}(\Omega_h, \mathbb{R}^3)$.
A ciascuna deformazione v associamo l'energia elastica (per unità di sezione):

$$\mathcal{E}^h(v) = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_h} W(\nabla v) dz,$$

dove $W : \mathcal{M}^{3\times3} \to \mathbb{R}$ assegna ad ogni matrice $F \in \mathcal{M}^{3\times3}$ la densità d'energia elastica immagazzinata dal corpo in seguito ad una deformazione avente F come gradiente. Sullo spazio $\mathcal{M}^{3\times3}$ consideriamo la norma $|F| = Tr(F^T F)^{\frac{1}{2}}$, che lo rende uno spazio metrico.

Poiché siamo interessati a studiare il comportamento asintotico di $\mathcal{E}^h(v)$ per $h \to 0$, è conveniente effettuare il cambio di variabile $z = (x_1, hx_2, hx_3)$ e riscalare le deformazioni, ponendo $y(x) = v(z)$.
In questo modo, definendo:

$$\nabla_h y := \left(\partial_1 y, \frac{\partial_2 y}{h}, \frac{\partial_3 y}{h} \right),$$

otteniamo

$$\mathcal{E}^h(v) = I^h(y) = \int_\Omega W(\nabla_h y) dx. \tag{1.3}$$

Nel seguito ci riferiremo quindi alla successione di funzionali I^h, definiti sullo spazio $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

1.1 Proprietà della densità di energia elastica

Procediamo ora descrivendo le proprietà principali della densità di energia elastica. Supponiamo che la funzione W soddisfi le seguenti ipotesi:

(H1) $W(RF) = W(F)$ $\forall R \in SO(3)$, $\forall F \in \mathcal{M}^{3\times3}$ (frame indifference);

(H2) $W = 0$ su $SO(3)$;

(H3) $W(F) \geq C dist^2(F, SO(3))$, $C > 0$;

(H4) W è continua in $\mathcal{M}^{3\times3}$ ed è C^2 in un intorno di $SO(3)$, dove $SO(3) = \{R \in \mathcal{M}^{3\times 3} : R^T R = Id,\ \det R = 1\}$.

Osservazione 1.1.1. L'ipotesi (H1) garantisce che l'energia elastica sia indipendente dal sistema di riferimento ortonormale in cui si trova l'osservatore. Questa proprietà non deve essere confusa con l'ipotesi di isotropia

$$W(FR) = W(F) \text{ per ogni } R \in SO(3),$$

che garantisce l'invarianza del comportamento del corpo sotto rotazioni e che è invece una caratteristica propria del materiale considerato.
L'ipotesi di frame-indifference ha anche come conseguenza il fatto di garantire che l'energia elastica associata a deformazioni invertibili dipenda solamente dalla metrica di pull-back della deformazione. Più precisamente, esiste una mappa $\mathcal{W}$ tale che

$$W(F) = \mathcal{W}(F^T F) \text{ per ogni } F \in \mathcal{M}^{3\times 3} \text{ con } \det F > 0. \tag{1.4}$$

Infatti, per ogni $F \in \mathcal{M}^{3\times 3}$ tale che $\det F > 0$, si ha che, posta

$$U = \sqrt{F^T F},$$

U è una matrice simmetrica definita positiva, $R = FU^{-1}$ è una rotazione e $F = RU$ (si veda [C], Teorema 3.2-2). Di conseguenza $W(F) = W(U)$ e posta $\mathcal{W}(M) = W(\sqrt{M})$ per ogni matrice simmetrica M, si ha la (1.4).
Dal momento che abbiamo supposto di considerare un corpo costituito da materiale iperelastico, le sue equazioni di equilibrio in assenza di forze di carico corrispondono ai punti stazionari dell'energia elastica associata. Di conseguenza, le ipotesi (H2) e (H3) asseriscono che la configurazione di riferimento (e, per frame-indifference, anche qualsiasi rotazione di tale configurazione) è un punto di equilibrio stabile.
In generale, W non soddisfa ipotesi di crescita dall'alto; infatti, per garantire che le deformazioni considerate non causino compenetrazione della materia e preservino l'orientazione, si richiede che

$$W(F) = +\infty \text{ per } \det F \leq 0.$$

Osservazione 1.1.2. Indichiamo con $\mathcal{L} : \mathcal{M}^{3\times3} \longrightarrow \mathcal{M}^{3\times3}$ l'applicazione lineare definita da $\mathcal{L}G = D^2W(Id)G$ per ogni $G \in \mathcal{M}^{3\times3}$, cioè

$$[\mathcal{L}G]_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij}\partial F_{kl}}(Id)G_{kl} \text{ per ogni } G \in \mathcal{M}^{3\times3}.$$

Introduciamo inoltre la forma bilineare Q_3 associata ad $\mathcal{L}$, definita da

$$Q_3(F) = \mathcal{L}F : F \text{ per ogni } F \in \mathcal{M}^{3\times3},$$

dove : indica il prodotto scalare tra matrici.
Le ipotesi (H1)-(H4) permettono di ottenere alcune proprietà di $\mathcal{L}$ e di Q_3 di cui faremo uso più volte: da (H1)-(H3) abbiamo immediatamente che $Q_3(F)$ è una forma quadratica semidefinita positiva. Inoltre è definita positiva sulle matrici simmetriche.
Per provare tale affermazione, ricordiamo la stima:

$$dist^2(F, SO(3)) \geq |U - Id|^2, \tag{1.5}$$

dove $U = \sqrt{F^TF}$ (Si veda [C]).
Sia F simmetrica e sia $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ tale che $tF + Id$ sia ancora una matrice definita positiva. Dall'ipotesi (H3), si ha

$$W(Id + tF) \geq C dist^2(Id + tF, SO(3)).$$

Sviluppando in serie di Taylor il primo membro e utilizzando la (1.5) segue la disuguaglianza:

$$t^2Q_3(F) + o((t|F|)^2) \geq C|\sqrt{(t^2F^TF + Id + tF^T + tF)} - Id|^2.$$

D'altra parte, se F è simmetrica, $Id + tF$ è simmetrica e definita positiva e $(Id + tF)^2 = t^2F^TF + Id + tF^T + tF$. Pertanto, per l'unicità della radice di matrice, ([C], Teorema 3.2-1) si ha:

$$t^2Q_3(F) + o((t|F|)^2) \geq t^2C|F|^2.$$

Dividendo per t^2 e passando al limite per $t \to 0$ segue la tesi.

Osservazione 1.1.3. Dalle caratteristiche di Q_3 è possibile dedurre alcuna proprietà dell'applicazione lineare $\mathcal{L}$. Dal fatto che Q_3 è definita positiva sulle matrici simmetriche, si ha che $\mathcal{L}$ è iniettiva sul sottospazio delle matrici $F \in \mathcal{M}^{3\times 3}$ simmetriche e dunque anche invertibile su tale spazio. Introducendo poi la notazione $symF = \frac{F+F^T}{2}$ (parte simmetrica della matrice F) è possibile verificare le seguenti proprietà dell'applicazione $\mathcal{L}$:

(i) $\mathcal{L}(symF) = \mathcal{L}F \ \forall F \in \mathcal{M}^{3\times 3}$;

(ii) $\mathcal{L}F$ è simmetrica $\forall F \in \mathcal{M}^{3\times 3}$.

Sia infatti $H \in \mathcal{M}^{3\times 3}$ antisimmetrica e sia $t \in \mathbb{R}$. Allora $e^{tH} \in SO(3)$ e dunque da (H1) abbiamo:

$$W(e^{tH}) = W(Id).$$

Derivando due volte in t e calcolando la derivata seconda per $t = 0$ si ottiene:

$$D^2W(Id)H : H + DW(Id) : H^2 = 0.$$

Poiché dalle ipotesi (H2) e (H3) la funzione W ha minimo in $SO(3)$, si ha che $DW(Id) = 0$ e quindi, dall'uguaglianza precedente, $Q_3(H) = 0$. Poiché Q_3 è semidefinita positiva, si conclude che

$$\mathcal{L}H = 0 \ \forall H \text{ antisimmetrica},$$

da cui segue la (i). Osservando infine che $\mathcal{L}F : H = \mathcal{L}H : F = 0$ per ogni H antisimmetrica e per ogni $F \in \mathcal{M}^{3\times 3}$, segue la (ii).

Osservazione 1.1.4. Procedendo come nell'Osservazione 1.1.2, è possibile verificare un'altra proprietà di cui faremo uso nei capitoli successivi, ovvero che $DW(F)F^T$ è simmetrica per ogni $F \in \mathcal{M}^{3\times 3}$. Poiché W è frame-indifferent, si ha infatti

$$W(e^{tH}F) = W(F)$$

per ogni H matrice antisimmetrica e per ogni $F \in \mathcal{M}^{3\times3}$.
Calcolando la derivata in $t = 0$, si ottiene

$$DW(F) : HF = 0$$

e dunque

$$DW(F)F^T : H = 0 \text{ per ogni } H \text{ antisimmetrica,}$$

ovvero

$$DW(F)F^T = FDW(F)^T \text{ per ogni } F \in \mathcal{M}^{3\times3}.$$

1.2 Condizioni di stazionarietà per l'energia tridimensionale

Nel seguito supporremo che la trave di configurazione di riferimento Ω_h sia soggetta all'azione di carichi morti, ovvero che le forze di carico agiscano indipendentemente dalle deformazioni considerate. Inoltre supporremo che le forze agiscano in direzione ortogonale alla fibra mediana, dipendano soltanto dalla coordinata x_1 lungo la fibra mediana e abbiano densità $h^\alpha(f_2e_2 + f_3e_3)$, con $\alpha \geq 0$, $f_2, f_3 \in L^2(0, L)$. Allora, per ogni deformazione $y \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, l'energia totale per unità di sezione sarà espressa dal funzionale:

$$J^h(y) = \int_\Omega [W(\nabla_h y) - h^\alpha(f_2y_2 + f_3y_3)]dx. \tag{1.6}$$

Di conseguenza, analizzare le configurazioni di equilibrio del corpo Ω_h equivale a studiare i punti stazionari del funzionale J^h.
A tale scopo, procediamo ora introducendo le diverse condizioni di crescita di cui faremo uso nei Capitoli 3 e 4. Nel Capitolo 3 supporremo che la densità di energia elastica soddisfi, oltre alle ipotesi (H1)-(H4), anche la condizione aggiuntiva:

(H5) W differenziabile con $|DW(F)| \leq C(1 + |F|)$.

Osservazione 1.2.1. Notiamo che, dall'insieme delle ipotesi (H1)-(H5), otteniamo la seguente stima dall'alto sulla crescita di DW:

$$|DW(F)| \leq C dist(F, SO(3)) \text{ per ogni } F \in \mathcal{M}^{3\times 3}. \tag{1.7}$$

Sia δ l'ampiezza dell'intorno di $SO(3)$ in cui W è C^2. Data $F \in \mathcal{M}^{3\times 3}$, sia $\overline{R} \in SO(3)$ tale che $|F - \overline{R}| = dist(F, SO(3))$. Consideriamo separatamente i casi $|F - \overline{R}| < \delta$ e $|F - \overline{R}| > \delta$.
Nel primo caso dalle ipotesi (H2)-(H3) abbiamo $DW(\overline{R}) = 0$; dalla (H4) segue quindi la stima:

$$|DW(F)| \leq |D^2W(\overline{R})(F - \overline{R}) : (F - \overline{R})| + |\eta(F - \overline{R})|$$

dove $\frac{\eta(A)}{|A|} \to 0$ per $|A| \to 0$.
Di conseguenza vale l'ulteriore maggiorazione:

$$|DW(F)| \leq C(|F - \overline{R}|^2 + |F - \overline{R}|) \leq C(1 + \delta)|F - \overline{R}|$$

e dunque

$$|DW(F)| \leq C(1 + \delta) dist(F, SO(3)). \tag{1.8}$$

Nel caso in cui $|F - \overline{R}| = dist(F, SO(3)) > \delta$ è invece possibile effettuare una maggiorazione diretta:

$$\begin{aligned} |DW(F)| \leq C(1 + |F|) \leq C(1 + |F - \overline{R}| + |\overline{R}|) \leq \\ C'(1 + |F - \overline{R}|) \leq C'\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) dist(F, SO(3)). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Combinando la (1.8) e la (1.9) abbiamo pertanto la (1.7). Si osserva inoltre che dalla (1.7) segue immediatamente la disuguaglianza:

$$|DW(Id + F)| \leq C|F| \text{ per ogni } F \in \mathcal{M}^{3\times 3}. \tag{1.10}$$

Sotto le ipotesi (H1)-(H5), è possibile dare la seguente definizione di punti stazionari.

Definizione 1.1. Diciamo che una deformazione $y : \Omega \to \mathbb{R}^3$ soddisfacente la condizione al bordo $y(0, x_2, x_3) = (0, hx_2, hx_3)$ è un punto stazionario del funzionale J^h se verifica

$$\int_\Omega [DW(\nabla_h y) : \nabla_h \phi - h^\alpha (f_2(x_1)\phi_2 + f_3(x_1)\phi_3)]dx = 0, \tag{1.11}$$

per ogni $\phi \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x))$ tale che $\phi(0, x_2, x_3) = 0$.

Osservazione 1.2.2. L'ipotesi (H5) garantisce che la Definizione 1.1 abbia significato e che ogni minimo locale di J^h soddisfacente la condizione al bordo in $x_1 = 0$ sia un punto stazionario. Consideriamo infatti, un punto di minimo locale $y \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, soddisfacente la condizione al bordo $y(0, x_2, x_3) = (0, hx_2, hx_3)$ e consideriamone la variazione $y+\epsilon\phi$, con $\epsilon < 1$, $\phi \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ soddisfacente $\phi(0, x_2, x_3) = 0$. Per ottenere le equazioni di Eulero-Lagrange nella forma usuale è necessario valutare:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \frac{W(\nabla_h(y + \epsilon\phi)) - W(\nabla_h y)}{\epsilon} dx. \tag{1.12}$$

Dal teorema di Lagrange, la funzione integranda si stima come:

$$\left| \frac{W(\nabla_h(y + \epsilon\phi)) - W(\nabla_h y)}{\epsilon} \right| \le |DW(\nabla_h(y + \epsilon\theta\phi)) : \nabla_h \phi|,$$

con $\theta(x) \in (0, 1)$ per ogni $x \in \Omega$. Dall'ipotesi (H5), di conseguenza:

$$\left| \frac{W(\nabla_h(y + \epsilon\phi)) - W(\nabla_h y)}{\epsilon} \right| \le C(1 + |\nabla_h y| + |\nabla_h \phi|)|\nabla_h \phi|.$$

Pertanto dal teorema di convergenza dominata è possibile passare al limite sotto il segno di integrale, ottenendo l'equazione (1.11).
L'ipotesi (H5) è però incompatibile con la richiesta fisica che la densità di energia elastica soddisfi:

(H6) $W(F) = +\infty$ se $\det F \le 0$, $W(F) \to \infty$ se $\det F \to 0^+$.

Tale condizione corrisponde alla richiesta che le deformazioni a energia finita non determinino una compenetrazione della materia e preservino l'orientazione del corpo; in particolare, assicura l'invertibilità locale delle deformazioni

C^1 a energia finita. Tuttavia, sotto l'ipotesi (H6) non è chiaro come valutare (1.12), a meno di non richiedere ipotesi aggiuntive sul punto di minimo. Il calcolo di questo limite, infatti, comporta due difficoltà: innanzitutto non è detto che la deformazione $y + \epsilon\phi$ abbia energia finita, inoltre dobbiamo poter passare al limite sotto segno di integrale. Anche supponendo che W sia regolare sulle matrici a determinante positivo, per ovviare a queste due difficoltà dobbiamo richiedere ulteriori condizioni sul punto di minimo, come ad esempio l'ipotesi che $y \in W^{1,\infty}$ e che

$$\det \nabla_h y > c > 0 \text{ q.o. in } \Omega.$$

Sotto queste ultime due condizioni, infatti, se $\phi \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $|\nabla_h y + \epsilon \nabla_h \phi|$ è limitato e per ϵ sufficientemente piccolo, si ha $\det(\nabla_h y + \theta\epsilon\nabla_h\phi) \geq \frac{c}{2}$ q.o. Pertanto, dalla regolarità di W, $y + \epsilon\phi$ ha energia finita. Inoltre, abbiamo:

$$\left| \frac{W(\nabla_h(y + \epsilon\phi)) - W(\nabla_h y)}{\epsilon} \right| \leq |DW(\nabla_h y + \theta\epsilon\nabla_h\phi)||\nabla_h\phi|,$$

con $\theta(x) \in (0,1)$ per ogni $x \in \Omega$, dove

$$|DW(\nabla_h y^h + \theta\epsilon\nabla_h\phi)| \leq C,$$

usando ancora il fatto che $\nabla_h y + \theta\epsilon\nabla_h\phi$ appartiene ad un compatto della regione in cui W è regolare. Di conseguenza per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue si può passare al limite sotto segno di integrale nella (1.12), ottenendo che l'equazione (1.11) è verificata per ogni funzione test $\phi \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Questo risultato non è molto soddisfacente dal momento che esistono deformazioni a energia finita che non soddisfano le condizioni richieste sul punto di minimo, come messo in evidenza in [B]. Tuttavia, in [B] si è mostrato che è possibile individuare una condizione al primo ordine alternativa per i punti stazionari, che vale sotto l'ipotesi (H6) e le condizioni:

(H7) $\quad W$ è C^1 su $\mathcal{M}^{3\times3}_+$,

(H8) $\quad \exists k > 0$ tale che $|DW(F)F^T| \leq k(W(F) + 1)$ per ogni $F \in \mathcal{M}^{3\times3}_+$, dove denotiamo con $\mathcal{M}^{3\times3}_+$ l'insieme delle matrici $F \in \mathcal{M}^{3\times3}$ con $\det F > 0$. Come mostrato in [B], le condizioni (H7) e (H8) risultano compatibili con la (H6).

Denotiamo con $C^k_b(U)$ lo spazio delle funzioni C^k che sono limitate in U e con derivate limitate fino all'ordine k-simo. Considerando variazioni della forma $y^h + \epsilon\phi \circ y^h$ è possibile ottenere il seguente teorema ([B], Teorema 2.4):

Teorema 1.2.1. *Supponiamo che la funzione W soddisfi le ipotesi (H1)-(H4) e (H6)-(H8). Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ un aperto limitato e connesso con frontiera lipschitziana $\partial U = \partial U_1 \cup \partial U_2 \cup N$, dove ∂U_1 e ∂U_2 sono disgiunti e relativamente aperti in ∂U e N ha misura bidimensionale nulla. Sia $\overline{\omega} \in H^{1/2}(\partial U, \mathbb{R}^3)$ e sia $f \in L^2(U, \mathbb{R}^3)$. Sia $\omega \in W^{1,2}(U, \mathbb{R}^3)$ un minimo locale del funzionale*

$$\mathcal{F}(\omega) := \int_U W(\nabla\omega)dz - \int_U f \cdot \omega dz$$

soggetto alle condizioni al bordo $\omega = \overline{\omega}$ su ∂U_1, ovvero supponiamo che esista $\epsilon > 0$ tale che $\mathcal{F}(\omega) \leq \mathcal{F}(v)$ per ogni $v \in W^{1,2}(U, \mathbb{R}^3)$ che soddisfi

$$\begin{cases} ||v - \omega||_{W^{1,2}} \leq \epsilon, \\ v = \overline{\omega} \text{ su } \partial U_1. \end{cases}$$

Allora:

$$\int_U DW(\nabla\omega)(\nabla\omega)^T : \nabla\phi(\omega)dz = \int_U f \cdot \phi(\omega)dz \tag{1.13}$$

per ogni $\phi \in C^1_b(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tale che $\phi \circ \omega = 0$ su ∂U_1 nel senso delle tracce.

Riportiamo la dimostrazione del teorema, che fa uso del seguente lemma.

Lemma 1.2.2. *Supponiamo che W soddisfi le ipotesi (H7) e (H8). Allora esiste $\gamma > 0$ tale che, per ogni $C \in \mathcal{M}^{3\times3}_+$ soddisfacente $|C - Id| < \gamma$ e per ogni $A \in \mathcal{M}^{3\times3}_+$ valga:*

$$|DW(CA)A^T| \leq 3k(W(A) + 1),$$

dove k è la costante introdotta nell'ipotesi (H8).

Dimostrazione. Per la dimostrazione del lemma si veda [B], Lemma 2.5. $\square$

Dimostrazione del Teorema 1.2.1. Sia $\tau \in \mathbb{R}$; definiamo:

$$\omega_\tau(z) := \omega(z) + \tau\phi(\omega(z)).$$

Poiché ω è un punto di minimo locale, abbiamo $\det \nabla\omega > 0$ q.o. in U. Dal momento che

$$\nabla\omega_\tau(z) = (1 + \tau\nabla\phi(\omega(z)))\nabla\omega(z),$$

e $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, si ha che per $|\tau|$ sufficientemente piccolo $\det \nabla\omega_\tau(z) > 0$ per q.o. $z \in U$. Inoltre, essendo:

$$\omega_\tau|_{\partial U_1} = \overline{\omega} \text{ e } \lim_{\tau\to 0} ||\omega_\tau - \omega||_{W^{1,2}(U,\mathbb{R}^3)} = 0,$$

dalla minimalità di ω segue che

$$F(\omega_\tau) \geq F(\omega), \tag{1.14}$$

per $|\tau|$ sufficientemente piccolo. D'altra parte,

$$\begin{aligned} \frac{F(\omega_\tau) - F(\omega)}{\tau} &= \frac{1}{\tau}\int_U [W(\nabla\omega_\tau) - W(\nabla\omega) - \tau f \cdot \phi(\omega)]dz \qquad (1.15) \\ &= \int_U \left[\int_0^1 \frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}W((1 + s\tau\nabla\phi(\omega))\nabla\omega)ds - f \cdot \phi(\omega)\right] dz \\ &= \int_U \left[\int_0^1 DW((1 + s\tau\nabla\phi(\omega))\nabla\omega) : \nabla\phi(\omega)\nabla\omega ds - f \cdot \phi(\omega)\right] dz. \end{aligned}$$

Per il Lemma 1.2.2 il primo termine dell'integrando si maggiora con:

$$3k(W(\nabla\omega) + 1)||\nabla\phi||_{L^\infty}.$$

Dunque, per convergenza dominata, si può passare al limite nella (1.15) e per $\tau \to 0^+$, dalla (1.14) si ha:

$$\int_U [DW(\nabla\omega)(\nabla\omega)^T : \nabla\phi(\omega) - f \cdot \phi(\omega)]dz \geq 0.$$

Analogamente, passando al limite per $\tau \to 0^-$, si ottiene la disuguaglianza opposta e dunque la tesi. $\square$

Sotto le ipotesi (H1)-(H4) e (H6)-(H8) è quindi possibile considerare la seguente definizione alternativa di punti stazionari, di cui faremo uso nel Capitolo 4:

Definizione 1.2. Diciamo che una deformazione $y \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ è un punto stazionario alla Ball del funzionale J^h se soddisfa le condizioni al bordo $y(0, x_2, x_3) = (0, hx_2, hx_3)$ per ogni $(x_2, x_3) \in S$ e verifica:

$$\int_\Omega DW(\nabla_h y)(\nabla_h y)^T : \nabla\phi(y(x))dx = \int_\Omega h^\alpha[f_2(x_1)\phi_2(y(x)) + f_3(x_1)\phi_3(y(x))]dx \tag{1.16}$$

per ogni $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ che soddisfi la condizione al bordo $\phi(0, hx_2, hx_3) = 0$ per ogni $(x_2, x_3) \in S$.

1.3 Gamma-convergenza e convergenza dei punti di minimo

La Γ-convergenza è una convergenza di tipo variazionale introdotta da De Giorgi verso la metà degli anni '70 ([DG-F]). Si dice che una successione di funzionali G_n, definiti su uno spazio metrico X e a valori in $\overline{\mathbb{R}}$, Γ-converge ad un funzionale G_0 se per ogni $x \in X$ sono soddisfatte le due condizioni seguenti:

$$\begin{cases} \forall x_n \to x, & \liminf G_n(x_n) \geq G_0(x), \\ \exists \overline{x}_n \to x \text{ tale che} & G_n(x_n) \to G_0(x). \end{cases}$$

Se G_n Γ-converge a G_0 e i funzionali G_n sono equi-coercivi, ogni successione minimizzante per i funzionali G_n converge, a meno di sottosuccessioni, a punti di minimo del Γ-limite G_0.

Grazie a questa proprietà, l'utilizzo della Γ-convergenza nell'ambito dei problemi di riduzione di dimensione permette di individuare in maniera rigorosa una gerarchia di modelli limite, a seconda dell'ordine di grandezza delle forze di carico in termini del parametro spessore h. Nel caso di una trave sottile, si può dimostrare che se le forze di carico sono di ordine h^α, allora l'energia J^h in corrispondenza dei suoi punti di minimo riscala come h^β, dove $\beta = \alpha$

se $0 \leq \alpha \leq 2$ e $\beta = 2\alpha - 2$ se $\alpha > 2$. La Γ-convergenza dei funzionali $h^{-\alpha} J^h$ con $0 \leq \alpha \leq 2$ è stata studiata in [A-B-P], [M-M3], [S0]. I casi $\alpha > 2$, che sono di interesse per questo lavoro, sono stati invece trattati in [M-M] e [S]. In questi articoli, si è identificato il Γ-limite dei funzionali $h^{-2\alpha+2} J^h$ per $\alpha > 2$, sotto le ipotesi (H1)-(H4). Per tali ordini di riscalamento si ha un effetto linearizzante dell'energia tridimensionale, per cui il Γ-limite dipende non dalle deformazioni ma piuttosto dagli spostamenti, cioè da quanto le deformazioni considerate si discostano dall'identità. Si ha infatti che, per ogni $\alpha > 2$, il Γ-limite può essere espresso come un funzionale sullo spazio $\mathcal{A}_\alpha$, definito rispettivamente come

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\alpha = \{&(u, v_2, v_3, w) \in W^{1,2}(0, L) \times W^{2,2}(0, L) \times W^{2,2}(0, L) \times W^{1,2}(0, L) : \\ &u(0) = v_k(0) = w(0) = 0 \text{ e } v_k'(0) = 0 \text{ per } k = 2, 3\} \text{ per } \alpha \geq 3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\alpha = \{&(u, v_2, v_3, w) \in W^{1,2}(0, L) \times W^{2,2}(0, L) \times W^{2,2}(0, L) \times W^{1,2}(0, L) : \\ &u(0) = v_k(0) = w(0) = 0, v_k'(0) = 0 \text{ per } k = 2, 3 \text{ e } u' + \tfrac{(v_2')^2 + (v_3')^2}{2} = 0\}\end{aligned}$$

per $2 < \alpha < 3$.
Le variabili u e v_2, v_3 rappresentano lo spostamento provocato dalla deformazione, rispettivamente lungo la fibra $(0, L)$ e nel piano normale ad essa. La variabile w descrive invece l'angolo di twist della sezione ortogonale della trave, ovvero fornisce un'informazione sulla torsione che la sezione ortogonale subisce in seguito alla deformazione.
Per ogni $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_\alpha$ introduciamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -v_2' & -v_3' \\ v_2' & 0 & -w \\ v_3' & w & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotando con I_α il Γ-limite, si ha che per $\alpha = 3$ esso è dato dal funzionale

$$\begin{aligned}I_3(u, v_2, v_3, w) = &\frac{1}{2} \int_0^L \mathbb{E} \left(u' + \frac{1}{2}[(v_2')^2 + (v_3')^2] \right)^2 dx_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L Q_1(A') dx_1 - \int_0^L (f_2 v_2 + f_3 v_3) dx_1,\end{aligned} \tag{1.17}$$

per ogni $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_3$, dove:

$$\mathbb{E} = \min_{a,b \in \mathbb{R}^3} Q_3(e_1|a|b), \tag{1.18}$$

$$Q_1(F) = \min_{\beta \in W^{1,2}(S,\mathbb{R}^3)} \int_S Q_3\left(F\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\middle|\partial_2\beta\middle|\partial_3\beta\right) dx_2 dx_3 \tag{1.19}$$

e Q_3 è la forma quadratica introdotta nell'Osservazione 1.1.2.
Per $\alpha > 3$ il Γ-limite è dato dal funzionale

$$I_\alpha(u, v_2, v_3, w) = \frac{1}{2}\int_0^L \mathbb{E}(u')^2 dx_1 + \tag{1.20}$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^L Q_1(A')dx_1 - \int_0^L (f_2v_2 + f_3v_3)dx_1,$$

per $\alpha > 3$, per ogni $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_\alpha$, mentre nel caso $2 < \alpha < 3$

$$I_\alpha(u, v_2, v_3, w) = \frac{1}{2}\int_0^L Q_1(A')dx_1 - \int_0^L (f_2v_2 + f_3v_3)dx_1, \tag{1.21}$$

per ogni $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_\alpha$.

Osservazione 1.3.1. Notiamo che per $\alpha \geq 3$ il Γ-limite è somma di tre termini: un'energia di curvatura e torsione, corrispondente al termine $\frac{1}{2}\int_0^L Q_1(A')dx_1$, un termine dovuto alle forze di carico e un contributo associato agli effetti di compressione e allungamento, dato rispettivamente dai termini
$\frac{1}{2}\int_0^L \mathbb{E}\left(u' + \frac{1}{2}[(v_2')^2 + (v_3')^2]\right)^2 dx_1$ e $\frac{1}{2}\int_0^L \mathbb{E}(u')^2 dx_1$.
Per $2 < \alpha < 3$, si hanno solo gli effetti di curvatura e il termine dovuto alle forze di carico, mentre la dipendenza da effetti di compressione è modellata dal vincolo nonlineare

$$u' + \frac{[(v_2')^2 + (v_3')^2]}{2} = 0 \text{ q.o. in } (0, L). \tag{1.22}$$

In altre parole, lo spostamento tangenziale è sempre tale da compensare perfettamente l'allungamento provocato dalla deformazione di flessione.

Osservazione 1.3.2. Dall'Osservazione 1.1.2, segue che

$$Q_3(e_1|a|b) = Q_3(sym(e_1|a|b)) > 0 \text{ per ogni } a, b \in \mathbb{R}^3$$

perché la forma quadratica Q_3 è definita positiva sulle matrici simmetriche. Pertanto $\mathbb{E} > 0$. Inoltre

$$\mathbb{E} = (\mathcal{L}^{-1}(e_1 \otimes e_1) : (e_1 \otimes e_1))^{-1}.$$

Per provare tale affermazione osserviamo che, per definizione,

$$\mathbb{E} = \min_{a_{ij} \in \mathbb{R}^3,\ i=1,2,3,\ j=1,2} \mathcal{L} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Sia $(a_{ij})_{ij}$, $i = 1,2,3$, $j = 2,3$ il punto di minimo nel senso della (1.23); sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \mathcal{L} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 0 \text{ per } i = 1,2,3,\ j = 2,3,$$

e si ottiene

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : a_{ij} e_i \otimes e_j = 0 \text{ per } i = 1,2,3,\ j = 2,3.$$

Di conseguenza, ricordando che $\mathcal{L}F$ è una matrice simmetrica per ogni $F \in \mathcal{M}^{3\times 3}$, si ha che nel punto di minimo vale

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = m e_1 \otimes e_1$$

con $m \in \mathbb{R}$. D'altra parte, ricordando le proprietà del punto di minimo nel senso della (1.23), si ha che

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : (0|v|w) = 0 \text{ per ogni } v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Dalla definizione di $\mathbb{E}$ otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \mathcal{L} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{L} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : (e_1|0|0) \\ &= m e_1 \otimes e_1 : e_1 \otimes e_1 = m. \end{aligned}$$

Dunque nel punto di minimo vale

$$\mathbb{E}e_1 \otimes e_1 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Posta

$$H = sym\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

avremo

$$\mathcal{L}H = \mathbb{E}e_1 \otimes e_1.$$

Sfruttando l'invertibilità della mappa $\mathcal{L}$ sulle matrici simmetriche, si ottiene:

$$\frac{H}{\mathbb{E}} = \mathcal{L}^{-1}(e_1 \otimes e_1)$$

e dunque

$$\frac{H}{\mathbb{E}} : e_1 \otimes e_1 = \mathcal{L}^{-1}(e_1 \otimes e_1) : (e_1 \otimes e_1).$$

D'altra parte, per come abbiamo definito la matrice H, si ha

$$H : e_1 \otimes e_1 = 1,$$

pertanto segue la tesi.

In corrispondenza di ciascuna deformazione $y^h \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, soddisfacente la condizione al bordo $y^h(0, x_2, x_3) = (0, hx_2, hx_3)$, introduciamo le mappe:

$$u^h(x_1) := \begin{cases} \displaystyle\int_S \frac{y_1^h(x) - x_1}{h^{\alpha-1}} dx_2 dx_3 \; per \; \alpha \geq 3 \\ \displaystyle\int_S \frac{y_1^h(x) - x_1}{h^{2(\alpha-2)}} dx_2 dx_3 \; per \; 2 < \alpha < 3 \end{cases}, \tag{1.24}$$

$$v_k^h(x_1) := \int_S \frac{y_k^h(x)}{h^{\alpha-2}} dx_2 dx_3 \; per \; k = 2, 3, \tag{1.25}$$

$$w^h(x_1) := \frac{1}{\mu(S)} \int_S \frac{x_2 y_3^h(x) - x_3 y_2^h(x)}{h^{\alpha-1}} dx_2 dx_3, \tag{1.26}$$

dove $\mu(S) = \int_S x_2^2 + x_3^2 dx_2 dx_3$.
Le funzioni u^h e v_k^h per $k = 2,3$ rappresentano gli spostamenti medi riscalati associati alle deformazioni y^h, mentre la mappa w^h ne rappresenta l'angolo di twist.
I risultati di Γ-convergenza esposti in [M-M] e in [S] possono essere riassunti nel seguente teorema.

Teorema 1.3.1. *Supponiamo che la densità di energia elastica W soddisfi (H1)-(H4), siano $f_2, f_3 \in L^2(0,L)$, sia $\alpha > 2$ e sia (y^h) una successione $(2\alpha-2)$-minimizzante per i funzionali J^h, ovvero tale che*

$$J^h(y^h) \leq \inf J^h + h^{2\alpha-2} \ \forall h > 0,$$

soddisfacente la condizione al bordo

$$y^h(0, x_2, x_3) = (0, hx_2, hx_3).$$

Allora, la successione (y^h) verifica la condizione:

$$\int_\Omega W(\nabla_h y^h) dx \leq Ch^{2\alpha-2} \text{ per ogni } h > 0.$$

Inoltre, dette u^h, v_k^h, w^h per $k = 2,3$ le successioni definite in (1.24), (1.25) e (1.26), a meno di sottosuccessioni, vale che:

$$y^h \to x_1 e_1 \text{ in } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3), \tag{1.27}$$
$$u^h \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,2}(0,L) \text{ per } \alpha \geq 3, \tag{1.28}$$
$$u^h \to u \text{ in } W^{1,2}(0,L) \text{ per } 2 < \alpha < 3, \tag{1.29}$$
$$v_k^h \to v_k \text{ in } W^{1,2}(0,L), \ v_k \in W^{2,2}(0,L) \text{ per } k = 2,3, \tag{1.30}$$
$$w^h \rightharpoonup w \text{ in } W^{1,2}(0,L). \tag{1.31}$$

Inoltre, per ogni $\alpha > 2$, (u, v_2, v_3, w) è punto di minimo del funzionale I_α nello spazio $\mathcal{A}_\alpha$, dove I_α è dato, nei casi $\alpha = 3, \alpha > 3$ e $2 < \alpha < 3$, rispettivamente da (1.17), da (1.20) e da (1.21).

1.4 Proprietà dei funzionali limite unidimensionali

Procediamo ora al calcolo delle equazioni di Eulero-Lagrange per il funzionale I_α nei tre casi.
Introduciamo un lemma preliminare.

Lemma 1.4.1.
Sia $\mathcal{B} = \left\{\alpha \in W^{1,2}(S, \mathbb{R}^3) : \int_S \alpha dx_2 dx_3 = \int_S \partial_2 \alpha dx_2 dx_3 = \int_S \partial_3 \alpha dx_2 dx_3 = 0\right\}$, *sia* $A \in \mathcal{M}^{3\times 3}$ *antisimmetrica e sia* $\mathcal{G}_A : W^{1,2}(S, \mathbb{R}^3) \longrightarrow [0, +\infty)$ *il funzionale definito da*

$$\mathcal{G}_A(\beta) := \int_S Q_3 \left(A \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \partial_2 \beta \middle| \partial_3 \beta \right) dx_2 dx_3, \tag{1.32}$$

per ogni $\beta \in W^{1,2}(S, \mathbb{R}^3)$.
Allora $\mathcal{G}_A$ *è convesso e ammette un unico punto di minimo in* $\mathcal{B}$. *Inoltre una funzione* $\beta \in \mathcal{B}$ *è punto di minimo per* $\mathcal{G}_A$ *se e solo se la mappa*

$$E : S \longrightarrow \mathcal{M}^{3\times 3},$$

data da

$$E := \mathcal{L} \left(A \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \partial_2 \beta \middle| \partial_3 \beta \right), \tag{1.33}$$

soddisfa in senso debole il seguente problema:

$$\begin{cases} div_{x_2,x_3}(Ee_2|Ee_3) = 0 \ in \ S, \\ (Ee_2|Ee_3)\nu_{\partial S} = 0 \ in \ \partial S, \end{cases} \tag{1.34}$$

dove $\nu_{\partial S}$ *è la normale esterna a* ∂S. *Inoltre il punto di minimo dipende linearmente dagli elementi di* A.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si vedano [M-M2], Lemma 2.1 e [M-M], Remark 3.4. □

Introduciamo la seguente notazione: per ogni $F \in L^1(\Omega, \mathcal{M}^{3\times 3})$ indichiamo con

$$\overline{F} : (0, L) \longrightarrow \mathcal{M}^{3\times 3}$$

il momento di ordine zero, definito da

$$\overline{F}(x_1) := \int_S F(x) dx_2 dx_3.$$

Indichiamo inoltre con $\widetilde{F}$ e $\widehat{F}$ i momenti di ordine uno, definiti, rispettivamente da:

$$\widetilde{F} = \int_S F x_2 dx_2 dx_3,$$

$$\widehat{F} = \int_S F x_3 dx_2 dx_3.$$

A questo punto siamo in grado di calcolare le equazioni di Eulero-Lagrange nei diversi casi. Consideriamo inizialmente il caso $\alpha = 3$.

Teorema 1.4.2. *Sia $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_3$. Sia $\beta(x_1, \cdot, \cdot) \in \mathcal{B}$ il punto di minimo di $\mathcal{G}_{A'}$, dove*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -v_2' & -v_3' \\ v_2' & 0 & -w \\ v_3' & w & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia inoltre $E : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}^{3\times 3}$ definito da

$$E := \mathcal{L}\left(A' \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \partial_2 \beta \middle| \partial_3 \beta \right).$$

Allora (u, v_2, v_3, w) *è un punto stazionario del funzionale* I_3 *se e solo se soddisfa le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange:*

$$u' + \frac{1}{2}[(v_2')^2 + (v_3')^2] = 0 \ q.o. \ in \ (0, L), \tag{1.35}$$

$$\begin{cases} \widetilde{E}_{11}'' + f_2 = 0 \ in \ (0, L), \\ \widetilde{E}_{11}(L) = \widetilde{E}_{11}'(L) = 0. \end{cases} \tag{1.36}$$

$$\begin{cases} \widehat{E}_{11}'' + f_3 = 0 \ in \ (0, L), \\ \widehat{E}_{11}(L) = \widehat{E}_{11}'(L) = 0. \end{cases} \tag{1.37}$$

$$\begin{cases} \widetilde{E}_{12}' = \widehat{E}_{13}' \ in \ (0, L), \\ \widetilde{E}_{12}(L) = \widehat{E}_{13}(L). \end{cases} \tag{1.38}$$

Dimostrazione. Consideriamo le funzioni test

$$\begin{aligned} &\phi \in W^{1,2}(0, L), \ \phi(0) = 0; \\ &\psi_k \in W^{2,2}(0, L), \ \psi_k(0) = 0, \ \psi_k'(0) = 0 \text{ per } k = 2, 3; \\ &\theta \in W^{1,2}(0, L), \ \theta(0) = 0 \end{aligned}$$

e studiamo

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} I(u + \epsilon\phi, \ v_2 + \epsilon\psi_2, \ v_3 + \epsilon\psi_3, \ w + \epsilon\theta).$$

Consideriamo l'insieme delle matrici antisimmetriche:

$$\mathcal{M}^{3\times3}_{skew} := \{F \in \mathcal{M}^{3\times3} : F^T = -F\}.$$

Per semplificare la notazione introduciamo l'applicazione lineare

$$\mathcal{L}_1 : \mathcal{M}^{3\times3}_{skew} \longrightarrow \mathcal{M}^{3\times3}$$

associata alla mappa bilineare Q_1, ossia tale che:

$$\mathcal{L}_1 F : F = Q_1(F) \ \forall F \in \mathcal{M}^{3\times3}_{skew}. \tag{1.39}$$

Ricordando che

$$Q_1(F) = \int_S Q_3 \left(F \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \partial_2\beta_F \middle| \partial_3\beta_F \right) dx_2 dx_3,$$

dove β_F è l'unico punto di minimo nel senso del Lemma 1.4.1 relativo alla matrice F, dalla dipendenza lineare di β_F da F abbiamo

$$2\mathcal{L}_1 F : G = Q_1(F+G) - Q_1(F) - Q_1(G) \tag{1.40}$$

$$= 2\int_S \mathcal{L}\left(F\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \partial_2\beta_F \middle| \partial_3\beta_F \right) : \left(G\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \partial_2\beta_G \middle| \partial_3\beta_G \right) dx_2 dx_3$$

per ogni $F, G \in \mathcal{M}^{3\times 3}$ antisimmetriche. Dal Lemma 1.4.1, per le equazioni di Eulero soddisfatte dal punto di minimo β_F, si ha:

$$\int_S \sum_{\substack{i=1,2,3 \\ k=2,3}} \mathcal{L}\left(F\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \partial_2\beta_F \middle| \partial_3\beta_F \right)_{ik} \partial_k(\beta_G)_i dx_2 dx_3 = 0,$$

da cui, posto

$$E_F = \mathcal{L}\left(F\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \partial_2\beta_F \middle| \partial_3\beta_F \right),$$

otteniamo

$$\mathcal{L}_1 F : G = \int_S E_F : \left(G\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| 0 \middle| 0 \right) dx_2 dx_3 \tag{1.41}$$

$$= \int_S [(E_F)_{11}(x_2 G_{12} + x_3 G_{13}) + (E_F)_{21} x_3 G_{23} - (E_F)_{31} x_2 G_{23}] dx_2 dx_3.$$

Osserviamo che

$$I(u+\epsilon\phi,\ v_2+\epsilon\psi_2,\ v_3+\epsilon\psi_3,\ w+\epsilon\theta) =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^L \mathbb{E}\left(u' + \epsilon\phi' + \frac{1}{2}[(v_2' + \epsilon\psi_2')^2 + (v_3' + \epsilon\psi_3')^2] \right)^2 dx_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^L \left\{ \mathcal{L}_1 \left[A' + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -\psi_2'' & -\psi_3'' \\ \psi_2'' & 0 & -\theta' \\ \psi_3'' & \theta' & 0 \end{pmatrix} \right] : \left[A' + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -\psi_2'' & -\psi_3'' \\ \psi_2'' & 0 & -\theta' \\ \psi_3'' & \theta' & 0 \end{pmatrix} \right] \right\} dx_1 -$$

$$-\int_0^L [f_2(v_2+\epsilon\psi_2) + f_3(v_3+\epsilon\psi_3)] dx_1.$$

Di conseguenza abbiamo:

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} I(u+\epsilon\phi,\ v_2+\epsilon\psi_2,\ v_3+\epsilon\psi_3,\ w+\epsilon\theta) = \tag{1.42}$$

$$\int_0^L \mathbb{E}(u' + \frac{1}{2}[(v_2')^2 + (v_3')^2])^2(\phi' + v_2'\psi_2' + v_3'\psi_3')dx_1 +$$

$$+ \int_0^L \mathcal{L}_1 A' : \begin{pmatrix} 0 & -\psi_2'' & -\psi_3'' \\ \psi_2'' & 0 & -\theta' \\ \psi_3'' & \theta' & 0 \end{pmatrix} dx_1 - \int_0^L (f_2\psi_2 + f_3\psi_3)dx_1.$$

Ricordando la (1.41), l'equazione precedente si può riscrivere come:

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} I(u+\epsilon\phi,\ v_2+\epsilon\psi_2,\ v_3+\epsilon\psi_3,\ w+\epsilon\theta) = \tag{1.43}$$

$$\int_0^L \mathbb{E}(u' + \frac{1}{2}[(v_2')^2 + (v_3')^2])^2(\phi' + v_2'\psi_2' + v_3'\psi_3')dx_1 +$$

$$\int_0^L -E_{11}(x_2\psi_2'' + x_3\psi_3'') - E_{21}x_3\theta' + E_{31}x_2\theta' dx_1 - \int_0^L (f_2\psi_2 + f_3\psi_3)dx_1.$$

Imponendo

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} I(u+\epsilon\phi,\ v_2+\epsilon\psi_2,\ v_3+\epsilon\psi_3,\ w+\epsilon\theta) = 0,$$

dall'arbitrarietà delle mappe $\phi, \psi_2, \psi_3, \theta$ otteniamo le equazioni (1.35), (1.36), (1.37) e (1.38) in forma debole. □

Procediamo ora calcolando le equazioni di Eulero-Lagrange per il Γ-limite nei casi $\alpha > 3$ e $2 < \alpha < 3$.

Teorema 1.4.3. *Sia $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_\alpha$. Allora:*

(1) (u, v_2, v_3, w) è un punto stazionario di I_α con $\alpha > 3$ se e solo se

$$u' = 0 \text{ q.o. in } (0, L). \tag{1.44}$$

e sono soddisfatte le equazioni (1.36), 1.37 *e* (1.38).

(2) (u, v_2, v_3, w) è un punto stazionario di I_α con $2 < \alpha < 3$ se e solo se sono soddisfatte (1.36), (1.37) e (1.38).

Omettiamo la dimostrazione del precedente teorema perché essa è analoga al caso $\alpha = 3$.

Osservazione 1.4.1. Notiamo che, per $2 < \alpha < 3$, se $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_\alpha$, allora u è univocamente determinata in termini di v_2 e di v_3. Si ha infatti che u soddisfa il vincolo

$$u' + \frac{(v_2')^2 + (v_3')^2}{2} = 0 \text{ q.o. in } (0, L).$$

Ricordando che $u \in W^{1,2}(0, L)$ e che $u(0) = 0$, si ottiene che per $2 < \alpha < 3$,

$$u = -\int_0^{x_1} \frac{(v_2')^2 + (v_3')^2}{2} \text{ q.o. in } (0, L).$$

Negli altri casi invece, u è individuata univocamente in funzione delle mappe v_2 e v_3 solo quando (u, v_2, v_3, w) è punto critico per il funzionale I_α. Sotto questa ipotesi, infatti, per $\alpha = 3$ dalla (1.35) si ottiene nuovamente

$$u = -\int_0^{x_1} \frac{(v_2')^2 + (v_3')^2}{2} \text{ q.o. in } (0, L),$$

mentre per $\alpha > 3$, dalla (1.44) si ha

$$u = 0 \text{ q.o. in } (0, L).$$

Osservazione 1.4.2. Osserviamo che per ogni $\alpha > 2$ il Γ-limite I_α ha un unico punto stazionario che è un punto di minimo. Consideriamo infatti la forma quadratica Q_1 definita in (1.19): è possibile verificare che Q_1 è un funzionale strettamente convesso in v_2, v_3, w. Per provare tale affermazione ricordiamo che Q_3 è una forma quadratica definita positiva sulle matrici simmetriche (si veda l'Osservazione 1.1.2), dunque Q_3 è strettamente convessa su tale insieme. Da questo segue che Q_1 è strettamente convesso su $\mathcal{M}^{3\times 3}_{skew}$. Siano infatti $F, G \in \mathcal{M}^{3\times 3}$ e sia $0 < \lambda < 1$. Dal Lemma 1.4.1 sappiamo che i punti di minimo del problema (1.19) dipendono linearmente dagli elementi della matrice associata; di conseguenza, poste:

$$\widetilde{F} = \left(F \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \partial_2 \beta_F \middle| \partial_3 \beta_F \right),$$

$$\widetilde{G} = \left(G \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \partial_2 \beta_G \middle| \partial_3 \beta_G \right),$$

dove β_F e β_G sono, rispettivamente, i punti di minimo rispetto alle matrici F e G dati dal Lemma 1.4.1, si ha:

$$Q_1(\lambda F + (1-\lambda)G) = \int_S Q_3(\lambda\widetilde{F} + (1-\lambda)\widetilde{G})dx_2dx_3$$

$$= Q_3(\lambda sym\widetilde{F} + (1-\lambda)sym\widetilde{G}) < \int_S [\lambda Q_3(sym\widetilde{F}) + (1-\lambda)Q_3(sym\widetilde{G})]dx_2dx_3$$

$$= \lambda Q_1(F) + (1-\lambda)Q_1(G).$$

A questo punto siamo in grado di provare l'unicità del punto critico nei tre casi.

Per $2 < \alpha < 3$, si ha che I_α è strettamente convesso in v_2, v_3, w perché somma di un termine strettamente convesso e di un termine lineare; inoltre, dall'Osservazione 1.4.1, u è completamente determinato dal vincolo, pertanto esiste un solo punto critico che è anche un punto di minimo.

Per $\alpha > 3$, il Γ-limite I_α è strettamente convesso in u, v_2, v_3, w.

Infine, per $\alpha = 3$ la prima equazione di Eulero-Lagrange determina univocamente u in funzione di v_2 e v_3. Sostituendo il valore trovato nel Γ-limite, si ha di nuovo a che fare con un funzionale strettamente convesso in v_2, v_3, w.

Esempio 1.1. A titolo di esempio, calcoliamo esplicitamente i Γ-limiti e le corrispondenti equazioni di Eulero sotto l'ulteriore ipotesi che la funzione W sia isotropa, ovvero:

$$W(F) = W(FR)\ \forall R \in SO(3),\ \forall F \in \mathcal{M}^{3\times 3}$$

e che la sezione della trave S sia un disco. Sotto tali ipotesi, si ha che la forma quadratica Q_3 è data da:

$$Q_3(F) = 2\mu\,|symF|^2 + \lambda(trF)^2,$$

con $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ costanti. Inoltre la forma quadratica Q_1 può essere calcolata esplicitamente ed è data da

$$Q_1(F) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{E}(F_{12}^2 + F_{13}^2) + \frac{\mu}{2\pi}F_{23}^2,$$

dove $\mathbb{E} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ (si veda [M-M3], Remark 3.4 e 3.5).
Pertanto il Γ-limite I_α può essere espresso, rispettivamente, come:

$$I_3(u, v_2, v_3, w) = \frac{1}{2}\int_0^L \mathbb{E}\left(u' + \frac{1}{2}[(v_2')^2 + (v_3')^2]\right)^2 dx_1 +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\mathbb{E}\int_0^L [(v_2'')^2 + (v_3'')^2]dx_1 + \int_0^L \frac{\mu}{2\pi}(w')^2 dx_1 - \int_0^L (f_2 v_2 + f_3 v_3)dx_1,$$

per ogni $(u, v_2, v_3, w) \in A_3$.

$$I_\alpha(u, v_2, v_3, w) = \frac{1}{2}\int_0^L \mathbb{E}(u')^2 dx_1 +$$
$$+\mathbb{E}\int_0^L [(v_2'')^2 + (v_3'')^2]dx_1 + \int_0^L \frac{\mu}{2\pi}(w')^2 dx_1 - \int_0^L (f_2 v_2 + f_3 v_3)dx_1$$

per $\alpha > 3$, per ogni $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_\alpha$.
Infine nel caso $2 < \alpha < 3$ il Γ-limite è dato da

$$I_\alpha(u, v_2, v_3, w) = \mathbb{E}\int_0^L [(v_2'')^2 + (v_3'')^2]dx_1 + \int_0^L \frac{\mu}{2\pi}(w')^2 dx_1 - \int_0^L (f_2 v_2 + f_3 v_3)dx_1,$$

per ogni $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_\alpha$.
La prima equazione di Eulero-Lagrange rimane la stessa e determina univocamente u. Le restanti equazioni si semplificano notevolmente, e si riducono rispettivamente a:

- $\frac{1}{2\pi}\mathbb{E}v_k^{iv} + f_k = 0,\ v_k''(L) = v_k'''(L) = 0$
  $v_k(0) = v_k'(0) = v_k''(L) = v_k'''(L) = 0$ per $k = 2, 3$.
- $w = 0$.

Capitolo 2

Risultati di compattezza

In questo capitolo si prenderanno in considerazione deformazioni y^h di classe $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ che verifichino le condizioni al bordo $y^h(0, x_2, x_3) = (0, hx_2, hx_3)$ e la cui energia elastica soddisfi:

$$\int_\Omega W(\nabla_h y^h) dx \leq C h^{2\alpha - 2}, \text{ con } \alpha > 2. \tag{2.1}$$

Si mostrerà inoltre come la stima dell'energia (2.1) permetta di ottenere un risultato di approssimazione mediante rotazioni e un risultato di compattezza, di cui faremo uso nei Capitoli 3 e 4 per la dimostrazione dei teoremi di convergenza delle configurazioni di equilibrio.

2.1 Approssimazione mediante rotazioni

Sia (y^h) una successione di deformazioni verificanti la stima dell'energia (2.1) e la condizione al bordo in $\{0\} \times S$. Mediante la stima dell'energia (2.1) e l'ipotesi (H3) è possibile controllare la distanza dei gradienti riscalati $\nabla_h y^h$ da $SO(3)$. Grazie al teorema di rigidità geometrica dovuto a Friesecke, James e Müller, che introduciamo di seguito, saremo in grado di costruire una successione (R^h) di rotazioni approssimanti, la cui distanza da $\nabla_h y^h$ è dello stesso ordine di $dist(\nabla_h y^h, SO(3))$.

Teorema 2.1.1. *Sia U un aperto limitato e connesso con frontiera lipschitziana in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Allora esiste una costante $C(U)$ con la seguente proprietà:*
per ogni v in $W^{1,2}(U, \mathbb{R}^n)$ esiste una rotazione costante R in $SO(n)$ tale che

$$||\nabla v - R||_{L^2(U)} \leq C(U)||dist(\nabla v, SO(n))||_{L^2(U)}. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. si veda [F-J-M], Teorema 3.1. □

Osservazione 2.1.1. La costante $C(U)$ introdotta nell'enunciato del teorema è invariante per trasformazioni bilipschitziane con costanti di lipschitz uniformemente controllate e per dilatazioni uniformi dell'aperto U.

Osservazione 2.1.2. Come corollario del teorema precedente si ha il seguente risultato.

Teorema 2.1.2 (Teorema di Liouville)**.** *Sia U un aperto limitato e connesso con frontiera lipschitziana in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Sia inoltre $v \in W^{1,2}(U, \mathbb{R}^n)$ tale che $\nabla v \in SO(3)$ q.o. Allora esiste una rotazione costante R tale che $\nabla v = R$, ovvero v è un movimento rigido.*

Il precedente risultato di rigidità permette di ottenere un teorema di approssimazione mediante rotazioni analogo a quello dimostrato in [M-M-S].

Teorema 2.1.3. *Sia (y^h) una successione in $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tale che*

$$F^h(y^h) = \int_\Omega dist(\nabla_h y^h, SO(3)) \leq Ch^{2\alpha-2}$$

per ogni $h > 0$, con $\alpha > 2$.
Allora esiste (R^h) in $C^\infty((0, L), \mathcal{M}^{3\times3})$ tale che per ogni $h > 0$:

$$R^h(x_1) \in SO(3)\ \forall x_1 \in (0, L), \tag{2.3}$$

$$||\nabla_h y^h - R^h||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\alpha-1}, \tag{2.4}$$

$$||(R^h)'||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\alpha-2}. \tag{2.5}$$

Inoltre, se $y^h(0, x_2, x_3) = (0, hx_2, hx_3)$, allora

$$||R^h - Id||_{L^\infty} \leq Ch^{\alpha-2}. \tag{2.6}$$

Introduciamo due lemmi preliminari di cui faremo uso nella dimostrazione del teorema.

Lemma 2.1.4. *Sia $v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, con $\int_S v dx_2 dx_3 = 0$ per q.o. $x_1 \in (0, L)$. Allora esiste una costante C dipendente solo da $|\Omega|$ tale che*

$$||v||_{L^2(\Omega)} \leq C(||\partial_2 v||_{L^2(\Omega)} + ||\partial_3 v||_{L^2(\Omega)}).$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger si ha

$$||v||^2_{L^2(S)} \leq C(||\partial_2 v||^2_{L^2(S)} + ||\partial_3 v||^2_{L^2(S)}),$$

per q.o $x_1 \in (0, L)$. Integrando in $(0, L)$ segue quindi la tesi. □

Con il lemma precedente possiamo enunciare la seguente disuguaglianza di traccia, che utilizzeremo in modo essenziale nella seconda parte della dimostrazione del teorema.

Lemma 2.1.5. *Sia $U = (0, 1) \times S$. Esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\int_S |v(0, z_2, z_3) - \int_S v(0, \xi_2, \xi_3) d\xi_2 d\xi_3|^2 dz_2 dz_3 \leq C \int_{(0,1)\times S} |\nabla v|^2 dz \;\forall v \in W^{1,2}(U)\;.$$

Dimostrazione. Poniamo $\psi(z_1, z_2, z_3) = v(z_1, z_2, z_3) - \int_S v(z_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_2 d\xi_3$. Allora, per la continuità dell'operatore di traccia, abbiamo:

$$\int_S \left| v(0, z_2, z_3) - \int_S v(0, \xi_2, \xi_3) d\xi_2 d\xi_3 \right|^2 dz_2 dz_3 = \tag{2.7}$$

$$\int_S |\psi(0, z_2, z_3)|^2 dz \leq \int_{\partial U} |\psi(z_1, z_2, z_3)|^2 dz \leq C||\psi||^2_{W^{1,2}(U)}.$$

Dal Lemma 2.1.4 abbiamo:

$$||\psi||^2_{L^2(U)} \leq C(||\partial_2 v||^2_{L^2(U)} + ||\partial_3 v||^2_{L^2(U)}) \leq C||\nabla v||^2_{L^2(U)}. \tag{2.8}$$

Osserviamo inoltre che

$$||\partial_1 \psi||^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left| \partial_1 v - \int_S \partial_1 v d\xi_2 d\xi_3 \right|^2 dz \leq$$

$$\leq 2\int_\Omega |\partial_1 v|^2 dz + 2\int_\Omega \left|\int_S \partial_1 v d\xi_2 d\xi_3\right|^2 dz \leq C\int_\Omega |\partial_1 v|^2 dz,$$

dove l'ultimo passaggio segue dalla disuguaglianza di Hölder. Ricordando poi che $\partial_2\psi = \partial_2 v$ e $\partial_3\psi = \partial_3 v$, concludiamo che

$$||\nabla\psi||^2_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.9}$$

La tesi segue combinando la (2.7), la (2.8) e la (2.9). □

Dimostrazione del Teorema 2.1.3. Suddividiamo la dimostrazione del teorema in due parti: nella prima parte costruiremo esplicitamente le rotazioni $R^h(x_1)$, nella seconda parte sfrutteremo le condizioni in $x_1 = 0$ per stimare $||R^h - Id||_{L^\infty}$.

Prima parte

Il procedimento utilizzato per la costruzione delle approssimanti può essere schematizzato in tre passi:

1. Individuazione di mappe costanti a tratti che coincidano localmente con delle rotazioni e che forniscano una buona approssimazione dei gradienti riscalati della successione di deformazioni (y^h), mediante il Teorema 2.1.1.

2. Regolarizzazione della successione costruita nel primo passo.

3. Proiezione delle mappe regolarizzate su $SO(3)$.

Procediamo dunque costruendo le mappe costanti a tratti. L'idea chiave consiste nell'utilizzare il Teorema 2.1.1 localmente, su cilindri di lunghezza paragonabile ad h, così che la stima di rigidità fornisca per ciascuno di essi la medesima costante C.

Per ogni $h > 0$ suddividiamo Ω_h in cilindri di lunghezza paragonabile ad h nel modo seguente: per ogni $h > 0$ sia k_h intero tale che $h \leq \frac{L}{k_h} < 2h$ e per ogni $i = 0, 1, \ldots, k_h - 1$ definiamo

$$I_{i,h} := \left(i\frac{L}{k_h}, (i+1)\frac{L}{K_h}\right).$$

Applichiamo la stima di rigidità alle funzioni $v^h(z_1, z_2, z_3) = y^h\left(z_1, \frac{z_2}{h}, \frac{z_3}{h}\right)$ ristrette all'insieme $I_{i,h} \times hS$.
Osserviamo che è possibile ottenere i cilindri $I_{i,h} \times hS$ mediante trasformazioni bilipschitziane di $(0, h) \times hS$ con costanti di lipschitz uniformemente limitate e che questi ultimi insiemi sono dilatazioni uniformi di $(0, 1) \times S$. Dall'Osservazione 2.1.1, abbiamo dunque che, per ogni $i = 0, 1, \dots, k_h - 1$, esiste una rotazione $\overline{Q}_i^h \in SO(3)$ tale che

$$\int_{I_{i,h} \times hS} |\nabla v^h - \overline{Q}_i^h|^2 dx \le C \int_{I_{i,h} \times hS} dist^2(\nabla v^h, SO(3)) dx. \tag{2.10}$$

Dunque è possibile definire delle mappe costanti a tratti

$$Q^h : [0, L) \to SO(3)$$

tali che

$$Q^h(x_1) = \overline{Q}_i^h \text{ per } x_1 \in \left[i\frac{L}{k_h}, (i+1)\frac{L}{k_h}\right)$$

ed inoltre valga la condizione

$$\int_{I_{i,h} \times S} |\nabla_h y^h - Q^h|^2 dx \le C \int_{I_{i,h} \times S} dist^2(\nabla_h y^h, SO(3)) dx, \tag{2.11}$$

con C indipendente da h.
Sommando sugli i si ottiene quindi:

$$\int_\Omega |\nabla_h y^h - Q^h|^2 dx \le CF^h(y^h) \le Ch^{2\alpha - 2}, \tag{2.12}$$

per ogni $h > 0$.
Sia poi $i = 1, ..k_h - 2$ e sia $j \in \{i-1, i, i+1\}$.
Per la stima di rigidità esiste una costante $\widehat{Q}_i^h \in SO(3)$ tale che

$$\int_{\left((i-1)\frac{L}{k_h}, (i+2)\frac{L}{k_h}\right) \times S} |\nabla_h y^h - \widehat{Q}_i^h|^2 dx \le C \int_{\left((i-1)\frac{L}{k_h}, (i+2)\frac{L}{k_h}\right) \times S} dist^2(\nabla_h y^h, SO(3)) dx.$$

Osservando che $I_{j,h}$ è contenuto nell'intervallo $\left((i-1)\frac{L}{k_h},(i+2)\frac{L}{k_h}\right)$ per ogni h, si ottiene la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}
&\frac{L}{k_h}\left|Q^h\left(j\frac{L}{k_h}\right)-\widehat{Q}_i^h\right|^2 \qquad (2.13)\\
&\leq C\int_{I_{j,h}\times S}\left[|\widehat{Q}_i^h-\nabla_h y^h|^2+\left|\nabla_h y^h-Q^h\left(j\frac{L}{k_h}\right)\right|^2\right]dx\\
&\leq C\left(\int_{\left((i-1)\frac{L}{k_h},(i+2)\frac{L}{k_h}\right)\times S}|\nabla_h y^h-\widehat{Q}_i^h|^2dx+\int_{I_{j,h}\times S}\left|\nabla_h y^h-Q^h\left(j\frac{L}{k_h}\right)\right|^2dx\right)\\
&\leq C\int_{\left((i-1)\frac{L}{k_h},(i+2)\frac{L}{k_h}\right)\times S} dist^2(\nabla_h y^h,SO(3))dx.
\end{aligned}$$

D'altra parte, ricordando come sono stati scelti gli indici j, dalla (2.13) segue la stima

$$\begin{aligned}
&\frac{L}{k_h}\left|Q^h\left((i\pm1)\frac{L}{k_h}\right)-Q^h\left(i\frac{L}{k_h}\right)\right|^2 \qquad (2.14)\\
&\leq\frac{2L}{k_h}\left(\left|Q^h\left((i\pm1)\frac{L}{k_h}\right)-\widehat{Q}_i^h\right|^2+\left|\widehat{Q}_i^h-Q^h\left(i\frac{L}{k_h}\right)\right|^2\right)\\
&\leq C\int_{\left((i-1)\frac{L}{k_h},(i+2)\frac{L}{k_h}\right)\times S} dist^2(\nabla_h y^h,SO(3))dx.
\end{aligned}$$

Per semplificare la notazione poniamo

$$\omega_i(h):=\int_{\left((i-1)\frac{L}{k_h},(i+2)\frac{L}{k_h}\right)\times S} dist^2(\nabla_h y^h,SO(3))dx.$$

Dalla (2.14) siamo in grado di ottenere una stima puntuale sulla variazione della mappa Q^h su intervalli di ampiezza minore o uguale ad h. Consideriamo infatti la differenza $|Q^h(x_1+s)-Q^h(x_1)|$ per $x_1\in(\frac{L}{k_h},L-\frac{L}{k_h})$ e $|s|\leq h$. Se x_1 e x_1+s giacciono nel medesimo intervallo $I_{i,h}$ tale quantità è nulla, altrimenti i due punti devono appartenere necessariamente a due intervalli contigui della forma $I_{i,h}$, con $1\leq i\leq k_h-2$. In quest'ultimo caso si può quindi sfruttare la (2.14) e si ottiene:

$$|Q^h(x_1+s)-Q^h(x_1)|^2\leq C(L/k_h)^{-1}F^h(y^h)\leq Ch^{2\alpha-3} \qquad (2.15)$$

per ogni $x_1 \in (\frac{L}{k_h}, L - \frac{L}{k_h})$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$ tale che $|s| \le h$.
Estendendo Q^h come $Q^h(x_1) = Q^h(0)$ per $x_1 < 0$ e $Q^h(x_1) = Q^h(L)$ per $x_1 \ge L$ la stima precedente vale per ogni $x_1 \in \mathbb{R}$.
Ricordando che Q^h è localmente costante, dalla (2.14) si ottiene inoltre la seguente stima integrale della variazione di Q^h per incrementi s con $|s| \le h$:

$$\int_{I_{i,h}} |Q^h(x_1+s) - Q^h(x_1)|^2 dx_1 \le C\omega_i(h) \text{ per ogni } i = 1, ..k_h - 2. \tag{2.16}$$

Sommando su $i = 1, 2, ..k_h - 2$ e usando il fatto che ogni $x \in \Omega$ appartiene ad al più 3 insiemi della forma $\left((i-1)\frac{L}{k_h}, (i+2)\frac{L}{k_h}\right) \times S$ si ottiene:

$$\int_{\left(\frac{L}{k_h}, L-\frac{L}{k_h}\right)} |Q^h(x_1+s) - Q^h(x_1)|^2 dx_1 \le C \int_\Omega dist^2(\nabla_h y^h, SO(3))dx \le Ch^{2\alpha-2} \tag{2.17}$$

con $|s| \le h$. Tenendo conto di come è stata estesa Q^h, si ha inoltre che la stessa disuguaglianza vale considerando $\mathbb{R}$ come dominio di integrazione per il primo integrale.
Procediamo ora mollificando le funzioni Q^h così da ottenere mappe di regolarità C^∞. Introduciamo a tale scopo una funzione $\eta \in C_0^\infty(0,1)$ tale che $\eta \ge 0$ e $\int_0^1 \eta(s)ds = 1$.
Poniamo $\eta_h(s) = \frac{1}{h}\eta(\frac{s}{h})$ e definiamo

$$\widetilde{Q}^h(x_1) := \int_0^h \eta_h(s) Q^h(x_1 - s)ds \text{ con } x_1 \in [0, L].$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |\widetilde{Q}^h(x_1) - Q^h(x_1)|^2 dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^h \eta_h(s)(Q^h(x_1 - s) - Q^h(x_1))ds \right|^2 dx_1 \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^h \eta_h(s)^2 ds \right) \left(\int_0^h |Q^h(x_1 - s) - Q^h(x_1)|^2 ds \right) dx_1 \\
&\le \frac{C}{h} \int_0^h \int_{\mathbb{R}} \left| Q^h(x_1 - s) - Q^h(x_1) \right|^2 dx_1 ds \\
&\le Ch^{2\alpha-2},
\end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è usata la (2.17).
In conclusione,

$$||\widetilde{Q}^h - Q^h||_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ch^{\alpha-1}. \tag{2.18}$$

In secondo luogo, abbiamo

$$||(\widetilde{Q}^h)'||^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^h \eta_h'(s) Q^h(x_1 - s) ds \right|^2 dx_1$$

(ricordando che $\int_0^h (\eta_h(s))' = 0$)

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^h (\eta_h(s))'(Q^h(x_1 - s) - Q^h(x_1)) ds \right|^2 dx_1 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^h ((\eta_h(s))')^2 ds \right) \left(\int_0^h \left| Q^h(x_1 - s) - Q^h(x_1) \right|^2 ds \right) dx_1 \\
&\leq \frac{C}{h^3} \int_0^h Ch^{2\alpha-2} \leq Ch^{2\alpha-4}.
\end{aligned}$$

Pertanto si ottiene la seguente stima per la derivata prima delle mappe $\widetilde{Q}^h$:

$$||(\widetilde{Q}^h)'||_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ch^{\alpha-2}. \tag{2.19}$$

Infine sia U un intorno di $SO(3)$ in cui è ben definita e regolare la proiezione $\pi : U \to SO(3)$. Dalla stima (2.15), abbiamo che:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{Q}^h(x_1) - Q^h(x_1)|^2 &= \left| \int_0^h \eta_h(s)(Q^h(x_1 - s) - Q^h(x_1)) ds \right|^2 \\
&\leq \left(\int_0^h (\eta_h(s))^2 ds \right) \left(\int_0^h |Q^h(x_1 - s) - Q^h(x_1)|^2 ds \right) \leq Ch^{2\alpha-3}.
\end{aligned}$$

Dunque,

$$||\widetilde{Q}^h - Q^h||_{L^\infty} \leq Ch^{\alpha-\frac{3}{2}}. \tag{2.20}$$

Questo garantisce che per h sufficientemente piccolo $\widetilde{Q}^h(x_1) \in U$ per ogni x_1.
Pertanto possiamo definire $R^h = \pi(\widetilde{Q}^h)$.
(R^h) è la successione di approssimanti cercata. Infatti, per costruzione soddisfa la (2.3) e ha la regolarità richiesta. Inoltre, osservando che per definizione di R^h vale la disuguaglianza

$$||R^h - \widetilde{Q}^h||_{L^2(\Omega)} \leq ||Q^h - \widetilde{Q}^h||_{L^2(\Omega)},$$

dalla (2.18) e dalla (2.12) segue la (2.4). Infine dalla regolarità della mappa π e dalla (2.19) si ha la proprietà (2.5).

Seconda parte

Applicando il Lemma 2.1.5 alla funzione

$$u(z) = \frac{y^h(hz_1, z_2, z_3)}{h} - Q^h(0)z,$$

si ottiene:

$$\int_S \left| \frac{y^h(0, z_2, z_3)}{h} - Q^h(0) \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - \int_S \frac{y^h(0, \xi_2, \xi_3)}{h} - Q^h(0) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} d\xi_2 d\xi_3 \right|^2 dz_2 dz_3$$

$$\leq C \int_{(0,1)\times S} |\nabla_h y^h(hz_1, z_2, z_3) - Q^h(0)|^2 dz. \tag{2.21}$$

Ricordando poi che $y^h(0, z_2, z_3) = (0, hz_2, hz_3)$ e che i termini $\int_S Q^h(0) \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} dz_2 dz_3$ e $\int_S \frac{(0, z_2, z_3)}{h} dz_2 dz_3$ sono nulli per le ipotesi di normalizzazione su S, la (2.21) si può riscrivere come:

$$\begin{aligned} &\int_S \left| (Id - Q^h(0)) \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right|^2 dz_2 dz_3 \qquad (2.22) \\ &\leq C \int_{(0,1)\times S} |\nabla_h y^h(hz_1, z_2, z_3)) - Q^h(0)|^2 dz \\ &= \frac{C}{h} \int_{(0,h)\times S} |\nabla_h y^h(z_1, z_2, z_3) - Q^h(0)|^2 dz \\ &\leq \frac{C}{h} \int_\Omega dist^2(\nabla_h y^h, SO(3)) dz \leq Ch^{2\alpha-3}, \end{aligned}$$

dove, nel penultimo passaggio, essendo $h \leq \frac{L}{k_h}$ è stata utilizzata (2.11) per $i = 0$. Per semplicità di notazione, poniamo $\overline{Q}^h = Q^h(0)$. Tenendo conto delle ipotesi di normalizzazione su S, dalla (2.22) si ottiene:

$$\begin{aligned} &(|\overline{Q}^h_{12}|^2 + |1 - \overline{Q}^h_{22}|^2 + |\overline{Q}^h_{32}|^2) \left(\int_S z_2^2 dz_2 dz_3 \right) \qquad (2.23) \\ &+ (|\overline{Q}^h_{13}|^2 + |1 - \overline{Q}^h_{33}|^2 + |\overline{Q}^h_{23}|^2) \left(\int_S z_3^2 dz_2 dz_3 \right) \leq Ch^{2\alpha-3}. \end{aligned}$$

Dunque $|\overline{Q}^h_{1,2}|^2 \leq Ch^{2\alpha-3}$ e la stessa maggiorazione si ha per ciascuno dei termini presenti in (2.23). Ricordando poi che $\overline{Q}^h \in SO(3)$ è possibile ottenere una stima anche sui termini della prima colonna di $\overline{Q}^h$: infatti, se indichiamo con $\overline{Q}^h_i$ la colonna i-esima di $\overline{Q}^h$,

$$\overline{Q}^h_1 = \overline{Q}^h_2 \wedge \overline{Q}^h_3. \tag{2.24}$$

Pertanto, dal momento che possiamo supporre $h < 1$, si ha

$$\begin{aligned} |\overline{Q}^h_{21}| = |\overline{Q}^h_{12}\overline{Q}^h_{33} - \overline{Q}^h_{32}\overline{Q}^h_{13}| \quad &\leq \quad |\overline{Q}^h_{12}(\overline{Q}^h_{33} - 1)| + |\overline{Q}^h_{12}| + |\overline{Q}^h_{32}\overline{Q}^h_{13}| \\ \leq Ch^{\alpha-\frac{3}{2}} + Ch^{2\alpha-3} \leq Ch^{\alpha-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

e analogamente vale la stima:

$$|\overline{Q}^h_{31}| \leq Ch^{\alpha-\frac{3}{2}}. \tag{2.25}$$

Infine, osservando che, dalla (2.23), si ha

1. $\overline{Q}^h_{22} = 1 + O(h^{\alpha-\frac{3}{2}})$,
2. $\overline{Q}^h_{33} = 1 + O(h^{\alpha-\frac{3}{2}})$,

si ottiene

$$\overline{Q}^h_{22}\overline{Q}^h_{33} = 1 + O(h^{\alpha-\frac{3}{2}}).$$

Di conseguenza abbiamo la stima:

$$|1 - \overline{Q}^h_{11}| = |1 - \overline{Q}^h_{22}\overline{Q}^h_{33} + \overline{Q}^h_{32}\overline{Q}^h_{23}| \leq Ch^{\alpha-\frac{3}{2}}. \tag{2.26}$$

Combinando le disuguaglianze precedenti possiamo concludere che

$$|Q^h(0) - Id|^2 = Tr[(\overline{Q}^h - Id)^T(\overline{Q}^h - Id)] \leq Ch^{2\alpha-3}. \tag{2.27}$$

Ricordando poi che $R^h = \pi(\widetilde{Q}^h)$ e considerando la (2.20), abbiamo:

$$\begin{aligned} &|R^h(0) - Id| \leq |R^h(0) - \widetilde{Q}^h(0)| + |\widetilde{Q}^h(0) - Q^h(0)| + |Q^h(0) - Id| \\ &\leq 2|\widetilde{Q}^h(0) - Q^h(0)| + |Q^h(0) - Id| \leq Ch^{\alpha-3/2}. \end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Poincaré e dalla (2.5) segue infine la (2.6). □

2.2 Compattezza di deformazioni a energia piccola

Enunciamo ora un risultato di compattezza per successioni di deformazioni (y^h) di classe $W^{1,2}(\Omega)$ che verifichino la condizione al bordo $y^h(0, x_2, x_3) = (0, hx_2, hx_3)$ e tali che l'energia elastica ad esse associata soddisfi

$$\int_\Omega W(\nabla_h y^h)dx \leq Ch^{2\alpha-2},$$

con $\alpha > 2$.
Queste due condizioni permettono di ottenere risultati di compattezza anche per le successioni u^h, v_k^h e w^h definite in (1.24), (1.25) e (1.26), inoltre forniscono informazioni sulle condizioni nell'origine soddisfatte dalle mappe limite. Più precisamente vale il seguente teorema.

Teorema 2.2.1. *Supponiamo che la densità di energia elastica W soddisfi (H1)-(H4). Sia $(y^h) \subset W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ con $y^h(0, x_2, x_3) = (0, hx_2, hx_3)$.*
Supponiamo inoltre che esista $C > 0$ tale che

$$\int_\Omega W(\nabla_h y^h)dx \leq Ch^{2\alpha-2}, \tag{2.28}$$

con $\alpha > 2$.
Siano u^h, v_2^h, v_3^h, w^h le successioni definite in (1.24), (1.25) e (1.26). Allora, a meno di sottosuccessioni vale che:

$$y^h \to x_1 e_1 \text{ in } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3), \tag{2.29}$$

$$u^h \to u \text{ in } W^{1,2}(0, L) \text{ per } 2 < \alpha < 3, \tag{2.30}$$

$$u^h \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,2}(0, L) \text{ per } \alpha \geq 3, \tag{2.31}$$

$$v_k^h \to v_k \text{ in } W^{1,2}(0, L), \text{ con } v \in W^{2,2}(0, L), \tag{2.32}$$

$$w^h \rightharpoonup w \text{ in } W^{1,2}(0, L), \tag{2.33}$$

dove $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_\alpha$. Infine, sia $A \in W^{1,2}((0, L), M^{3\times3})$ definita da:

$$A(x_1) := \begin{pmatrix} 0 & -v_2'(x_1) & -v_3'(x_1) \\ v_2'(x_1) & 0 & -w(x_1) \\ v_3'(x_1) & w(x_1) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

allora, indicata con R^h la successione di rotazioni del Teorema 2.1.3, valgono le seguenti proprietà:

$$\frac{\nabla_h y^h - Id}{h^{\alpha-2}} \to A \ in \ L^2(\Omega), \tag{2.35}$$

$$A^h(x_1) := \frac{R^h(x_1) - Id}{h^{\alpha-2}} \rightharpoonup A \ in \ W^{1,2}(\Omega), \tag{2.36}$$

$$\frac{sym(R^h - Id)}{h^{2(\alpha-2)}} \to \frac{A^2}{2} \ uniformemente \ in \ (0, L). \tag{2.37}$$

Dimostrazione. Procediamo in modo analogo a ([F-J-M2], Lemma 1), tenendo tuttavia in considerazione l'ulteriore informazione che ci è data dalle condizioni al bordo imposte sulle deformazioni y^h. Dal Teorema 2.1.3 sappiamo che $(R^h) \subset C^\infty((0, L), \mathcal{M}^{3\times3})$. Dalla (2.5) e dalla (2.6) abbiamo

$$||R^h - Id||_{W^{1,2}(0,L)} \leq Ch^{\alpha-2}, \tag{2.38}$$

dunque $R^h \to Id$ in $W^{1,2}(0, L)$.
Dalla (2.4) si ha quindi che $\nabla_h y^h \to Id$ in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3})$.
In particolare abbiamo che $\partial_k y^h \to 0$ in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ per $k = 2, 3$. Dunque:

$$\nabla y^h \to e_1 \otimes e_1 \text{ in } L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3}). \tag{2.39}$$

Dal momento che $|y^h(0, x_2, x_3)| \leq Ch$ in S e usando la disuguaglianza di Poincaré, si ha:

$$||y^h - x_1 e_1||_{L^2(\Omega)} \leq C\left(h + ||\nabla y^h - e_1 \otimes e_1||_{L^2(\Omega)}\right).$$

Pertanto $y^h \to y$ in $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ dove $y(x) = x_1 e_1$. Abbiamo quindi verificato la (2.29).
Consideriamo le matrici A^h definite come in (2.36). Dalla (2.38) esiste una mappa $A \in W^{1,2}((0, L), \mathcal{M}^{3\times3})$ tale che, a meno di sottosuccessioni, risulti

$$A^h \rightharpoonup A \text{ in } W^{1,2}((0, L), \mathcal{M}^{3\times3}). \tag{2.40}$$

In particolare,

$$A^h \to A \text{ uniformemente }. \tag{2.41}$$

Dalla (2.4) e dalla (2.41) si ha poi la (2.35).
Inoltre, dal momento che $R^h(x_1) \in SO(3)$ per ogni $x_1 \in (0, L)$, abbiamo che

$$A^h + (A^h)^T = -h^{\alpha-2}(A^h)^T A^h, \tag{2.42}$$

perciò, passando al limite, $A + A^T = 0$ ovvero A è antisimmetrica. Inoltre, dividendo la (2.42) per $2h^{\alpha-2}$ e passando al limite in $L^\infty((0, L), \mathcal{M}^{3\times3})$, otteniamo la (2.37).
Consideriamo ora la successione (v_k^h), per $k = 2, 3$. Dalle condizioni al bordo soddisfatte da y^h segue che $v_k^h(0) = 0$. Osservando che

$$(v_k^h)' = \int_S \frac{\partial_1 y_k^h}{h^{\alpha-2}} dx_2 dx_3,$$

dalla disuguaglianza di Poincaré si ottiene:

$$||v_k^h||_{L^2(0,L)} \leq C||(v_2^h)'||_{L^2(0,L)} \leq C||\frac{\partial_1 y_2^h(x)}{h^{\alpha-2}}||_{L^2(\Omega)}.$$

Per la (2.35) si ha dunque che (v_k^h) è uniformemente limitata in $W^{1,2}(0, L)$ e quindi $\exists v_k \in W^{1,2}(0, L)$ tale che $v_k^h \rightharpoonup v_k$ in $W^{1,2}(0, L)$, pertanto vale la (2.32).
Inoltre $v_k' = A_{k,1}$ per $k = 2, 3$ e dunque, dal momento che $A \in W^{1,2}(0, L)$, $v_k \in W^{2,2}(0, L)$.
Consideriamo ora la successione (u^h). Poiché $u^h(0) = 0$ per ogni $h > 0$, sfruttando nuovamente la disuguaglianza di Poincaré abbiamo:

$$||u^h||_{L^2(0,L)} \leq C||(u^h)'||_{L^2(0,L)}. \tag{2.43}$$

A differenza di quanto accade per le successioni (v_k^h) con $k = 2, 3$, per stimare $||(u^h)'||_{L^2(0,L)}$ non possiamo avvalerci della (2.35), tuttavia riusciamo comunque a maggiorare la precedente quantità mediante la (2.37). Distinguiamo i casi $\alpha \geq 3$ e $2 < \alpha < 3$.
Per $\alpha \geq 3$ si ha:

$$||(u_h)'||_{L^2(0,L)} \leq \left|\left|\frac{\partial_1 y_1^h - 1}{h^{\alpha-1}}\right|\right|_{L^2(\Omega)} \leq \left|\left|\frac{\partial_1 y_1^h - R_{11}^h}{h^{\alpha-1}}\right|\right|_{L^2(0,L)} + \left|\left|\frac{R_{11}^h - 1}{h^{\alpha-1}}\right|\right|_{L^2(0,L)} \tag{2.44}$$

Dalla (2.35) segue che il primo termine a secondo membro è uniformemente limitato. Inoltre, possiamo scrivere il secondo termine come

$$\left\|\frac{R^h_{11}-1}{h^{\alpha-1}}\right\|_{L^2(0,L)} = \left\|\frac{R^h_{11}-1}{h^{2\alpha-4}}\right\|_{L^2(0,L)} h^{\alpha-3},$$

che è uniformemente limitato per $\alpha \geq 3$ per la (2.37). Dalla (2.35) e dalla (2.44) si ottiene quindi che (u^h) è uniformemente limitata in $W^{1,2}(0,L)$, da cui segue la (2.31).

Consideriamo il caso $2 < \alpha < 3$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} &||(u_h)' - \left(\frac{A^2}{2}\right)_{11} ||_{L^2(0,L)} \leq \left\|\frac{\partial_1 y^h_1 - 1}{h^{2(\alpha-2)}} - \left(\frac{A^2}{2}\right)_{11}\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left\|\frac{\partial_1 y^h_1 - R^h_{11}}{h^{2(\alpha-2)}}\right\|_{L^2(0,L)} + \left\|\frac{R^h_{11}-1}{h^{2(\alpha-2)}} - \left(\frac{A^2}{2}\right)_{11}\right\|_{L^2(0,L)}. \end{aligned}$$

Dalla (2.37) segue che il secondo termine a secondo membro è infinitesimo. Inoltre possiamo scrivere il primo termine come:

$$\left\|\frac{\partial_1 y^h_1 - R^h_{11}}{h^{2\alpha-4}}\right\|_{L^2(0,L)} = h^{3-\alpha}\left\|\frac{\partial_1 y^h_1 - R^h_{11}}{h^{\alpha-1}}\right\|_{L^2(0,L)}$$

che è infinitesimo per $\alpha < 3$ per la (2.4). Di conseguenza, otteniamo

$$u'_h \to \frac{A^2}{2} \text{ in } L^2(0,L). \tag{2.45}$$

Tornando alla (2.43), segue che esiste $u \in W^{1,2}(0,L)$ tale che $u^h \rightharpoonup u$ in $W^{1,2}(0,L)$. D'altra parte, dalla (2.45), u^h converge a u fortemente in $W^{1,2}(0,L)$ e vale il vincolo (1.22).

Procediamo ora studiando la successione (w^h). A tale scopo osserviamo preliminarmente che, per le ipotesi di normalizzazione su S, w^h si può esprimere come:

$$\begin{aligned} w^h(x_1) = &\frac{1}{\mu(S)}\int_S x_2\left(\frac{(1/h)y^h_3 - x_3}{h^{\alpha-2}}\right) - \left(\int_S \frac{y^h_3}{h^{\alpha-1}}d\xi_2 d\xi_3\right)dx_2dx_3 \quad (2.46)\\ &-\frac{1}{\mu(S)}\int_S x_3\left(\frac{(1/h)y^h_2 - x_2}{h^{\alpha-2}}\right) - \left(\int_S \frac{y^h_2}{h^{\alpha-1}}d\xi_2 d\xi_3\right)dx_2dx_3. \end{aligned}$$

D'altra parte, per il Lemma 2.1.4 e per le ipotesi di normalizzazione su S si ottiene

$$\left|\left|\frac{(1/h)y_3^h - x_3}{h^{\alpha-2}} - A_{32}x_2 - \int_S \frac{y_3^h}{h^{\alpha-1}} dx_2 dx_3\right|\right|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq C\left(\left|\left|\frac{(1/h)\partial_3 y_3^h - 1}{h^{\alpha-2}}\right|\right|_{L^2(\Omega)} + \left|\left|\frac{(1/h)\partial_2 y_3^h}{h^{\alpha-2}} - A_{32}\right|\right|_{L^2(\Omega)}\right)$$

e quest'ultima quantità è infinitesima per la (2.35) e perché $A_{33} = 0$.
Ragionando in modo analogo otteniamo

$$\left|\left|\frac{(1/h)y_2^h - x_2}{h^{\alpha-2}} - A_{23}x_3 - \int_S \frac{y_2^h}{h^{\alpha-1}} dx_2 dx_3\right|\right|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

pertanto, dalla (2.46) e dalla definizione di $\mu(S)$, segue che

$$w^h \to -A_{23} = A_{32} \text{ in } L^2(0, L).$$

Infine, è possibile stimare $||(w^h)'||_{L^2(0,L)}$. A tale scopo osserviamo che, per le ipotesi di normalizzazione su S,

$$(w^h)' = \int_S \frac{x_2\partial_1 y_3^h - x_3\partial_1 y_2^h}{h^{\alpha-1}} - \frac{(x_2 R_{31}^h - x_3 R_{21}^h)}{h^{\alpha-1}} dx_2 dx_3.$$

Di conseguenza

$$||(w^h)'||_{L^2(0,L)} \leq C\left(\left|\left|\frac{\partial_1 y_3^h - R_{31}^h}{h^{\alpha-1}}\right|\right|_{L^2(\Omega)} + \left|\left|\frac{\partial_1 y_2^h - R_{21}^h}{h^{\alpha-1}}\right|\right|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{2.47}$$

e quindi $((w^h)')$ è uniformemente limitata in $L^2(0, L)$ per la (2.37) e per la (2.35). Pertanto esiste $w \in W^{1,2}(0, L)$ tale che valga la (2.33).
Per concludere la dimostrazione del teorema procediamo ora verificando le condizioni al bordo per le funzioni limite.
Notiamo che, dalle condizioni al bordo sulla successione (y^h),

$$u^h(0) = v_k^h(0) = w^h(0) = 0 \text{ per } k = 2, 3 \text{ e per ogni } h > 0,$$

dunque si ottiene immediatamente che $u(0) = v_k(0) = w(0)$ per $k = 2, 3$ per immersione compatta di $W^{1,2}(0, L)$ in $C[0, L]$. Per quanto riguarda le condizioni al bordo sulla derivata prima delle funzioni v_k, procediamo ragionando come in ([F-J-M2], Corollario 1).

Poniamo

$$\eta_h(x_1) := \int_S x_3 \left(\frac{y_1^h - x_1}{h^{\alpha-1}} \right) dx_2 dx_3.$$

Allo scopo di studiare le proprietà di convergenza di η_h, introduciamo la funzione:

$$z_1^h(x) := y_1^h(x) - x_1 - h^\rho u^h(x_1),$$

dove $\rho = \begin{cases} \alpha - 1 \text{ per } \alpha \geq 3, \\ 2(\alpha-2) \text{ altrimenti.} \end{cases}$

Osserviamo poi che valgono le seguenti uguaglianze per $k = 2, 3$:

$$\frac{\partial_k z_1^h}{h} = \frac{\partial_k y_1^h}{h} = (\nabla_h y^h - Id)_{1k} = (\nabla_h y^h - R^h)_{1k} + h^{\alpha-2} A_{1k}^h. \tag{2.48}$$

Di conseguenza,ricordando la (2.4), si ottiene per $k = 2, 3$

$$\left|\left| \frac{\partial_k z_1^h}{h} - h^{\alpha-2} A_{1k}^h \right|\right|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{\alpha-1}. \tag{2.49}$$

Osservando che le funzioni z_1^h e $x_k h^{\alpha-2} A_{1k}^h$ per $k = 2, 3$ sono tutte a media nulla su S, dal Lemma 2.1.4 e dalla 2.49, si ottiene:

$$\left|\left| \frac{z_1^h}{h} - x_2 h^{\alpha-2} A_{12}^h - x_3 h^{\alpha-2} A_{13}^h \right|\right|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{\alpha-1}. \tag{2.50}$$

D'altra parte, abbiamo:

$$\eta_h(x_1) = \int_S x_3 \left(\frac{z_1^h}{h^{\alpha-1}} - x_2 A_{12}^h - x_3 A_{13}^h \right) dx_2 dx_3 + \mu_3(S) A_{13}^h,$$

dove $\mu_3(S) = \int_S x_3^2 dx_2 dx_3$ è il momento di inerzia rispetto all'asse x_3. Pertanto, dalla (2.50), si ottiene

$$\int_0^L |\eta_h - \mu_3(S) A_{13}^h|^2 dx_1 \leq \int_\Omega |x_3 \left(\frac{z_1^h}{h^{\alpha-1}} - x_2 A_{12}^h - x_3 A_{13}^h \right)|^2 dx$$
$$\leq \frac{C}{h^{2\alpha-4}} \left|\left| \frac{z_1^h}{h} - h^{\alpha-2} x_2 A_{12}^h - h^{\alpha-2} x_3 A_{13}^h \right|\right|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C h^2.$$

Dalla (2.41) concludiamo che

$$\eta_h \to \mu_3(S) A_{13} \text{ in } L^2(0, L). \tag{2.51}$$

Si osserva poi che, per le ipotesi di normalizzazione su S, abbiamo l'uguaglianza:

$$\eta_h'(x_1) = \int_S x_3 \frac{\partial_1 y_1^h - 1}{h^{\alpha-1}} dx_2 dx_3 = \int_S x_3 \frac{\partial_1 y_1^h - R_{11}^h}{h^{\alpha-1}} dx_2 dx_3,$$

dunque per la (2.4) la successione (η_h') è limitata in $L^2(0, L)$; di conseguenza in (2.51) si ha convergenza debole in $W^{1,2}(0, L)$ e quindi si ha convergenza forte in $C[0, L]$. Pertanto, essendo $\eta_h(0) = 0$ per ogni $h > 0$, si ottiene che $A_{13} = -v_3'$ è nulla in $x_1 = 0$. Analogamente si ragiona per v_2'.

$\square$

Capitolo 3

Convergenza di punti critici sotto condizioni di crescita dall'alto

In questo capitolo proveremo che, sotto condizioni di crescita dall'alto della densità di energia elastica, è possibile ottenere un risultato di convergenza per le configurazioni di equilibrio delle travi tridimensionali. Supponiamo che la funzione W soddisfi le ipotesi (H1)-(H4) e che inoltre valga:

(H5) W sia differenziabile con $|DW(F)| \leq C(1 + |F|)$.

Dal Teorema 1.3.1 abbiamo un risultato di convergenza dei punti di minimo dei funzionali J^h a punti di minimo del Γ-limite; il risultato principale di questo capitolo sarà una generalizzazione di tale teorema che ci permetterà di stabilire la convergenza di punti stazionari dei funzionali J^h secondo la Definizione 1.1 a punti stazionari del Γ-limite.
Nella prima sezione enunceremo il risultato di convergenza e riporteremo due proposizioni preliminari. La seconda sezione sarà invece dedicata alla dimostrazione del teorema.

3.1 Enunciato e lemmi preliminari

Il risultato principale del capitolo è il seguente.

Teorema 3.1.1. *Supponiamo che la densità di energia elastica W soddisfi (H1)-(H5), siano f_2,$f_3 \in L^2(0,L)$ e sia (y^h) una successione di punti stazionari di J^h secondo la Definizione 1.1. Supponiamo inoltre che esista $C > 0$ tale che*

$$\int_\Omega W(\nabla_h y^h)dx \leq Ch^{2\alpha-2}, \tag{3.1}$$

con $\alpha > 2$.
Siano u^h, v_2^h, v_3^h, w^h le successioni definite in (1.24), (1.25) e (1.26). Allora, a meno di sottosuccessioni, vale che:

$$\begin{aligned}
&y^h \to x_1 e_1 \ in \ W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3),\\
&u^h \rightharpoonup u \ in \ W^{1,2}(0,L) \ per \ \alpha \geq 3,\\
&u^h \to u \ in \ W^{1,2}(0,L) \ per \ 2 < \alpha < 3,\\
&v_k^h \to v_k \ in \ W^{1,2}(0,L), \ v_k \in W^{2,2}(0,L) \ per \ k = 2,3,\\
&w^h \rightharpoonup w \ in \ W^{1,2}(0,L).
\end{aligned}$$

Inoltre, $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_\alpha$ ed è un punto stazionario di I_α.

Osservazione 3.1.1. Osserviamo che, nello studio della convergenza dei punti stazionari, è essenziale l'ipotesi di considerare deformazioni tali che valga la disuguaglianza

$$\int_\Omega W(\nabla_h y^h)dx \leq Ch^{2\alpha-2},$$

con $\alpha > 2$, dove C è una costante opportuna.
Tale stima dell'energia infatti gioca un ruolo fondamentale sia per avere compattezza delle successioni considerate che per determinare le caratteristiche del modello limite unidimensionale. La precedente condizione è automaticamente verificata per una successione $(2\alpha - 2)$-minimizzante. Per questo, il Teorema 3.1.1 può essere visto come una generalizzazione del Teorema 1.3.1.

Osservazione 3.1.2. Osserviamo che un'altra ipotesi fondamentale nel Teorema 3.1.1 è la differenziabilità ovunque della funzione W e la crescita lineare della sua derivata. Infatti, come discusso nell'Osservazione 1.2.2, sotto queste ipotesi la Definizione 1.1 di punto stazionario ha significato ed è soddisfatta dai punti di minimo locale. Tale ipotesi di crescita è insoddisfacente perché incompatibile con la richiesta fisica che W esploda in corrispondenza di deformazioni con determinante minore o uguale a zero. Tuttavia, lo studio della convergenza dei punti di equilibrio sotto tali ipotesi permette di illustrare con maggiore chiarezza la tecnica di dimostrazione che verrà utilizzata per il risultato di convergenza sotto ipotesi fisiche di crescita.

Introduciamo un risultato preliminare, di cui faremo uso nel quinto passo della dimostrazione del teorema per ottenere la prima equazione di Eulero-Lagrange del Γ-limite.

Proposizione 3.1.2. *Sia $\overline{G} \in \mathcal{M}^{3\times 3}$ una matrice simmetrica tale che $\mathcal{L}\overline{G} = ae_1 \otimes e_1$, con $a \in \mathbb{R}$. Allora $a = \mathbb{E}\overline{G}_{11}$, dove $\mathbb{E}$ è la costante introdotta in (1.18).*

Dimostrazione. Poiché la mappa $\mathcal{L}$ è invertibile con inversa lineare sullo spazio delle matrici simmetriche per l'Osservazione 1.1.2, si ottiene

$$\overline{G} = a\mathcal{L}^{-1}(e_1 \otimes e_1).$$

Di conseguenza,

$$\overline{G}_{11} = \overline{G} : e_1 \otimes e_1 = a(\mathcal{L}^{-1}(e_1 \otimes e_1) : (e_1 \otimes e_1)).$$

Pertanto la tesi segue dall'Osservazione 1.3.2. □

La seguente proposizione ci permetterà invece di caratterizzare lo stress limite nel secondo passo della dimostrazione del teorema.

Proposizione 3.1.3. *Supponiamo che W soddisfi le ipotesi (H1)-(H5) e sia (G^h) una successione uniformemente limitata in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Per ogni $h > 0$ sia $E^h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito da:*

$$E^h = \frac{1}{h^{\alpha-1}} DW(Id + h^{\alpha-1}G^h).$$

Allora $E^h \rightharpoonup E = \mathcal{L}G$ in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times 3})$.

Dimostrazione. Dall'Osservazione 1.2.1 si ha:

$$|E^h| = \frac{1}{h^{\alpha-1}}|DW(Id + h^{\alpha-1}G^h)| \leq C|G^h|$$

e dall'uniforme limitatezza delle (G^h) in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3})$, segue l'uniforme limitatezza della successione (E^h) in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3})$. La tesi segue se proviamo che ogni sottosuccessione debolmente convergente di (E^h) tende a E. Sia quindi $E^{(h_k)}$ una sottosuccessione debolmente convergente in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3})$ a $\widetilde{E}$. Usando uno sviluppo di Taylor attorno all'identità, abbiamo:

$$E^{h_k} = \frac{1}{h_k^{\alpha-1}}DW(Id + h_k^{\alpha-1}G^{h_k}) = \mathcal{L}G^{h_k} + \frac{1}{h_k^{\alpha-1}}\eta(h_k^{\alpha-1}G^{h_k}), \tag{3.2}$$

dove $\frac{|\eta(F)|}{|F|} \to 0$ per $|F| \to 0$. Poniamo:

$$\omega(t) := \sup\left\{\frac{|\eta(F)|}{|F|}\text{tali che}|F| \leq t\right\}\ \ \forall t > 0.$$

Allora $\omega(t) \to 0$ per $t \to 0^+$. Sia $M_k = \{x \in \Omega\ :\ |G^{h_k}(x)| \leq h_k^{-1}\}$ e sia χ_k la funzione caratteristica di tale insieme.

Poiché $|\Omega \setminus M_k| \to 0$, si ha che $\chi_k \to 1$ in misura. Di conseguenza:

$$\chi_k E^{h_k} \rightharpoonup \widetilde{E} \text{ in } L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3}), \tag{3.3}$$

$$\chi_k G^{h_k} \rightharpoonup G \text{ in } L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3}). \tag{3.4}$$

Inoltre, dalla (3.2) per ogni k vale che

$$\chi_k E^{h_k} = \mathcal{L}(\chi_k G^{h_k}) + \frac{1}{h_k^{\alpha-1}}\chi_k\eta(h_k^{\alpha-1}G_k^h).$$

Studiamo separatamente i termini della somma precedente, abbiamo:

(i) $\mathcal{L}(\chi_k G^{h_k}) \overset{L^2}{\rightharpoonup} \mathcal{L}G$ dalla (3.3) per linearità di $\mathcal{L}$,

(ii) ricordando che $h_k^{\alpha-1}|G^{h_k}| \leq h_k^{\alpha-2}$ su M_k ed essendo χ_k la funzione caratteristica di tale insieme, $\frac{1}{(h_k)^{\alpha-1}}\chi_k\eta(h_k^{\alpha-1}G_k^h) \leq \omega(h_k^{\alpha-2})|G^{h_k}|$. D'altra parte $\omega(h_k^{\alpha-2})|G^{h_k}| \to 0$ fortemente in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3})$ per uniforme limitatezza in L^2 della successione (G^{h_k}).

In conclusione, $\chi_k E^{h_k} \overset{L^2}{\rightharpoonup} \mathcal{L}G$. Dunque $\widetilde{E} = \mathcal{L}G$ e poiché ciò vale per ogni sottosuccessione debolmente convergente, si ottiene la tesi.

□

3.2 Dimostrazione del Teorema 3.1.1

Questa sezione è interamente dedicata alla dimostrazione del risultato principale del capitolo (Teorema 3.1.1). La compattezza delle deformazioni y^h, degli spostamenti e delle funzioni di twist è una conseguenza immediata della stima dell'energia (3.1) e dei risultati di compattezza del Capitolo 2, basati sulla stima di rigidità (Teorema 2.1.1). Il teorema di rigidità gioca un ruolo fondamentale anche nella dimostrazione della stazionarietà della quaterna limite (u, v_2, v_3, w). Infatti, permette di decomporre i gradienti di deformazione associati alle deformazioni y^h nel prodotto di una rotazione, la cui oscillazione è controllata e di un termine linearizzato, il cui strain G^h è uniformemente limitato in L^2.
Si introduce quindi un tensore di stress linearizzato E^h associato allo strain G^h e si esprimono le equazioni di Eulero-Lagrange dei funzionali J^h in termini di queste nuove variabili.
Dall'ipotesi di frame-indifference della funzione W si ottengono delle proprietà di simmetria per E^h, mentre dall'uniforme limitatezza in L^2 degli strain e dalle ipotesi di crescita su W si ha la convergenza debole di E^h in L^2. Mediante la Proposizione 3.1.2, si può poi caratterizzare lo stress limite in termini della quaterna limite (u, v_2, v_3, w).
La dimostrazione si conclude passando al limite nel momento di ordine zero e nei momenti di ordine uno delle equazioni di Eulero-Lagrange dei funzionali J^h.

Dimostrazione del Teorema 3.1.1. La convergenza delle successioni (y^h), (u^h), (v_2^h), (v_3^h), (w^h) segue dal Teorema 2.2.1, insieme al fatto che $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_\alpha$.
Per concludere la dimostrazione è necessario provare che (u, v_2, v_3, w) è punto stazionario del funzionale I_α.
Per maggiore chiarezza, suddividiamo la dimostrazione in 8 passi.
Primo passo.
(*Decomposizione del gradiente di deformazione in rotazione e strain*)
Dal Teorema 2.1.3 sappiamo che esiste $(R^h) \subset C^\infty((0, L), \mathcal{M}^{3\times3})$ tale che

(a) $R^h(x_1) \in SO(3)\ \forall x_1 \in (0, L)$,

(b) $||\nabla_h y^h(x) - R^h||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\alpha-1}$,

(c) $||(R^h)'||_{L^2(0,L)} \leq Ch^{\alpha-2}$,

(d) $||R^h - Id||_{L^\infty(0,L)} \leq Ch^{\alpha-2}$.

Definiamo il tensore di deformazione (strain) G^h come

$$\nabla_h y^h = R^h(Id + h^{\alpha-1}G^h).$$

Abbiamo che le funzioni G^h sono limitate in L^2 per la (b), dunque esiste G tale che $G^h \rightharpoonup G$ in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3})$. Inoltre è possibile caratterizzare la parte simmetrica di G in termine degli spostamenti limite mediante il seguente lemma.

Lemma 3.2.1. *Per ogni $\alpha > 2$ esiste $\beta \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, con $\partial_k\beta \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ per $k = 2, 3$, tale che, posta*

$$M(\beta) := \left(A' \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \partial_2\beta \middle| \partial_3\beta \right),$$

si ha

$$symG = \begin{cases} symM(\beta) + (u' + \frac{1}{2}[(v_2')^2 + (v_3')^2])e_1 \otimes e_1 & per\ \alpha = 3, \\ symM(\beta) + u'e_1 \otimes e_1 & per\ \alpha > 3, \\ symM(\beta) + ge_1 \otimes e_1 & per\ 2 < \alpha < 3, \end{cases}$$

con $g \in L^2(0, L)$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione del lemma nei casi $\alpha = 3$ e $2 < \alpha < 3$ si vedano, rispettivamente, [M-M] e [S]. La dimostrazione nel caso $\alpha > 3$ è analoga a quella per il caso $\alpha = 3$. □

Secondo passo.

(*Prime conseguenze dell' equazione di Eulero-Lagrange*)

Introduciamo gli stress linearizzati associati alle deformazioni y^h, studiandone le proprietà di convergenza. Sia $E^h : \Omega \to \mathbb{R}^3$ il tensore di sforzo (stress), definito come:

$$E^h = \frac{1}{h^{\alpha-1}} DW(Id + h^{\alpha-1}G^h).$$

Dalla Proposizione 3.1.3 si ha che

$$E^h \rightharpoonup E = \mathcal{L}G \text{ in } L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3}). \tag{3.5}$$

Dall' Osservazione 1.1.2, segue in particolare che E è simmetrico.
Per frame-indifference si ha

$$DW(\nabla_h y^h) = R^h DW(Id + h^{\alpha-1}G^h) = h^{\alpha-1} R^h E^h. \tag{3.6}$$

Per ipotesi (y^h) è una successione di deformazioni verificanti l'equazione di Eulero-Lagrange (1.1). Dalla (3.6) si ha quindi:

$$\int_\Omega [h^{\alpha-1} R^h E^h : \nabla_h \psi - h^\alpha (f_2\psi_2 + f_3\psi_3)] dx = 0, \tag{3.7}$$

per ogni $\psi \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tale che $\psi(0, x_2, x_3) = 0$.
Dividendo l'equazione per $h^{\alpha-2}$ e passando al limite per $h \to 0$ si ottiene:

$$\int_\Omega Ee_2 \cdot \partial_2 \psi + Ee_3 \cdot \partial_3 \psi dx = 0, \tag{3.8}$$

per ogni $\psi \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tale che $\psi(0, x_2, x_3) = 0$.
Di conseguenza, scegliendo $\psi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1)\widetilde{\psi}(x_2, x_3)$, con $\varphi \in C^\infty([0, L])$, $\varphi(0) = 0$ e $\widetilde{\psi} \in W^{1,2}(S, \mathbb{R}^3)$, si ottiene:

$$\int_0^L \varphi \left(\int_S Ee_2 \cdot \partial_2 \widetilde{\psi} + Ee_3 \cdot \partial_3 \widetilde{\psi} dx_2 dx_3 \right) dx_1 = 0,$$

per ogni $\varphi \in C^\infty([0, L])$, $\varphi(0) = 0$ e per ogni $\widetilde{\psi} \in W^{1,2}(S, \mathbb{R}^3)$. In particolare, quindi:

$$\int_S Ee_2 \cdot \partial_2 \widetilde{\psi} + Ee_3 \cdot \partial_3 \widetilde{\psi} dx_2 dx_3 = 0 \text{ q.o. in } (0, L),$$

per ogni $\widetilde{\psi} \in W^{1,2}(S, \mathbb{R}^3)$. In altre parole,

$$\begin{cases} div_{x_2,x_3}(Ee_2|Ee_3) = 0 \text{ in } S \\ (Ee_2|Ee_3) \cdot \nu_{\partial S} = 0 \end{cases} \quad \text{q.o. in } (0, L). \tag{3.9}$$

Questo implica in particolare che q.o. in $(0, L)$

$$\int_S E e_k dx_2 dx_3 = 0 \text{ per } k = 2, 3. \tag{3.10}$$

È infatti sufficiente osservare che, posta $\psi_k(x) = x_k \phi(x_1)$ per $k = 2, 3$, con $\phi \in W^{1,2}((0, L), \mathbb{R}^3)$ e $\phi(0) = 0$, possiamo utilizzare ψ_k come funzione test nella (3.8), ottenendo:

$$\int_\Omega E(x) e_k \cdot \phi(x_1) dx = 0,$$

ovvero

$$\int_0^L \left(\int_S E(x) e_k dx_2 dx_3 \right) \cdot \phi(x_1) dx_1 = 0,$$

per ogni $\phi \in W^{1,2}((0, L), \mathbb{R}^3)$ tale che $\phi(0) = 0$, da cui segue la (3.10).

Terzo passo.

(*Proprietà di simmetria di* E^h)

È possibile stimare la parte antisimmetrica delle mappe E^h; infatti, poiché la matrice $DW(F)F^T$ è simmetrica per ogni $F \in \mathcal{M}^{3\times 3}$ dall'Osservazione 1.1.4, scegliendo $F = Id + h^{\alpha-1} G^h$ si ottiene:

$$DW(Id + h^{\alpha-1} G^h)(Id + h^{\alpha-1} G^h)^T = (Id + h^{\alpha-1} G^h) DW(Id + h^{\alpha-1} G^h)^T,$$

ovvero:

$$E^h - (E^h)^T = -h^{\alpha-1} [E^h (G^h)^T - G^h (E^h)^T].$$

Sfruttando l'uniforme limitatezza delle successioni (G^h) e (E^h) in L^2 abbiamo infine la seguente stima:

$$||E^h - (E^h)^T||_{L^1(\Omega, \mathcal{M}^{3\times 3})} \le C h^{\alpha-1}.$$

Quarto passo.

(*Momento di ordine 0 dell' equazione di Eulero-Lagrange*)

In questo passo analizzeremo il momento di ordine zero dello stress limite E, mostrando che esso è nullo.

La proprietà (3.10) implica che $\overline{E}^h e_2 = \overline{E}^h e_3 = 0$. Dalla simmetria di E segue quindi che

$$\overline{E}(x) = \overline{E}_{11}(x) e_1 \otimes e_1.$$

Sia $\phi = (\phi_1|\phi_2|\phi_3) \in C^\infty([0,L],\mathbb{R}^3)$ tale che $\phi(0) = 0$. Usando ϕ come funzione test nella (3.7) si ottiene:

$$\int_0^L [R^h\overline{E}^h : (\phi'|0|0) - h(f_2\phi_2 + f_3\phi_3)]dx_1 = 0. \tag{3.11}$$

Poste

$$\widetilde{f}_k(x_1) = \int_{x_1}^L f_2(x_1)dx_1 \text{ per } k = 2,3 \tag{3.12}$$

si ha che:

$$\int_0^L -f_2(x_1)\phi_2 dx_1 = -\int_0^L \widetilde{f}_2(x_1)\phi_2' dx_1,$$

dunque l'equazione (3.11) si può riscrivere come

$$\int_0^L [(R^h\overline{E}^h)e_1 \cdot \phi' - h(\widetilde{f}_2\phi_2' + \widetilde{f}_3\phi_3')]dx_1 = 0$$

per ogni $\phi \in C^\infty([0,L],\mathbb{R}^3)$ con $\phi(0) = 0$.
Di conseguenza abbiamo la seguente caratterizzazione della prima colonna dello stress E^h:

$$\overline{E^h}(x_1)e_1 = h(R^h)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{f}_2(x_1) \\ \widetilde{f}_3(x_1) \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Inoltre, passando al limite si ottiene $\overline{E}e_1 = 0$ e dunque $\overline{E} = 0$.

Quinto passo.

(*Determinazione di* $\overline{E}_{11}$)

Procediamo dando una caratterizzazione di $\overline{E}_{11}$ che ci permetterà di ottenere la prima equazione di Eulero-Lagrange nel caso $\alpha \geq 3$. Ricordando il Lemma 3.2.1, l'Osservazione 1.1.2 e le proprietà di normalizzazione di S (1.1), otteniamo

$$\overline{G}_{11} = \begin{cases} u' + \frac{1}{2}[(v_2')^2 + (v_3')^2] & \text{per } \alpha = 3, \\ u' & \text{per } \alpha > 3, \\ g & \text{per } 2 < \alpha < 3, \end{cases}$$

dove $g \in L^2(0,L)$. Dalla Proposizione 3.1.2, essendo $\overline{E}_{11} = \mathbb{E}\overline{G}_{11} = 0$ per il quarto passo, seguono la (1.35) e la (1.44) e si ha che $g = 0$ q.o. in $(0,L)$.

Sesto passo.

(*Relazione fra stress e strain*)

A questo punto, siamo in grado di dare una caratterizzazione esplicita dello stress E nei diversi casi. Dal Lemma 3.2.1 e dal passo precedente si ha

$$symG = symM(\beta),$$

per ogni $\alpha > 2$, dove $\beta \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\partial_k \beta \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ per $k = 2, 3$.
Inoltre, per le ipotesi di normalizzazione su S risulta:

$$\overline{M(\beta)} = \left(0 \left| \int_S \partial_2 \beta dx_2 dx_3 \right| \int_S \partial_3 \beta dx_2 dx_3 \right). \tag{3.14}$$

Dall'Osservazione 1.1.2 segue che

$$E = \mathcal{L}G = \mathcal{L}symG = \mathcal{L}(M(\beta)),$$

dunque dalla (3.14) e dal quarto passo

$$\mathcal{L}(\overline{M(\beta)}) = \mathcal{L}\left(\left| \int_S \partial_2 \beta dx_2 dx_3 \right| \int_S \partial_3 \beta dx_2 dx_3 \right) = \overline{E} = 0.$$

Di conseguenza, ponendo

$$\widetilde{\beta}(x) = \beta(x) - x_2 \int_S \partial_2 \beta d\xi_2 d\xi_3 - x_3 \int_S \partial_3 \beta d\xi_2 \xi_3 - \int_S \beta d\xi_2 \xi_3,$$

si ottiene

$$E = E - \overline{E} = \mathcal{L}\left(A' \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \left| \partial_2 \widetilde{\beta} \right| \partial_3 \widetilde{\beta} \right). \tag{3.15}$$

Ora, per q.o. $x_1 \in (0, L)$ si ha che $\widetilde{\beta}(x_1, \cdot, \cdot) \in \mathcal{B}$ e poiché E soddisfa le equazioni (3.9), per il Lemma 1.4.1 si ha che $(\widetilde{\beta})$ è punto di minimo del funzionale

$$\mathcal{G}_{A'}(\beta) = \int_S Q_3 \left(A' \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} |\partial_2 \beta \; |\partial_3 \beta \right) dx_2 dx_3.$$

In altre parole, $\widetilde{\beta}$ soddisfa

$$Q_1(A') = \int_S Q_3 \left(A' \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \left| \partial_2 \widetilde{\beta} \right| \partial_3 \widetilde{\beta} \right) dx_2 dx_3. \tag{3.16}$$

Settimo passo.

(*Momenti di ordine 1 dell' equazione di Eulero-Lagrange*)

Dimostriamo che per ogni $\alpha > 2$ gli spostamenti limite soddisfano le equazioni di Eulero-Lagrange (1.36) e (1.37).

Definiamo i momenti di ordine 1

$$\widetilde{E}^h(x_1) = \int_S x_2 E^h dx_2 dx_3,$$

$$\widehat{E}^h(x_1) = \int_S x_3 E^h dx_2 dx_3.$$

Dalla convergenza (3.5) abbiamo che $\widetilde{E^h} \rightharpoonup \widetilde{E}$ e $\widehat{E^h} \rightharpoonup \widehat{E}$ debolmente in $L^2(0, L)$.

Consideriamo la funzione

$$\phi(x) = x_2 \psi'(x_1) e_1$$

dove $\psi \in W^{2,2}(0, L)$ e $\psi(0) = \psi'(0) = 0$.

Utilizzando ϕ come funzione test nell'equazione di Eulero-Lagrange (3.7), dalle ipotesi di normalizzazione su S si ottiene:

$$\int_\Omega (R^h E^h : \nabla_h \phi) dx = 0.$$

D'altra parte abbiamo:

$$\nabla_h \phi = \left(x_2 \psi'' e_1 \left| \frac{1}{h} \psi' e_1 \right| 0 \right).$$

Quindi otteniamo:

$$\int_\Omega \left(x_2 \psi'' R^h E^h e_1 \cdot e_1 + \frac{1}{h} \psi' R^h E^h e_2 \cdot e_1 \right) dx = 0.$$

Integrando in S e ricordando le ipotesi di normalizzazione, l'equazione precedente si riduce a:

$$\int_0^L \left[(R^h E^h)_{11} \psi'' + \frac{1}{h} (R^h E^h)_{21} \psi' \right] dx_1 = 0.$$

Dalla (3.13) abbiamo che $\frac{1}{h}(R^h E^h)_{21} = \widetilde{f}_2$. Ricordando la definizione (3.12) di $\widetilde{f}_2$, l'equazione si riscrive come

$$\int_0^L [(R^h E^h)_{11}\psi'' + f_2\psi]dx_1 = 0.$$

Poiché $\widetilde{E^h}$ converge a $\widetilde{E}$ debolmente in $L^2(0,L)$ e R^h converge all'identità fortemente in L^∞, passando al limite abbiamo

$$\int_0^L [\widetilde{E}_{11}\psi'' + f_2\psi]dx_1 = 0.$$

L'equazione trovata corrisponde alla (1.36), grazie alla caratterizzazione di E provata in (3.15) e (3.16). Scegliendo funzioni test della forma $\phi(x) = x_3\psi'(x_1)e_1$, con $\psi \in W^{2,2}(0,L)$ e $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ e considerando il momento $\widehat{E}$, si può ottenere in modo analogo l' equazione (1.37).

Ottavo passo.

(*Equazione di Eulero-Lagrange per la funzione di twist*)

In quest'ultimo passo distinguiamo i casi $\alpha \geq 3$ e $2 < \alpha < 3$ e procediamo ricavando l'ultima equazione di Eulero-Lagrange del Γ-limite.

Consideriamo inizialmente $\alpha \geq 3$.

Sia $\phi \in W^{1,2}(0,L)$ tale che $\phi(0) = 0$ e poniamo

$$\psi(x) = (0, -\phi(x_1)x_3, \phi(x_1)x_2).$$

Abbiamo che $\psi \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ e $\psi(0, x_2, x_3) = 0$, dunque possiamo considerarla come funzione test nell'equazione di Eulero-Lagrange (3.7). Dal momento che

$$\int_\Omega h(f_2\psi_2 + f_3\psi_3)dx = 0,$$

per le ipotesi di normalizzazione su S, otteniamo

$$\int_\Omega R^h E^h : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\phi' x_3 & 0 & -\frac{\phi}{h} \\ \phi' x_2 & \frac{\phi}{h} & 0 \end{bmatrix} dx = 0. \tag{3.17}$$

Consideriamo

$$\int_\Omega \frac{\phi}{h}[(R^h E^h)_{32} - (R^h E^h)_{23}]dx.$$

Ci proponiamo di mostrare che il precedente integrale tende a 0 per $h \to 0$. A tale scopo è conveniente decomporlo nella somma dei due termini:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{A}) &= \int_\Omega \phi \left[\left(\frac{R^h - Id}{h} E^h \right)_{32} - \left(\frac{R^h - Id}{h} E^h \right)_{23} \right] dx, \\
(\mathrm{B}) &= \int_\Omega \frac{\phi}{h} (E^h_{32} - E^h_{23}) dx.
\end{aligned}$$

Consideriamo il termine (A) e osserviamo che

$$\frac{R^h - Id}{h} = h^{\alpha-3} A^h.$$

Ricordando che $A^h \to A$ in $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ per la (2.36) e che $E^h \rightharpoonup E$ in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ per la (3.5), si ottiene che $A^h E^h \rightharpoonup AE$ in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Pertanto, per $\alpha = 3$ il termine (A) tende a

$$\int_\Omega \phi[(AE)_{32} - (AE)_{23}] dx = \int_0^L \phi[(A\overline{E})_{32} - (A\overline{E})_{23}] dx_1 = 0,$$

perché $\overline{E} = 0$ dal passo 4. Per $\alpha > 3$ si ha che $h^{\alpha-3} A^h E^h$ tende a zero fortemente in L^2, per cui il termine (A) ha ancora limite nullo.
Poiché $||E^h_{3,2} - E^h_{2,3}||_{L^1} \leq C h^{\alpha-1}$ per il passo 3, anche il termine (B) tende a zero. Dunque, tornando alla (3.17) otteniamo

$$\lim_{h \to 0} \int_\Omega (R^h E^h) e_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\phi' x_2 \\ \phi' x_3 \end{pmatrix} dx = 0,$$

ovvero

$$\int_\Omega E e_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\phi' x_2 \\ \phi' x_3 \end{pmatrix} dx = 0.$$

Per simmetria di E e ricordando la caratterizzazione (3.15) e (3.16) di E si ottiene la (1.38) nel caso $\alpha \geq 3$.
Chiaramente non possiamo ragionare nello stesso modo per $2 < \alpha < 3$ perché non è più garantita la convergenza del termine (A); procediamo dunque effettuando una diversa scelta delle funzioni test nell'equazione (3.7). Più precisamente consideriamo la funzione

$$\psi(x) = x_2 \varphi(x_1),$$

con $\varphi \in W^{1,2}((0,L),\mathbb{R}^3)$, $\varphi(0)=0$.

Per le ipotesi di normalizzazione su S il termine dovuto alle forze di carico è nullo, pertanto si ottiene

$$\int_\Omega R^h E^h : \left(x_2\varphi' \left|\frac{\varphi}{h}\right| 0\right) dx = 0,$$

ovvero

$$\int_\Omega x_2 R^h E^h e_1 \cdot \varphi' + \frac{1}{h} R^h E^h e_2 \cdot \varphi dx = 0. \tag{3.18}$$

Scegliamo poi $\varphi(x_1) = \phi(x_1)R^h(x_1)e_3$, con $\phi \in W^{1,2}(0,L)$, $\phi(0)=0$.

Abbiamo:

$$\int_\Omega x_2 R^h E^h e_1 \cdot \phi' R^h e_3 + x_2 R^h E^h e_1 \cdot \phi (R^h)' e_3 dx$$
$$+ \int_\Omega \frac{1}{h} R^h E^h e_2 \cdot \phi R^h e_3 dx = 0,$$

ovvero

$$\int_\Omega x_2 \phi' E^h_{13} + x_2 \phi R^h E^h e_1 \cdot (R^h)' e_3 + \frac{E^h_{23}}{h} \phi dx = 0.$$

Analogamente, scegliendo $\psi(x) = x_3 \phi R^h e_2$ con $\phi \in W^{1,2}(0,L)$ e $\phi(0)=0$, si ottiene l'equazione:

$$\int_\Omega x_3 \phi'(x_1) E^h_{1,2} + x_3 \phi(x_1) R^h E^h e_1 \cdot (R^h)' e_2 + \frac{E^h_{3,2}}{h} \phi(x_1) dx = 0. \tag{3.19}$$

La differenza fra le due equazioni precedenti fornisce

$$\int_\Omega x_2 \phi' E^h_{13} - x_3 \phi' E^h_{12} + x_2 \phi R^h E^h e_1 \cdot (R^h)' e_3 dx \tag{3.20}$$
$$+ \int_\Omega -x_3 \phi R^h E^h e_1 \cdot (R^h)' e_2 + \frac{E^h_{23} - E^h_{32}}{h} \phi dx = 0,$$

per ogni $\phi \in W^{1,2}(0,L)$ tale che $\phi(0)=0$. Ricordando che $E^h \rightharpoonup E$ in L^2, $R^h \to Id$ in L^∞ e $(R^h)' \to 0$ in $L^2(0,L)$, si ha

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega x_2 \phi R^h E^h e_1 \cdot (R^h)' e_3 dx = 0, \tag{3.21}$$

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega x_3 \phi(x_1) R^h E^h e_1 \cdot (R^h)' e_2 dx = 0. \tag{3.22}$$

Inoltre, dal passo 3,

$$||E^h_{23} - E^h_{32}||_{L^1} \le C h^{\alpha-1}.$$

Pertanto, passando al limite in (3.20) si conclude che

$$\int_{\Omega} x_2 \phi' E_{13} - x_3 \phi' E_{12} dx = 0.$$

L'equazione trovata corrisponde alla (1.38), grazie alla caratterizzazione di E provata in (3.15) e in (3.16). Questo conclude la dimostrazione.

$\square$

Capitolo 4

Convergenza di punti critici sotto condizioni fisiche di crescita

Denotiamo con $\mathcal{M}^{3\times 3}_+$ l'insieme delle matrici $F \in \mathcal{M}^{3\times 3}$ con $\det F > 0$. In questo capitolo supporremo che la densità di energia elastica W soddisfi le ipotesi (H1)-(H4) e che inoltre valgano:

$$W(F) = +\infty \text{ se } \det F \leq 0,\ W(F) \to \infty \text{ se } \det F \to 0^+; \tag{H6}$$

$$W \text{ è } C^1 \text{ su } \mathcal{M}^{3\times 3}_+. \tag{H7}$$

$$\exists k > 0 \text{ tale che } |DW(F)F^T| \leq k(W(F)+1) \text{ per ogni } F \in \mathcal{M}^{3\times 3}_+; \tag{H8}$$

4.1 Enunciato e lemmi preliminari

Come discusso nella Sezione 1.2, sotto la condizione fisica (H6) non è garantito che si possa dare un significato all'equazione di Eulero-Lagrange in forma convenzionale. Sotto le ipotesi (H6)-(H8) è però possibile introdurre una definizione alternativa di stazionarietà per i funzionali tridimensionali, che permette comunque di ottenere al limite le stesse condizioni di stazionarietà unidimensionali, come mostrato dal seguente teorema.

Teorema 4.1.1. *Supponiamo che la densità di energia elastica W soddisfi (H1)-(H4) e (H6)-(H8), siano $f_2, f_3 \in L^2(0, L)$ e sia (y^h) una successione di punti stazionari alla Ball per il funzionale J^h (vedere la Definizione 1.16). Supponiamo inoltre che esista $C > 0$ tale che*

$$\int_\Omega W(\nabla_h y^h) dx \leq C h^{2\alpha-2}, \tag{4.1}$$

con $\alpha > 2$.
Siano u^h, v^h e w^h le successioni definite in (1.24), (1.25) e (1.26). Allora, a meno di sottosuccessioni, vale che:

$$\begin{aligned}
&y^h \to x_1 e_1 \textit{ in } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3),\\
&u^h \rightharpoonup u \textit{ in } W^{1,2}(0, L),\\
&v_k^h \to v_k \textit{ in } W^{1,2}(0, L),\ \ v_k \in W^{2,2}(0, L) \textit{ per } k = 2, 3,\\
&w^h \rightharpoonup w \textit{ in } W^{1,2}(0, L).
\end{aligned}$$

Inoltre $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_\alpha$ ed è un punto stazionario di I_α.

Osservazione 4.1.1. La definizione di punti stazionari alla Ball (1.2) richiede di definire diversamente le variabili di stress E^h rispetto al caso in cui si lavora con la Definizione 1.1. Questo comporta, da un lato, il fatto che i tensori E^h siano simmetrici per ogni $h > 0$, mentre con la definizione (1.1) si hanno proprietà di simmetria solo per lo stress limite E; d'altra parte, con la nuova definizione, l'uniforme limitatezza dei tensori di deformazione in L^2 non garantisce la convergenza debole della successione E^h in L^2, ma solamente di avere l'uniforme in L^1. Questa convergenza non è sufficiente per passare al limite nelle equazioni di Eulero-Lagrange perché si utilizzano funzioni test composte con le deformazioni y^h per le quali non si può garantire convergenza uniforme. Tale problema si può risolvere osservando che gli E^h risultano uniformemente limitati in L^2 se ristretti a degli opportuni insiemi B_h, sul cui complementare il contributo di E^h è trascurabile per $h \to 0$ (vedere terzo passo della dimostrazione del Teorema 4.1.1.

Osservazione 4.1.2. Come già sottolineato nell'Osservazione 4.1.1, nella definizione di punto stazionario alla Ball compaiono funzioni test che vengono valutate non più su Ω, ma sull'immagine di Ω mediante le deformazioni y^h. Di conseguenza è utile studiare le proprietà di convergenza della successione

$$\widetilde{y}^h := \left(y_1^h \left| \frac{y_2^h}{h} \right| \frac{y_3^h}{h} \right). \tag{4.2}$$

Si vedrà che il comportamento di $\widetilde{y}^h$ è molto diverso a seconda che $2 < \alpha < 3$ o $\alpha \geq 3$; questo determina la necessità di diversificare il procedimento di dimostrazione nei due casi.
Dal Lemma 2.1.4 segue la stima:

$$\left\| \frac{y_k^h}{h} - x_k - \int_S \left(\frac{y_k^h}{h} - x_k \right) dx_2 dx_3 \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\left\| \frac{\partial_k y_k^h}{h} - 1 \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial_j y_k^h}{h} \right\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

per $k, j \in \{2, 3\}, k \neq j$.
Di conseguenza dalla proprietà (2.35) si ottiene la disuguaglianza

$$\left\| \frac{y_k^h}{h} - x_k - h^{\alpha-3} v_k^h \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{\alpha-2}. \tag{4.3}$$

Pertanto, utilizzando la (2.29), possiamo concludere che

$$\left(y_1^h \left| \frac{y_2^h}{h} \right| \frac{y_3^h}{h} \right) \overset{L^2}{\rightarrow} \begin{cases} (x_1, x_2 + v_2, x_3 + v_3) & \text{per } \alpha = 3, \\ x & \text{per } \alpha > 3. \end{cases} \tag{4.4}$$

In particolare, quindi, si ha convergenza della successione $(\widetilde{y}^h)$ q.o. in Ω per $\alpha \geq 3$.
Per $2 < \alpha < 3$, invece, la stima (4.3) implica che non si ha convergenza delle componenti $\widetilde{y}_k^h$, $k = 2, 3$. D'altra parte, la stessa stima fornisce un controllo preciso del termine di $\widetilde{y}_k^h$ che non è limitato in L^2. Questo permetterà, tramite la scelta di opportune funzioni test, di adattare la dimostrazione del caso $\alpha \geq 3$. A questo scopo, è utile poter sostituire le funzioni v_k^h nella stima (4.3) con funzioni di regolarità $C_b^1(\mathbb{R})$, come mostrato nella seguente proposizione.

Proposizione 4.1.2. *Sia $\alpha > 2$ e sia $y^h \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ una successione soddisfacente le condizioni al bordo $y^h(0, x_2, x_3) = (0, hx_2, hx_3)$ su S e la stima:*

$$\int_\Omega W(\nabla_h y^h)dx \leq Ch^{2\alpha-2}.$$

Allora esistono due successioni ξ_k^h, $k = 2, 3$, tali che

$$\xi_k^h \in C_b^1(\mathbb{R}), \tag{4.5}$$

$$\xi_k^h(0) = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{y_k^h}{h} - \frac{1}{h}\xi_k^h(y_1^h) \longrightarrow x_k \text{ in } L^2(\Omega), \tag{4.7}$$

$$||\xi_k^h||_{L^\infty} + ||(\xi_k^h)'||_{L^\infty} \leq Ch^{\alpha-2}. \tag{4.8}$$

Dimostrazione. Sia (R^h) la successione di rotazioni associata alle deformazioni y^h costruita nel Teorema 2.1.3. Dalle proprietà (2.37) e (2.38) valgono le stime

$$||R_{k1}^h||_{L^\infty} \leq Ch^{\alpha-2} \text{ per } k = 2, 3,$$
$$||R_{11}^h - 1||_{L^\infty} \leq Ch^{2(\alpha-2)}.$$

In particolare, possiamo costruire delle estensioni di R_{k1}^h e di $R_{11}^h - 1$, che indicheremo con r_{k1}^h e r_{11}^h, tali che

$$\text{supp } r_{k1}^h, \text{ supp } r_{11}^h \subset (-1, L+1), \tag{4.9}$$

$$r_{k1}^h = R_{k1}^h \text{ in } (0, L) \text{ per } k = 2, 3, \tag{4.10}$$

$$r_{11}^h = R_{11}^h - 1 \text{ in } (0, L), \tag{4.11}$$

$$||r_{k1}^h||_{L^\infty} \leq Ch^{\alpha-2} \text{ per } k = 2, 3, \tag{4.12}$$

$$||r_{11}^h||_{L^\infty} \leq Ch^{2(\alpha-2)}. \tag{4.13}$$

Per semplificare la notazione introduciamo le funzioni

$$\widetilde{v_k}^h(x_1) = \int_0^{x_1} r_{k1}^h(s)ds, \tag{4.14}$$

$$\widetilde{v_1}^h(x_1) = \int_0^{x_1} r_{11}^h(s)ds. \tag{4.15}$$

Dalle proprietà (4.9), (4.12) e (4.13) entrambe le mappe sono $C^1_b(\mathbb{R})$, inoltre mediante $\widetilde{v_k}^h$ e $\widetilde{v_1}^h$ è possibile ottenere le stime

$$\left|\left|\frac{y^h_k}{h} - x_k - \frac{1}{h}\widetilde{v_k}^h(x_1)\right|\right|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\alpha-2} \tag{4.16}$$

e

$$||y^h_1 - x_1 - \widetilde{v_1}^h(x_1)||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\alpha-1}. \tag{4.17}$$

Come conseguenza immediata della (4.17), dalla definizione (4.15) e dalla (4.13) si ha anche la disuguaglianza

$$||y^h_1 - x_1||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{2(\alpha-2)}. \tag{4.18}$$

Per verificare la (4.16) è sufficiente osservare che, per le condizioni al bordo soddisfatte da y^h, la mappa $\frac{y^h_k}{h} - x_k - \frac{1}{h}\widetilde{v_k}^h$ si annulla in $\{0\} \times S$; dalle proprietà (2.4), (2.35) e (4.10), utilizzando la disuguaglianza di Poincaré si ottiene pertanto

$$\left|\left|\frac{y^h_k}{h} - x_k - \frac{1}{h}\widetilde{v_k}^h\right|\right|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq C\left(\frac{1}{h}\,||\partial_1 y^h_k - R^h_{k1}||_{L^2(\Omega)} + \left|\left|\frac{\partial_k y^h_k}{h} - 1\right|\right|_{L^2(\Omega)} + \left|\left|\frac{\partial_j y^h_k}{h}\right|\right|_{L^2(\Omega)}\right) \leq Ch^{\alpha-2},$$

per $k, j \in \{2, 3\}$, $k \neq j$.

Per quanto riguarda la (4.17), utilizzando nuovamente le condizioni al bordo sulle y^h, dalle proprietà (2.4), (2.35) e (4.11), la disuguaglianza di Poincaré fornisce la stima:

$$||y^h_1 - x_1 - \widetilde{v_1}^h||_{L^2(\Omega)} \leq C(||\partial_1 y^h_1 - R^h_{11}||_{L^2(\Omega)} + ||\partial_2 y^h_1||_{L^2(\Omega)} + ||\partial_3 y^h_1||_{L^2(\Omega)}) \leq Ch^{\alpha-1}.$$

Procediamo ora costruendo le mappe ξ^h_k per $k = 2, 3$ in modo tale da approssimare le funzioni $x_k - \frac{1}{h}\widetilde{v_k}^h(x_1)$ e $x_1 - \widetilde{v_1}^h(x_1)$, così da utilizzare poi la (4.16) e la (4.17) per ottenere le proprietà di convergenza richieste.

Per ogni $\alpha > 2$ fissiamo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\alpha > 2 + \frac{1}{2n_0 + 3}$$

e costruiamo una successione di applicazioni (ζ_n^h), con $n = 1, \ldots, n_0$ definita in modo ricorsivo come:

$$\zeta_{n_0}^h(x_1) = x_1 - \widetilde{v_1}^h(x_1), \tag{4.19}$$
$$\zeta_n^h(x_1) = x_1 - \widetilde{v_1}^h \circ \zeta_{n+1}(x_1) \text{ per } n = 1, \ldots, n_0 - 1.$$

Poniamo

$$\xi_k^h(x_1) := \widetilde{v_k}^h \circ \zeta_1^h(x_1) \text{ per } k = 2, 3 \text{ e per ogni } h > 0. \tag{4.20}$$

Osservando che $\zeta_{n_0}^h(0) = 0$, dalla (4.19) si ha per induzione che $\zeta_n^h(0) = 0$ per $n = 1, 2, \ldots, n_0$. Dunque, dalle definizioni (4.14) e (4.15), le mappe ξ_k^h soddisfano le proprietà (4.5) e (4.6). Dalla (4.12) abbiamo

$$||\xi_k^h||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||\widetilde{v_k}^h||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (L+2)||r_{k1}^h||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq Ch^{\alpha-2}. \tag{4.21}$$

Per ottenere la (4.8) è necessario stimare anche $||(\xi_k^h)'||_{L^\infty}$. A tal scopo procediamo inizialmente ricavando una maggiorazione ricorsiva per $||\zeta_n'||_{L^\infty}$ per $n = 1, \cdots, n_0$. Per h sufficientemente piccolo, si ha

$$||(\widetilde{v}_1^h)'||_{L^\infty} \leq 1.$$

Dalla (4.19) seguono le disuguaglianze

$$||(\zeta_{n_0}^h)'||_{L^\infty} \leq 1 + ||(\widetilde{v_1}^h)'||_{L^\infty} \leq 2, \tag{4.22}$$
$$||(\zeta_n^h)'||_{L^\infty} \leq 1 + ||(\zeta_{n+1}^h)'||_{L^\infty},$$
$$||(\zeta_1^h)'||_{L^\infty} \leq 1 + n_0.$$

A questo punto siamo in grado di valutare $||(\xi_k^h)'||_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Dalla definizione (4.20) e dalle proprietà (4.22) e (4.12), abbiamo infatti

$$||(\xi_k^h)'||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||(\widetilde{v_k}^h)'||_{L^\infty}||\zeta_1'||_{L^\infty} \leq C||r_{k1}^h||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq Ch^{\alpha-2}. \tag{4.23}$$

Combinando la (4.21) e la (4.23) si ottiene che ξ_k^h soddisfa la (4.8) per $k = 2, 3$. Per concludere la dimostrazione della proposizione rimane da verificare la (4.7). Procediamo sfruttando la (4.17) così da ricavare una stima ricorsiva per $||\zeta_n^h(y_1^h) - x_1||_{L^2(\Omega)}$. Dalle definizioni (4.19) e (4.15) e dalle proprietà (4.11) e (4.13), sfruttando le disuguaglianze (4.17) e (4.18) abbiamo

$$\begin{aligned}
&||\zeta_{n_0}^h(y_1^h) - x_1||_{L^2(\Omega)} = ||y_1^h - \widetilde{v_1}^h(y_1^h) - x_1||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq ||y_1^h - \widetilde{v_1}^h(x_1) - x_1||_{L^2(\Omega)} + ||\widetilde{v_1}^h(x_1) - \widetilde{v_1}^h(y_1^h)||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq Ch^{\alpha-1} + ||(\widetilde{v_1}^h)'||_{L^\infty(\mathbb{R})}||y_1^h - x_1||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq Ch^{\alpha-1} + ||r_{11}^h||_{L^\infty(\mathbb{R})}h^{2(\alpha-2)} \leq Ch^{\alpha-1} + Ch^{4(\alpha-2)}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Procedendo analogamente per $\zeta_{n_0-1}^h$ e utilizzando la (4.24) si ottiene

$$\begin{aligned}
&||\zeta_{n_0-1}^h(y_1^h) - x_1||_{L^2(\Omega)} = ||y_1^h - \widetilde{v_1}^h(\zeta_{n_0}^h(y_1^h)) - x_1||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq ||y_1^h - x_1 - \widetilde{v_1}^h(x_1)||_{L^2(\Omega)} + ||\widetilde{v_1}^h(x_1) - \widetilde{v_1}^h(\zeta_{n_0}^h(y_1^h))||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq Ch^{\alpha-1} + ||(\widetilde{v_1}^h)'||_{L^\infty}||\zeta_{n_0}^h(y_1^h) - x_1||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq Ch^{\alpha-1} + Ch^{2(\alpha-2)}(h^{\alpha-1} + h^{4(\alpha-2)}) \\
&\leq Ch^{\alpha-1} + Ch^{6(\alpha-2)},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

dove nell'ultimo passaggio, supponendo $h < 1$, abbiamo maggiorato il termine $h^{2(\alpha-2)}h^{\alpha-1}$ con $Ch^{\alpha-1}$. Dalla (4.25), possiamo formulare l'ipotesi induttiva

$$||\zeta_n^h(y_1^h) - x_1||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\alpha-1} + Ch^{2(n_0-n+2)(\alpha-2)}. \tag{4.26}$$

D'altra parte, se vale la (4.26) si ha la stima seguente per ζ_{n-1}^h:

$$\begin{aligned}
&||\zeta_{n-1}^h(y_1^h) - x_1||_{L^2(\Omega)} \leq ||y_1^h - \widetilde{v_1}^h(\zeta_n^h(y_1^h)) - x_1||_{L^2(\Omega)} \qquad (4.27)\\
&\leq ||y_1^h - x_1 - \widetilde{v_1}^h(x_1)||_{L^2(\Omega)} + ||\widetilde{v_1}^h(x_1) - \widetilde{v_1}^h(\zeta_n^h(y_1^h))||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq Ch^{\alpha-1} + ||(\widetilde{v_1}^h)'||_{L^\infty(\mathbb{R})}||\zeta_n^h(y_1^h) - x_1||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq Ch^{\alpha-1} + h^{2(\alpha-2)}||\zeta_n^h(y_1^h) - x_1||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq Ch^{\alpha-1} + Ch^{2[n_0-(n-1)+2](\alpha-2)},
\end{aligned} \tag{4.28}$$

dove abbiamo nuovamente sfruttato il fatto che $h < 1$ per maggiorare il termine $h^{2(\alpha-2)}h^{\alpha-1}$ con $Ch^{\alpha-1}$. Di conseguenza otteniamo

$$||\zeta_1^h(y_1^h) - x_1||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\alpha-1} + Ch^{2(n_0+1)(\alpha-2)}. \tag{4.29}$$

A questo punto siamo in grado di verificare la (4.7). Dalla definizione (4.20), dalla proprietà (4.12) e dalla stima (4.29) abbiamo infatti

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}||\xi_k^h(y_1^h)-\widetilde{v_k}^h(x_1)||_{L^2(\Omega)} &= \frac{1}{h}||\widetilde{v_k}^h(\zeta_1^h(y_1^h))-\widetilde{v_k}^h(x_1)||_{L^2(\Omega)}\\ &\le \frac{1}{h}||(\widetilde{v_k}^h)'||_{L^\infty(\mathbb{R})}||\zeta_1^h(y_1^h)-x_1||_{L^2(\Omega)}\\ &\le \frac{1}{h}||r_{k1}^h||_{L^\infty}(Ch^{\alpha-1}+Ch^{2(n_0+1)(\alpha-2)})\\ &\le Ch^{\alpha-3}(Ch^{\alpha-1}+Ch^{2(n_0+1)(\alpha-2)})\\ &\le Ch^{\min\{2\alpha-4,(2n_0+3)\alpha-(4n_0+7)\}}.\end{aligned}$$

poiché abbiamo fissato $n_0\in\mathbb{N}$ in modo tale che risultasse $\alpha>2+\frac{1}{2n_0+3}$, segue che

$$\frac{1}{h}||\xi_k^h(y_1^h)-\widetilde{v_k}^h(x_1)||_{L^2(\Omega)}\to 0 \text{ in } L^2(\Omega). \tag{4.30}$$

D'altra parte, si ha

$$\left|\left|\frac{y_k^h}{h}-\frac{1}{h}\xi_h(y_1^h)-x_k\right|\right|_{L^2(\Omega)}\le$$

$$\le\left|\left|\frac{y_k^h}{h}-x_k-\frac{1}{h}\widetilde{v_k}^h(x_1)\right|\right|_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{h}\left|\left|\xi_k^h(y_1^h)-\widetilde{v_k}^h(x_1)\right|\right|_{L^2(\Omega)},$$

pertanto, dalle stime (4.16) e (4.30), segue la (4.7). □

Osservazione 4.1.3. La Proposizione 4.1.2 può essere interpretata anche come la costruzione di una 'inversa approssimata' delle deformazioni y^h, ovvero di una mappa ω^h tale che $\omega^h\circ y^h$ tenda alla deformazione identità per $h\to 0$, dove

$$\omega^h(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1,\frac{x_2}{h}-\frac{\xi_2^h(x_1)}{h},\frac{x_3}{h}-\frac{\xi_3^h(x_1)}{h}\right).$$

Osserviamo che per $\alpha\ge 3$ è possibile semplificare la costruzione di ω^h. Per $\alpha>3$, dall'Osservazione 4.1.2, si può infatti scegliere

$$\omega^h(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1,\frac{x_2}{h},\frac{x_3}{h}\right),$$

mentre per $\alpha=3$, dalla dimostrazione della Proposizione 4.1.2, si può considerare

$$\omega^h(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1,\frac{x_2}{h}-\frac{\widetilde{v_2}^h(x_1)}{h},\frac{x_3}{h}-\frac{\widetilde{v_3}^h(x_1)}{h}\right).$$

4.2 Dimostrazione del Teorema 4.1.1

Questa sezione è interamente dedicata alla dimostrazione del risultato principale del capitolo (Teorema 4.1.1). Anche in questo caso, la stima dell'energia (4.1) e il teorema di rigidità (Teorema 2.1.1) garantiscono la compattezza (via Teorema 2.2.1) e la decomposizione dei gradienti di deformazione nel prodotto di una rotazione e di un termine di strain linearizzato G^h. Nell'introduzione del tensore di stress linearizzato E^h associato allo strain G^h si hanno tuttavia differenti proprietà di simmetria e di convergenza, come già sottolineato nell'Osservazione 4.1.1. Come nella dimostrazione del Teorema 3.1.1 si esprimono le equazioni di Eulero-Lagrange dei funzionali J^h in termini degli stress E^h e si studiano i momenti di ordine zero e uno delle equazioni scritte in termini delle nuove variabili. Come messo in evidenza nell'Osservazione 4.1.2, dal momento che le funzioni test considerate sono valutate sull'immagine di Ω mediante le deformazioni y^h, è necessario diversificare il procedimento nei casi $\alpha \geq 3$ e $2 < \alpha < 3$.
Più dettagliatamente, in ciascun passo della dimostrazione si studia inizialmente il caso $\alpha \geq 3$, cercando poi, per $2 < \alpha < 3$, di modificare le funzioni test mediante l'uso delle mappe ξ_k^h introdotte nella Proposizione 4.1.2.

Dimostrazione del Teorema 4.1.1. La convergenza delle successioni (y^h), (u^h), (v_2^h), (v_3^h), (w^h) segue dal Teorema 2.2.1, insieme al fatto che $(u, v_2, v_3, w) \in \mathcal{A}_\alpha$. Resta da dimostrare che (u, v_2, v_3, w) è punto stazionario del funzionale I_α.
Per maggiore chiarezza, anche in questo caso suddividiamo la dimostrazione in 7 passi.
Primo passo.
(*Decomposizione del gradiente di deformazione in rotazione e tensore di deformazione*)
Questa prima parte della dimostrazione è esattamente analoga al primo passo

del Teorema 3.1.1, pertanto ne riportiamo solo brevemente i punti principali. Dal Teorema 2.1.3 sappiamo che esiste $(R^h) \subset C^\infty((0,L), \mathcal{M}^{3\times 3})$ tale che

(a) $R^h(x_1) \in SO(3)\ \forall x_1 \in (0,L)$,

(b) $||\nabla_h y^h - R^h||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\alpha-1}$,

(c) $||(R^h)'||_{L^2(0,L)} \leq Ch^{\alpha-2}$,

(d) $||R^h - Id||_{L^\infty(0,L)} \leq Ch^{\alpha-2}$.

Definiamo il tensore di deformazione (strain) G^h come

$$\nabla_h y^h = R^h(Id + h^{\alpha-1}G^h).$$

Abbiamo che le funzioni G^h sono limitate in L^2 per la (b), dunque esiste G tale che $G^h \rightharpoonup G$ in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times 3})$. Inoltre è possibile caratterizzare la parte simmetrica di G, mediante il Lemma 3.2.1.

Secondo passo.

(*Stima del tensore di sforzo*)

Introduciamo lo stress $E^h : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}^{3\times 3}$, definito come:

$$E^h(x) = \frac{1}{h^{\alpha-1}} DW(Id + h^{\alpha-1}G^h)(Id + h^{\alpha-1}G^h)^T. \qquad (4.31)$$

Per l'ipotesi di frame-indifference della funzione W, abbiamo che dall'Osservazione 1.1.4 vale l'uguaglianza

$$DW(F)F^T = F(DW(F))^T \text{ per ogni } F \in \mathcal{M}^{3\times 3}_+.$$

Dunque E^h è simmetrico per ogni $h > 0$. Inoltre vale la stima puntuale:

$$|E^h| \leq C\left(\frac{W(Id + h^{\alpha-1}G^h)}{h^{\alpha-1}} + |G^h|\right). \qquad (4.32)$$

Infatti, sia δ l'ampiezza dell'intorno di $SO(3)$ in cui W è di classe C^2 e supponiamo inizialmente che valga $h^{\alpha-1}|G^h| \leq \frac{\delta}{2}$. Allora con uno sviluppo di Taylor al primo ordine otteniamo:

$$DW(Id + h^{\alpha-1}G^h) = DW(Id) + h^{\alpha-1}D^2W(M^h)G^h,$$

con $M^h \in \mathcal{M}^{3\times3}$ soddisfacente $|M^h - Id| \leq \frac{\delta}{2}$. Osservando che D^2W è limitata nell' insieme $\{F \in \mathcal{M}^{3\times3} : dist(F, SO(3)) \leq \frac{\delta}{2}\}$, dalle ipotesi (H2) e (H3) si ottiene:

$$|DW(Id + h^{\alpha-1}G^h)| \leq Ch^{\alpha-1}|G^h|,$$

di conseguenza, dalla (4.31), segue che:

$$|E^h| \leq C|G^h| + Ch^{\alpha-1}|G^h|^2 \leq C(1+\delta)|G^h|.$$

Consideriamo invece il caso in cui $h^{\alpha-1}|G^h| > \frac{\delta}{2}$. In questo caso possiamo utilizzare l'ipotesi di crescita (H7). Per applicare tale stima, tuttavia, è necessario che la matrice $Id + h^{\alpha-1}G^h$ abbia determinante positivo. A tale scopo, osserviamo che l'ipotesi di considerare deformazioni a energia finita, tali cioè che valga

$$\int_\Omega W(\nabla_h y^h)dx \leq Ch^{2\alpha-2},$$

garantisce che $W(\nabla_h y^h)$ sia finita q.o. in Ω, dunque per la (H6) e per l'ipotesi di frame-indifference si ottiene

$$\det(\nabla_h y^h) = \det(Id + h^{\alpha-1}G^h) > 0 \text{ q.o. in } \Omega.$$

Di conseguenza possiamo applicare la disuguaglianza (H7), ottenendo la stima

$$|E^h| \leq \frac{1}{h^{\alpha-1}}k(W(Id + h^{\alpha-1}G^h) + 1) \leq k\frac{W(Id + h^{\alpha-1}G^h)}{h^{\alpha-1}} + \frac{2k}{\delta}|G^h|.$$

Pertanto abbiamo provato la (4.32).

Terzo passo.

(*Proprietà di convergenza dello stress*)

Dalla stima (4.32) possiamo dedurre alcune proprietà di convergenza per la successione (E^h). Procedendo come in [M-S], osserviamo che l'ipotesi di frame-indifference della funzione W permette di ottenere l'uguaglianza:

$$DW(\nabla_h y^h)(\nabla_h y^h)^T = DW(R^h(Id + h^{\alpha-1}G^h))(R^h(Id + h^{\alpha-1}G^h))^T =$$

$$R^h DW(Id + h^{\alpha-1}G^h)(Id + h^{\alpha-1}G^h)^T(R^h)^T = h^{\alpha-1}R^h E^h (R^h)^T.$$

Di conseguenza, l'equazione di Eulero-Lagrange per i funzionali J^h si può riscrivere come

$$\int_\Omega R^h E^h (R^h)^T : \nabla\phi(y^h) dx = h \int_\Omega [f_2 \phi_2(y^h) + f_3 \phi\iota_3(y^h)] dx, \tag{4.33}$$

per ogni $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ soddisfacente la condizione al bordo $\phi(0, hx_2, hx_3) = 0$ per ogni $(x_2, x_3) \in S$. Studiamo ora le proprietà di convergenza della successione (E^h). Dalla (4.32) si ottiene che, per ogni insieme misurabile Λ vale la stima:

$$\int_\Lambda |E^h| dx \leq C \int_\Lambda \frac{W(Id + h^{\alpha-1} G^h)}{h^{\alpha-1}} dx + C \int_\Lambda |G^h| dx. \tag{4.34}$$

D'altra parte, sfruttando il fatto che (y^h) è una successione di deformazioni a energia finita e che le G^h sono uniformemente limitate in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3})$, la (4.34) si può ulteriormente maggiorare, ottenendo:

$$\int_\Lambda |E^h| dx \leq C h^{\alpha-1} + C |\Lambda|^{\frac{1}{2}}. \tag{4.35}$$

Dalla (4.35) abbiamo che le E^h sono equi-integrabili e equi-limitate in $L^1(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3})$, di conseguenza, per il teorema di Dunford-Pettis, esiste $E \in L^1(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3})$ tale che

$$E^h \rightharpoonup E \text{ in } L^1(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3}). \tag{4.36}$$

Inoltre, essendo E^h simmetrico per ogni $h > 0$, segue che anche E è simmetrico. Osserviamo che, come nel Teorema 3.1.1, vorremmo passare al limite nella (4.33) così da ottenere le equazioni di Eulero-Lagrange del Γ-limite. Tuttavia, la convergenza debole in L^1 della successione E^h non è sufficiente perché, a priori, non possiamo garantire che $(\nabla\phi(y^h))$ converga in $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3})$. Questo problema può essere aggirato osservando che gli stress E^h godono di una proprietà di convergenza più forte. Più precisamente, si può individuare una successione di insiemi che tendono a riempire Ω e su cui E^h, a meno di sottosuccessioni, converge debolmente in L^2. In tal modo, a meno di passare a sottosuccessioni, avremo che $E^h \overset{L^2}{\rightharpoonup} E$ su tali insiemi e, grazie alla stima (4.35), $E^h \overset{L^1}{\to} 0$ sui loro complementari. Definiamo dunque gli insiemi

$$B_h := \{x \in \Omega \text{ tali che } h^{\alpha-1-\gamma}|G^h(x)| \leq 1\}, \tag{4.37}$$

con $\gamma \in (0, \alpha-2)$; siano inoltre χ_h le loro funzioni caratteristiche. Osserviamo che vale

$$|\Omega \setminus B_h| \leq \int_{\Omega \setminus B_h} h^{\alpha-1-\gamma}|G^h|dx \leq Ch^{\alpha-1-\gamma}|\Omega \setminus B_h|^{\frac{1}{2}}||G^h||_{L^2(\Omega,\mathcal{M}^{3\times3})}.$$

Di conseguenza, dall'uniforme limitatezza delle (G^h) in L^2, si ottiene

$$|\Omega \setminus B_h| \leq Ch^{2(\alpha-1-\gamma)}.$$

Pertanto $\chi_h \to 1$ in misura e dunque

$$\chi_h G^h \rightharpoonup G \text{ in } L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3}). \tag{4.38}$$

Ricordando la (4.35) si ottiene la stima

$$\int_{\Omega \setminus B_h} |E^h|dx \leq Ch^{\alpha-1-\gamma}, \tag{4.39}$$

dunque

$$(1 - \chi_h)E^h \to 0 \text{ fortemente in } L^1(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3}). \tag{4.40}$$

Procediamo ora stimando E^h sugli insiemi B_h e provando che vale

$$\chi_h E^h \rightharpoonup \mathcal{L}G \text{ in } L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times3}). \tag{4.41}$$

Abbiamo infatti che, effettuando uno sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine, otteniamo

$$DW(Id + h^{\alpha-1}G^h) = h^{\alpha-1}\mathcal{L}G^h + \eta(h^{\alpha-1}G^h),$$

dove $\frac{\eta(F)}{|F|} \to 0$ per $|F| \to 0$. Di conseguenza possiamo decomporre $\chi_h E_h$ come

$$\chi_h E^h = \frac{\chi_h(h^{\alpha-1}\mathcal{L}G^h + \eta(h^{\alpha-1}G^h))(Id + h^{\alpha-1}G^h)^T}{h^{\alpha-1}}.$$

Scomponiamo ulteriormente la seconda quantità della precedente uguaglianza nella somma dei termini:

(i) $\chi_h \mathcal{L} G^h$,

(ii) $\chi_h h^{\alpha-1} \mathcal{L} G^h (G^h)^T$,

(iii) $\chi_h \frac{\eta(h^{\alpha-1}G^h)}{h^{\alpha-1}}$,

(iv) $\chi_h \eta(h^{\alpha-1}G^h)(G^h)^T$.

Dalla (4.38) e dalla linearità di $\mathcal{L}$ abbiamo che il primo termine converge a $\mathcal{L}G$ debolmente in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times 3})$.
Per quanto riguarda il secondo termine si ha:

$$|\chi_h h^{\alpha-1} \mathcal{L} G^h (G^h)^T| \leq C \chi_h h^{\alpha-1} |G^h|^2 \leq C h^\gamma |G^h|,$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che $h^{\alpha-1-\gamma}|G^h| \leq 1$ su B_h.
Per l'uniforme limitatezza della successione (G^h) in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times 3})$, si ha dunque

$$\chi_h h^{\alpha-1} \mathcal{L} G^h (G^h)^T \to 0 \text{ in } L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times 3}).$$

Per stimare il terzo termine, definiamo

$$\omega(t) := \sup \left\{ \frac{|\eta(F)|}{|F|} \text{ tali che } |F| \leq t \right\} \text{ per ogni } t > 0.$$

È chiaro che $\omega(t) \to 0$ per $t \to 0^+$. Avremo

$$\left| \chi_h \frac{\eta(h^{\alpha-1}G^h)}{h^{\alpha-1}} \right| \leq \omega(h^\gamma)|G^h|$$

e dunque il terzo termine tende a zero in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times 3})$.
Per quanto riguarda l'ultimo termine, abbiamo infine

$$|\chi_h \eta(h^{\alpha-1}G^h)(G^h)^T| \leq h^{\alpha-1} \chi_h \omega(h^\gamma)|G^h|^2 \leq \omega(h^\gamma) h^\gamma |G^h|$$

dunque $\chi_h \eta(h^{\alpha-1}G^h)(G^h)^T \to 0$ in $L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times 3})$.
Combinando i risultati ottenuti per i quattro termini si ha dunque la (4.41), inoltre dalla (4.36) e dalla (4.40) segue che $E = \mathcal{L}G \in L^2(\Omega, \mathcal{M}^{3\times 3})$.

Quarto passo.

(*Conseguenze dell'equazione di Eulero-Lagrange*)

A partire da questo passo, si cominciano ad introdurre funzioni test compatibili con la Definizione 1.2 così da studiare le proprietà dell'equazione di Eulero-Lagrange (4.33). Di conseguenza, per quanto messo in evidenza nell'Osservazione 4.1.2, diventa necessario diversificare il procedimento per i casi $\alpha \geq 3$ e $2 < \alpha < 3$.
Consideriamo inizialmente il caso $\alpha \geq 3$ e procediamo cercando di studiare le proprietà dello stress limite E.
Sia $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, soddisfacente $\phi(0, x_2, x_3) = 0$ per $(x_2, x_3) \in S$.
Definiamo $\phi^h(x) := h\phi(x_1, \frac{x_2}{h}, \frac{x_3}{h})$. Abbiamo che ϕ^h può essere scelta come funzione test nella (4.33) perché $\phi^h \in C_b^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e $\phi^h(0, hx_2, hx_3) = h\phi(0, x_2, x_3) = 0$ per ogni $(x_2, x_3) \in S$. Ricordando la definizione (4.2) di $\widetilde{y}^h$, sostituendo ϕ^h nell'equazione di Eulero-Lagrange otteniamo:

$$\int_\Omega [R^h E^h (R^h)^T : (h\partial_1\phi(\widetilde{y}^h)|\partial_2\phi(\widetilde{y}^h)|\partial_3\phi(\widetilde{y}^h)) - h^2(f_2\phi_2(\widetilde{y}^h) + f_3\phi_3(\widetilde{y}^h))]dx = 0.$$

A questo punto possiamo sfruttare la limitatezza di ϕ e delle sue derivate prime per passare al limite nell'equazione precedente, così da avere:

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega \{R^h E^h (R^h)^T : [0|\partial_2\phi(\widetilde{y}^h)|\partial_3\phi(\widetilde{y}^h)]\}dx = 0. \tag{4.42}$$

Per continuità di $\partial_k\phi$ per $k = 2, 3$ e per convergenza dominata, dalla (4.4) si ottiene

$$\partial_k\phi(\widetilde{y}^h) \xrightarrow{L^2} \begin{cases} \partial_k\phi(x_1, x_2 + v_2, x_3 + v_3) & \text{per } \alpha = 3 \\ \partial_k\phi(x_1, x_2, x_3) & \text{per } \alpha > 3. \end{cases} \tag{4.43}$$

Torniamo alla (4.42) e cerchiamo di sfruttare la (4.43) per fornire una caratterizzazione di tale limite. Procediamo innanzitutto suddividendo l'insieme Ω nell' unione di B_h e di $\Omega \setminus B_h$, così da utilizzare le proprietà di convergenza di E^h ottenute nel terzo passo. Otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega R^h E^h (R^h)^T : [0|\partial_2\phi(\widetilde{y}^h)|\partial_3\phi(\widetilde{y}^h)]dx \\
&= \int_\Omega \chi_h R^h E^h (R^h)^T : [0|\partial_2\phi(\widetilde{y}^h)|\partial_3\phi(\widetilde{y}^h)]dx \\
&+ \int_\Omega (1 - \chi_h) R^h E^h (R^h)^T : [0|\partial_2\phi(\widetilde{y}^h)|\partial_3\phi(\widetilde{y}^h)]dx.
\end{aligned}$$

Indichiamo con (A) e con (B), rispettivamente, i due termini della somma precedente. Per quanto riguarda il primo addendo, dalla (4.41) e dal fatto che $R^h \to Id$ in $L^\infty(0,L)$, si ottiene

$$(\mathrm{A}) \to \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=2}^{3} \int_\Omega Ee_k \cdot \partial_k \phi(x_1, x_2 + v_2, x_3 + v_3)dx & \text{per } \alpha = 3, \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{3} \int_\Omega Ee_k \cdot \partial_k \phi(x_1, x_2, x_3)dx & \text{per } \alpha > 3. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il secondo addendo, ricordando che $(1 - \chi_h)E^h \to 0$ in L^1 dalla (4.40), si avrà:

$$(\mathrm{B}) \to 0.$$

Di conseguenza dalla (4.42) si conclude che valgono le equazioni:

$$\sum_{k=2}^{3} \int_\Omega Ee_k \cdot \partial_k \phi(x_1, x_2 + v_2, x_3 + v_3)dx = 0 \text{ per } \alpha = 3, \tag{4.44}$$

$$\sum_{k=2}^{3} \int_\Omega Ee_k \cdot \partial_k \phi dx = 0 \text{ per } \alpha > 3, \tag{4.45}$$

per ogni $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ con $\phi(0, x_2, x_3) = 0$ per $(x_2, x_3) \in S$.
D'altra parte, per il caso $\alpha = 3$, è possibile costruire due successioni $(\omega_k^l)_l \subset C_b^1(\mathbb{R})$, $k = 2, 3$, tali che

$$\omega_k^l|_{(0,L)} \to v_k \text{ in } L^2(0,L) \text{ e } \omega_k^l(0) = 0.$$

Sia $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ con $\phi(0, x_2, x_3) = 0$ su S e consideriamo le mappe

$$\phi^l(x) = \phi(x_1, x_2 - \omega_2^l(x_1), x_3 - \omega_3^l(x_1)) \text{ per ogni } l \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo $\phi^l(x) \in C_b^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e $\phi^l(0, x_2, x_3) = \phi(0, x_2, x_3) = 0$ su S. Dunque possiamo scegliere ϕ^l come funzione test nella (4.45) e passando al limite per $l \to \infty$ otteniamo:

$$\int_\Omega Ee_2 \cdot \partial_2 \phi + Ee_3 \cdot \partial_3 \phi dx = 0, \tag{4.46}$$

per ogni $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ con $\phi(0, x_2, x_3) = 0$ su S, per ogni $\alpha \geq 3$.
Di conseguenza, procedendo in modo analogo a quanto fatto nel secondo passo del capitolo 3 e scegliendo $\psi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1)\widetilde{\psi}(x_2, x_3)$, con $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = 0$ e $\widetilde{\psi} \in C_b^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, si ottiene:

$$\int_0^L \varphi \left(\int_S Ee_2 \cdot \partial_2 \widetilde{\psi} + Ee_3 \cdot \partial_3 \widetilde{\psi} dx_2 dx_3 \right) dx_1 = 0,$$

per ogni $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = 0$ e per ogni $\widetilde{\psi} \in C_b^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. In particolare, quindi, dal momento che ogni funzione $C^\infty([0, L])$ si può estendere ad una mappa $C_b^\infty(\mathbb{R})$, si ha:

$$\int_S Ee_2 \cdot \partial_2 \widetilde{\psi} + Ee_3 \cdot \partial_3 \widetilde{\psi} dx_2 dx_3 = 0 \text{ q.o. in } (0, L),$$

per ogni $\widetilde{\psi} \in C_b^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$; dunque valgono la (3.9) e la (3.10).
Consideriamo ora il caso $2 < \alpha < 3$.
Non possiamo utilizzare lo stesso procedimento del caso $\alpha \geq 3$ perché, per quanto messo in evidenza nell'Osservazione 4.1.2, per $2 < \alpha < 3$ la stima (4.3) non garantisce la convergenza delle successioni $\widetilde{y}_k^h$ a x_k per $k = 2, 3$ e la differenza $||\widetilde{y}_k^h - x_k||_{L^2}$ non è finita per h tendente a 0. Procediamo dunque modificando la funzione test utilizzata per $\alpha \geq 3$ mediante le mappe ξ_k^h introdotte nella Proposizione 4.1.2, così da sfruttare la (4.7).
Sia ancora $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ con $\phi(0, x_2, x_3) = 0$ per ogni $(x_2, x_3) \in S$. Per ogni $h > 0$ definiamo

$$\phi^h(x) := h\phi \left(x_1, \frac{x_2}{h} - \frac{1}{h}\xi_2^h(x_1), \frac{x_3}{h} - \frac{1}{h}\xi_3^h(x_1) \right).$$

Dalla (4.5), segue che $\phi^h \in C_b^1(\mathbb{R})$ per ogni $h > 0$. Inoltre per la (4.6) si ha

$$\phi^h(0, hx_2, hx_3) = h\phi(0, x_2, x_3) = 0 \text{ su } S,$$

dunque possiamo utilizzare le mappe ϕ^h come funzioni test nella (4.33).
Per semplificare la notazione, poniamo

$$\iota(y^h) := \left(y_1^h, \frac{y_2^h}{h} - \frac{1}{h}\xi_2^h(y_1^h), \frac{y_3^h}{h} - \frac{1}{h}\xi_3^h(y_1^h) \right)$$

e osserviamo che, dalla proprietà (4.7), si ha

$$\iota(y^h) \to x \text{ in } L^2. \tag{4.47}$$

Dal momento che

$$\nabla\phi^h(y^h) = \left(h\partial_1\phi(\iota(y^h)) - \sum_{k=2}^{3} \partial_k\phi(\iota(y^h))(\xi_k^h)'(y_1^h) \middle| \partial_2\phi(\iota(y_1^h)) \middle| \partial_3\phi(\iota(y_1^h)) \right),$$

sostituendo ϕ^h nell'equazione di Eulero-Lagrange (4.33) si ottiene:

$$\int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)e_1 \cdot \left[h\partial_1\phi(\iota(y^h)) - \sum_{k=2}^{3} \partial_k\phi(\iota(y^h))(\xi_k^h)'(y_1^h) \right] dx \tag{4.48}$$

$$+ \int_\Omega \left[\sum_{k=2}^{3} (R^h E^h (R^h)^T)e_k \cdot \partial_k\phi(\iota(y^h)) + h^2(f_2\phi_2(\iota(y^h)) + f_3\phi_3(\iota(y^h))) \right] dx = 0.$$

Scriviamo il primo membro della (4.48) come somma di tre termini:

(A)= $\int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)e_1 \cdot [h\partial_1\phi(\iota(y^h)) - \sum_{k=2}^{3} \partial_k\phi(\iota(y^h))(\xi_k^h)'(y_1^h)]dx$,

(B)= $\int_\Omega \sum_{k=2}^{3} (R^h E^h (R^h)^T)e_k \cdot \partial_k\phi(\iota(y^h))dx$,

(C)= $\int_\Omega h^2(f_2\phi_2(\iota(y^h)) + f_3\phi_3(\iota(y^h)))]dx$.

Per quanto riguarda il termine (A), osserviamo che dalla proprietà (4.8) e dalla limitatezza di E^h in L^1, si ha la stima

$$|(\mathrm{A})| \leq C||E^h||_{L^1(\Omega)}(||h\partial_1\phi||_{L^\infty} + \sum_{k=2}^{3} ||\partial_k\phi||_{L^\infty}||(\xi_k^h)'||_{L^\infty} \leq C(h + h^{\alpha-2}) \tag{4.49}$$

e dunque (A) $\to 0$. Analogamente, essendo $f_k \in L^2(0,L)$ per $k = 2,3$ e $\phi_k \in C_b^1(\mathbb{R})$, anche il termine (C) è infinitesimo. Di conseguenza, dalla (4.48), abbiamo che (B) $\to 0$. D'altra parte, dalla (4.47) e dalla limitatezza del gradiente di ϕ, per convergenza dominata si ha

$$\partial_k\phi(\iota(y^h)) \to \partial_k\phi(x) \text{ in } L^2(\Omega).$$

Procedendo come nel caso $\alpha \geq 3$ e considerando Ω come unione degli insiemi B_h e $\Omega \setminus B_h$, si ottiene anche in questo caso la (4.45). In particolare, quindi, per ogni $\alpha > 2$, è possibile ragionare come nel passo 4 del terzo capitolo; posto

$$\overline{E} = \int_\Omega E(x)dx,$$

abbiamo dunque $\overline{E}e_2 = \overline{E}e_3 = 0$ q.o. in $(0, L)$ e dunque, per simmetria di E,

$$\overline{E} = \overline{E}_{11}e_1 \otimes e_1.$$

Inoltre sono soddisfatte le equazioni (3.9).

Quinto passo.

(*Momento di ordine 0 dell' equazione di Eulero-Lagrange*)

A questo punto, siamo in grado di caratterizzare il momento di ordine zero dello stress limite E. Sia $\psi \in C_b^1(\mathbb{R})$ con $\psi(0) = 0$.

Poniamo

$$\phi(x) = \psi(x_1)e_1.$$

È chiaro che possiamo utilizzare ϕ come funzione test nelle equazioni di Eulero-Lagrange, ottenendo:

$$\int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)_{11}\psi'(y_1^h)dx = 0. \tag{4.50}$$

Per passare al limite nell'equazione precedente procediamo come nel passo 4, scrivendo Ω come unione degli insiemi B_h e $\Omega \setminus B_h$. In questo modo, si ha:

$$\int_\Omega \chi_h (R^h E^h (R^h)^T)_{11}\psi'(y_1^h)dx + \int_\Omega (1-\chi_h)(R^h E^h (R^h)^T)_{11}\psi'(y_1^h)dx = 0. \tag{4.51}$$

poiché $y_1^h(x) \to x_1$ q.o. e ψ' è continua, segue che

$$\psi'(y_1^h(x)) \to \psi'(x_1) \text{ in } L^2(\Omega), \tag{4.52}$$

dunque, dalle proprietà (4.40) e (4.41) di convergenza di E^h, passando al limite nella (4.51), si ha

$$\int_0^L \overline{E}_{11}\psi' dx_1 = \int_\Omega E_{11}\psi' dx = 0, \tag{4.53}$$

per ogni $\psi \in C_b^1(\mathbb{R})$ con $\psi(0) = 0$; quindi $\overline{E}_{11} = 0$ q.o. in $(0, L)$ per ogni $\alpha > 2$.
D'altra parte, ragionando come nel capitolo precedente, si ha:

$$\overline{E}_{11} = \begin{cases} \mathbb{E}(u' + \frac{1}{2}[(v_2')^2 + (v_3')^2])^2 & \text{per } \alpha = 3, \\ \mathbb{E}(u')^2 & \text{per } \alpha > 3, \\ \mathbb{E}g & \text{per } 2 < \alpha < 3, \end{cases}$$

con $g \in L^2(0, L)$. Concludiamo, quindi, che per $\alpha = 3$ e per $\alpha > 3$ valgono, rispettivamente, (1.35) e (1.44), ovvero abbiamo la prima delle tre equazioni soddisfatte dai punti stazionari del Γ-limite per $\alpha \geq 3$. Per $2 < \alpha < 3$ deduciamo che $g = 0$ q.o. in $(0, L)$.
Segue poi la seguente caratterizzazione di E:

$$E = \mathcal{L}\left(A' \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Big| \partial_2 \widetilde{\beta} \Big| \partial_3 \widetilde{\beta} \right).$$

dove per q.o. $x_1 \in (0, L)$ si ha che $\widetilde{\beta}(x_1, \cdot, \cdot) \in \mathcal{B}$. Inoltre, poiché E soddisfa l'equazione (4.46), per il Lemma 1.4.1 si ha che $\widetilde{\beta}$ è punto di minimo del funzionale

$$\mathcal{G}_{A'}(\beta) = \int_S Q_3 \left(A' \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} |\partial_2 \beta \,|\partial_3 \beta \right) dx_2 dx_3.$$

In altre parole, $\widetilde{\beta}$ soddisfa

$$Q_1(A') = \int_S Q_3 \left(A' \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Big| \partial_2 \widetilde{\beta} \Big| \partial_3 \widetilde{\beta} \right) dx_2 dx_3,$$

per ogni $\alpha > 2$.

Sesto passo.

(*Momenti di ordine 1 dell'equazione di Eulero-Lagrange*)
Procediamo cercando di ricavare le equazioni di Eulero-Lagrange (1.36) e (1.37) per il Γ-limite. Siano $\varphi_2, \varphi_3 \in C_b^1(\mathbb{R})$ con $\varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0$. Poniamo

$$\phi^h(x) = \left(0, \frac{\varphi_2(x_1)}{h}, \frac{\varphi_3(x_1)}{h}\right).$$

Abbiamo che $\phi^h \in C_b^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e $\phi^h(0, hx_2, hx_3) = 0$ su S, dunque possiamo utilizzare ϕ^h come funzione test nella (4.33). Osserviamo che, per quanto riguarda il termine dovuto alle forze di carico, abbiamo:

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega h(f_2\phi_2^h(y^h) + f_3\phi_3^h(y^h))dx = \lim_{h\to 0} \int_\Omega (f_2\varphi_2(y_1^h) + f_3\varphi_3(y_1^h))dx =$$

$$= \int_0^L (f_2\varphi_2 + f_3\varphi_3)dx_1.$$

Di conseguenza si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega \left[(R^h E^h (R^h)^T)_{21} \frac{\varphi_2'(y_1^h)}{h} + (R^h E^h (R^h)^T)_{31} \frac{\varphi_3'(y_1^h)}{h} \right] dx = \tag{4.54}$$

$$= \int_0^L [f_2\varphi_2 + f_3\varphi_3]dx_1.$$

Procediamo cercando una caratterizzazione del limite nella (4.54) in termine dei momenti di ordine uno, così da ottenere l'equazione di Eulero-Lagrange del Γ-limite relativa alle funzioni v_k. A tale scopo, torniamo alla (4.33) e procediamo costruendo una funzione test opportuna. Sia (ω_h) una successione di numeri positivi tale che

$$(1)\ h\omega_h \to +\infty, \tag{4.55}$$

$$(2)\ h^{\alpha-1-\gamma}\omega_h \to 0, \tag{4.56}$$

dove $\gamma \in (0, \alpha - 2)$ è lo stesso esponente introdotto nella definizione (4.37) degli insiemi B_h. Per ogni $h > 0$ consideriamo una funzione $\theta^h \in C_b^1(\mathbb{R})$ che coincida con l'identità in un intorno sufficientemente grande dell'origine, ovvero:

$$\theta^h(t) = t \text{ per } |t| \leq \omega_h. \tag{4.57}$$

Supponiamo inoltre che θ^h abbia le seguenti proprietà:

$$|\theta^h(t)| \leq |t|\ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.58}$$

$$||\theta^h||_{L^\infty} \leq 2\omega_h, \tag{4.59}$$

$$\left|\left|\frac{d\theta^h}{dt}\right|\right|_{L^\infty} \leq 2. \tag{4.60}$$

Sia $\eta \in C_b^1(\mathbb{R})$ con $\eta(0) = 0$ e poniamo:

$$\phi^h(x) = \theta^h\left(\frac{x_3}{h}\right)\eta(x_1)e_1. \tag{4.61}$$

Abbiamo che ϕ^h è una funzione test ammissibile per ogni $h > 0$ e che

$$\nabla\phi^h = \left(\theta^h\left(\frac{x_3}{h}\right)\eta'(x_1)\right)e_1 \otimes e_1 + \left(\frac{d\theta^h}{dt}\left(\frac{x_3}{h}\right)\frac{\eta(x_1)}{h}\right)e_1 \otimes e_3.$$

Di conseguenza, sostituendo tale espressione nella (4.33), otteniamo:

$$\int_\Omega \left[(R^h E^h (R^h)^T)_{11}\theta^h\left(\frac{y_3^h}{h}\right)\eta'(y_1^h) + \frac{(R^h E^h (R^h)^T)_{13}}{h}\frac{d\theta^h}{dt}\left(\frac{y_3^h}{h}\right)\eta(y_1^h)\right]dx = 0. \tag{4.62}$$

Poniamo

$$(\mathrm{A}) = \int_\Omega \left[(R^h E^h (R^h)^T)_{11}\theta^h\left(\frac{y_3^h}{h}\right)\eta'(y_1^h)\right]dx,$$
$$(\mathrm{B}) = \int_\Omega \left[\frac{(R^h E^h (R^h)^T)_{13}}{h}\frac{d\theta^h}{dt}\left(\frac{y_3^h}{h}\right)\eta(y_1^h)\right]dx$$

e studiamo separatamente i due termini.

Per quanto riguarda (A), procediamo scomponendolo ulteriormente nella somma

$$(\mathrm{A}) = \int_\Omega \chi_h\left[(R^h E^h (R^h)^T)_{11}\theta^h\left(\frac{y_3^h}{h}\right)\eta'(y_1^h)\right]dx +$$
$$\int_\Omega (1-\chi_h)\left[(R^h E^h (R^h)^T)_{11}\theta^h\left(\frac{y_3^h}{h}\right)\eta'(y_1^h)\right]dx.$$

Consideriamo prima il caso $\alpha = 3$. Dal momento che

$$\frac{y_3^h}{h} \to x_3 + v_3 \text{ in } L^2(\Omega),$$

essendo η' limitata e poiché le funzioni $\left|\frac{y_3^h}{h}\right|$ sono uniformemente limitate da una funzione in $L^2(\Omega)$, dalla (4.58) per convergenza dominata si ottiene:

$$\theta^h\left(\frac{y_3^h}{h}\right)\eta'(y_1^h) \to (x_3 + v_3(x_1))\eta'(x_1) \text{ in } L^2(\Omega).$$

Di conseguenza, denotando con $\widehat{E} = \int_S x_3 E dx_2 dx_3$, avremo

$$\lim_{h\to 0}\int_\Omega \chi_h (R^h E^h (R^h)^T)_{11}\eta'(y_1^h)\theta^h\left(\frac{y_3^h}{h}\right)dx = \int_\Omega E_{11}\eta'(x_3 + v_3)dx$$

$$= \int_0^L \widehat{E}_{11}\eta' dx_1$$

perché $\overline{E}_{11} = 0$ dalla (4.52).

Per quanto riguarda il secondo addendo, dalla (4.39) otteniamo invece la stima

$$\int_\Omega (1-\chi_h)\left|(R^h E^h (R^h)^T)_{11}\eta'(y_1^h)\theta^h\left(\frac{y_3^h}{h}\right)\right| dx \leq$$

$$\leq 2\omega_h ||\eta'||_{L^\infty(0,L)} \int_{\Omega\setminus B_h} |E^h| \leq C h^{\alpha-1-\gamma}\omega_h$$

e quest'ultima quantità è infinitesima per la (4.56). Pertanto per $\alpha = 3$ avremo:

$$(\mathrm{A}) \to \int_0^L \widehat{E}_{11}\eta' dx_1. \tag{4.63}$$

Procedendo esattamente nello stesso modo per $\alpha > 3$, con l'unica differenza che in questo caso

$$\frac{y_3^h}{h} \to x_3 \text{ in } L^2(\Omega),$$

otteniamo che la (4.63) vale per ogni $\alpha \geq 3$.

Per quanto riguarda il termine (B), osserviamo preliminarmente che possiamo riscriverlo come

$$(\mathrm{B}) = \int_\Omega \frac{\eta(y_1^h)}{h}\left(\frac{d\theta^h}{dt}\left(\frac{y_3^h}{h}\right) - 1\right)(R^h E^h (R^h)^T)_{13} dx + \int_\Omega \frac{\eta(y_1^h)}{h}(R^h E^h (R^h)^T)_{13} dx. \tag{4.64}$$

Abbiamo che

$$\lim_{h\to 0}\int_\Omega \frac{\eta(y_1^h)}{h}\left(\frac{d\theta^h}{dt}\left(\frac{y_3^h}{h}\right) - 1\right)(R^h E^h (R^h)^T)_{13} dx = 0. \tag{4.65}$$

Per provare tale affermazione introduciamo gli insiemi D_h definiti come

$$D_h := \left\{x \in \Omega : \frac{|y_3^h|}{h} \geq \omega_h\right\}. \tag{4.66}$$

Essendo $\frac{d\theta^h}{dt} = 1$ in $(-\omega_h, \omega_h)$, otteniamo:

$$\left|\int_\Omega \frac{\eta(y_1^h)}{h}\left(\frac{d\theta^h}{dt}\left(\frac{y_3^h}{h}\right) - 1\right)(R^h E^h (R^h)^T)_{13} dx\right| =$$

$$\left|\int_{D_h} \frac{\eta(y_1^h)}{h}\left(\frac{d\theta^h}{dt}\left(\frac{y_3^h}{h}\right)-1\right)(R^hE^h(R^h)^T)_{13}dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h}\left(1+\left|\left|\frac{d\theta^h}{dt}\right|\right|_{L^\infty}\right)||\eta||_{L^\infty}\int_{D_h}|E^h|dx \leq \frac{C}{h}(h^{\alpha-1}+|D_h|^{\frac{1}{2}}),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la (4.35). D'altra parte

$$|D_h| \leq \frac{1}{\omega_h}\int_{D_h}\left|\frac{y_3^h}{h}\right| \leq C\omega_h^{-1}|D_h|^{\frac{1}{2}},$$

per l'uniforme limitatezza della successione $\left|\frac{y_3^h}{h}\right|$ in $L^2(\Omega)$. In conclusione abbiamo $|D_h| \leq C\omega_h^{-2}$ e quindi

$$\left|\int_{\Omega} \frac{\eta(y_1^h)}{h}\left(\frac{d\theta^h}{dt}\left(\frac{y_3^h}{h}\right)-1\right)(R^hE^h(R^h)^T)_{13}dx\right| \leq C\left(h^{\alpha-2}+\frac{1}{h\omega_h}\right).$$

Ricordando la (4.55), questo dimostra la (4.65). Di conseguenza, tornando alla (4.62), dalla (4.63) e dalla (4.64) deduciamo:

$$\lim_{h\to 0}\int_{\Omega}\frac{\eta(y_1^h)}{h}(R^hE^h(R^h)^T)_{13}dx = -\int_0^L \widehat{E}_{11}\eta' dx_1. \tag{4.67}$$

Analogamente, se definiamo $\widetilde{E} = \int_S x_2 E dx_2 dx_3$, scegliendo come funzione test nella (4.33) la mappa

$$\phi^h(x) = \theta^h\left(\frac{x_2}{h}\right)\eta(x_1)e_1,$$

abbiamo

$$\lim_{h\to 0}\int_{\Omega}\frac{(R^hE^h(R^h)^T)_{12}}{h}\eta(y_1^h)dx = -\int_0^L \widetilde{E}_{11}\eta' dx_1 \text{ per } \alpha \geq 3. \tag{4.68}$$

Pertanto, scelta $\eta = \varphi_k'$ con $\varphi_k \in C_b^1(\mathbb{R})$, $\varphi_k(0) = \varphi_k'(0) = 0$ per $k = 2, 3$, per la simmetria di $R^hE^h(R^h)^T$, dalle equazioni (4.67), (4.68), (4.54) si ottengono la (1.36) e la (1.37) per $\alpha \geq 3$.

Consideriamo ora il caso $2 < \alpha < 3$. Non possiamo procedere come per $\alpha \geq 3$ perché in questo caso, come sottolineato nell'Osservazione 4.1.2 non è più garantita la convergenza q.o. della successione $\widetilde{y}^h$. Sia θ^h la funzione definita in (4.57) e sia $\eta \in C_b^1(\mathbb{R})$, con $\eta(0) = 0$ e $\eta \in L^1(\mathbb{R})$. Siano inoltre

ξ_k^h, $k = 2, 3$, le funzioni introdotte nella Proposizione 4.1.2. L'Osservazione 4.1.2 e la (4.7) suggeriscono di modificare la (4.61) considerando la mappa:

$$\phi^h(x) = \theta^h\left(\frac{x_3}{h} - \frac{1}{h}\xi_3^h(x_1)\right)\eta(x_1)e_1.$$

Poiché $\theta^h, \xi_3^h, \eta \in C_b^1$ e $\eta(0) = 0$, segue che $\phi^h \in C_b^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e $\phi^h(0, hx_2, hx_3) = 0$ su S per ogni $h > 0$. Di conseguenza possiamo utilizzare ϕ^h come funzione test nell'equazione di Eulero-Lagrange (4.33).

Ricordando la notazione

$$i_k(y^h) = \frac{y_k^h}{h} - \frac{1}{h}\xi_k^h(y_1^h) \text{ per } k = 2, 3,$$

si ha:

$$\nabla\phi^h(y^h) = \left[\theta^h(\iota_3(y^h))\eta'(y_1^h) - \frac{1}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))(\xi_3^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h)\right] e_1 \otimes e_1$$

$$+\frac{\eta(y_1^h)}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))e_1 \otimes e_3.$$

Sostituendo ϕ^h nell'equazione di Eulero-Lagrange (4.33) si ottiene quindi

$$\begin{aligned}\int_\Omega (R^hE^h(R^h)^T)_{11}\left[\theta^h(\iota_3(y^h))\eta'(y_1^h) - \frac{1}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))(\xi_3^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h)\right] dx \\ + \int_\Omega (R^hE^h(R^h)^T)_{13}\frac{\eta(y_1^h)}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))dx = 0.\end{aligned} \tag{4.69}$$

Scriviamo il primo membro della (4.69) come somma di tre termini:

(A)= $\int_\Omega (R^hE^h(R^h)^T)_{11}\theta^h(\iota_3(y^h))\eta'(y_1^h)dx$,

(B)= $-\int_\Omega (R^hE^h(R^h)^T)_{11}\frac{1}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))(\xi_3^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h)dx$,

(C)= $\int_\Omega (R^hE^h(R^h)^T)_{13}\frac{\eta(y_1^h)}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))dx$.

Per quanto riguarda (A), procediamo scomponendolo ulteriormente nella somma

$$\begin{aligned}\text{(A)} &= \int_\Omega \chi_h[(R^hE^h(R^h)^T)_{11}\theta^h(\iota_3(y^h))\eta'(y_1^h)]dx \\ &+ \int_\Omega (1-\chi_h)\left[(R^hE^h(R^h)^T)_{11}\theta^h(\iota_3(y^h))\eta'(y_1^h)\right] dx.\end{aligned}$$

Per la (4.47), abbiamo che

$$\iota_3(y^h) \to x_3 \text{ in } L^2(\Omega),$$

essendo η' limitata e poiché la successione $(\iota_3(y^h))$ è uniformemente limitata in $L^2(\Omega)$, dalla (4.58) per convergenza dominata si ottiene:

$$\theta^h(\iota_3(y^h))\eta'(y_1^h) \to x_3\eta'(x_1) \text{ in } L^2(\Omega).$$

Di conseguenza, denotando con $\widehat{E} = \int_S x_3 E dx_2 dx_3$, avremo

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega \chi_h (R^h E^h (R^h)^T)_{11} \eta'(y_1^h)\theta^h(\iota_3(y^h))dx = \int_\Omega E_{11}\eta' x_3 dx$$
$$= \int_0^L \widehat{E}_{11}\eta' dx_1.$$

Per quanto riguarda il secondo addendo, dalla (4.39) otteniamo invece la stima

$$\int_\Omega (1-\chi_h)|(R^h E^h (R^h)^T)_{11}\eta'(y_1^h)\theta^h(\iota_3(y^h))|dx \leq \tag{4.70}$$
$$\leq 2\omega_h ||\eta'||_{L^\infty(0,L)} \int_{\Omega\setminus B_h} |E^h| \leq C h^{\alpha-1-\gamma}\omega_h$$

e quest'ultima quantità è infinitesima per la (4.56). Pertanto si ha:

$$(\text{A}) \to \int_0^L \widehat{E}_{11}\eta' dx_1.$$

Consideriamo ora il termine (B) e scomponiamolo ulteriormente nella somma:

$$(\text{B}) = -\int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)_{11} \left(\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h)) - 1\right)\frac{1}{h}(\xi_3^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h)dx$$
$$- \int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)_{11} \frac{1}{h}(\xi_3^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h)dx.$$

Poniamo

$$(\text{B.1}) = \int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)_{11} \left(\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h)) - 1\right)\frac{1}{h}(\xi_3^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h)dx,$$
$$(\text{B.2}) = \int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)_{11} \frac{1}{h}(\xi_3^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h)dx,$$

e procediamo studiando il termine (B.1). In analogia con il procedimento utilizzato per verificare la (4.65), introduciamo gli insiemi

$$\widetilde{D}_h = \{x \in \Omega : |\iota_3(y^h)| \geq \omega_h\}. \tag{4.71}$$

Anche in questo caso, dall'uniforme limitatezza della successione $(\iota_3(y^h))$ in $L^2(\Omega)$ otteniamo che

$$|\widetilde{D}_h| \leq \frac{1}{\omega^h} \int_{\widetilde{D}_h} |\iota_3(y^h)| dx \leq C\omega_h^{-1} |\widetilde{D}_h|^{\frac{1}{2}}$$

e dunque

$$|\widetilde{D}_h| \leq C\omega_h^{-2}. \tag{4.72}$$

Dalle proprietà di limitatezza (4.8) delle mappe $(\xi_3^h)'$ e dalla (4.35), si ha

$$|(\mathrm{B}.1)| \leq \int_{D_h} \left| (R^h E^h (R^h)^T)_{11} \left(\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h)) - 1 \right) \frac{1}{h} (\xi_3^h)'(y_1^h) \eta(y_1^h) \right|$$

$$\leq Ch^{\alpha-3} \int_{D_h} |E^h| \leq Ch^{\alpha-3}(h^{\alpha-1} + |D_h|^{\frac{1}{2}}) \leq C \left(h^{2\alpha-4} + \frac{h^{\alpha-2}}{h\omega_h} \right),$$

dove l'ultimo termine è infinitesimo per la (4.56). Di conseguenza $(B.1) \to 0$. Consideriamo il termine (B.2) e procediamo provando che esso è nullo. A tale scopo osserviamo preliminarmente che, scelta $\psi^h \in C_b^1(\mathbb{R})$, con $\psi^h(0) = 0$, la mappa $\phi^h(x) = \psi^h(x_1)e_1$ può essere utilizzata come funzione test nell'equazione di Eulero-Lagrange (1.16) e verifica l'equazione (4.50). Fissiamo $h > 0$ e scegliamo

$$\psi^h(x_1) := \int_0^{x_1} \frac{1}{h} (\xi_3^h)'(s) \eta(s) ds;$$

per provare che (B.2)=0, è sufficiente verificare che $\psi \in C_b^1(\mathbb{R})$ e $\psi(0) = 0$. Ora, la regolarità di ψ, la limitatezza della derivata prima e la condizione in 0 sono immediate dalla definizione della mappa e dalla limitatezza di η e di $(\xi_3^h)'$. Resta da verificare la limitatezza di ψ. D'altra parte, utilizzando ancora la limitatezza di $(\xi_3^h)'$ e la sommabilità di η in $\mathbb{R}$, abbiamo che ψ è limitata per ogni h fissato e (B.2)=0. In conclusione, quindi

$$(\mathrm{B}) = (\mathrm{B}.1) \to 0.$$

Studiamo infine il termine (C). Osserviamo che possiamo riscriverlo come:

$$(\mathrm{C}) = \int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)_{13} \frac{\eta(y_1^h)}{h} \left(\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h)) - 1 \right) dx$$

$$+ \int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)_{13} \frac{\eta(y_1^h)}{h} dx,$$

inoltre vale

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)_{13} \frac{\eta(y_1^h)}{h} \left(\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h)) - 1 \right) dx = 0. \tag{4.73}$$

Per provare tale affermazione, consideriamo nuovamente gli insiemi $\widetilde{D}_h$ definiti in (4.71). Dalle proprietà (4.35), (4.60), (4.72) e dalla limitatezza di η si ottiene

$$\int_\Omega \left| (R^h E^h (R^h)^T)_{13} \frac{\eta(y_1^h)}{h} \left(\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h)) - 1 \right) \right| dx$$

$$= \int_{\widetilde{D}_h} \left| (R^h E^h (R^h)^T)_{13} \frac{\eta(y_1^h)}{h} \left(\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h)) - 1 \right) \right|$$

$$\leq \frac{C}{h} \int_{\widetilde{D}_h} |E^h| \leq \frac{C}{h}(h^{\alpha-1} + |D_h|^{\frac{1}{2}}) \leq C \left(h^{\alpha-2} + \frac{1}{h\omega_h} \right)$$

e quest'ultima quantità è infinitesima per la (4.56), dunque segue la (4.73). In conclusione, quindi, combinando i risultati ottenuti per i termini (A), (B) e (C), dalla (4.69) si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)_{13} \frac{\eta(y_1^h)}{h} dx = - \int_\Omega \widehat{E}_{11} \eta' dx \tag{4.74}$$

per ogni $\eta \in C_b^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ e $\eta(0) = 0$. Procedendo analogamente per x_2, otteniamo

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)_{12} \frac{\eta(y_1^h)}{h} dx = - \int_\Omega \widetilde{E}_{11} \eta' dx. \tag{4.75}$$

Siano ora $\varphi_k \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\varphi_k' \in L^1(\mathbb{R})$ e $\varphi_k(0) = \varphi_k'(0) = 0$ per $k = 2, 3$. Sommando la (4.74) e la (4.75) e scegliendo rispettivamente $\eta = \varphi_3'$ e $\eta = \varphi_2'$, dalla (4.54) si ottiene

$$\int_0^L \widetilde{E}_{11} \varphi_2'' + \widehat{E}_{11} \varphi_3'' + f_2 \varphi_2 + f_3 \varphi_3 dx_1 = 0$$

con $\varphi_k \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\varphi_k' \in L^1(\mathbb{R})$ e $\varphi_k(0) = \varphi_k'(0) = 0$ per $k = 2, 3$. Ragionando per approssimazione come nel caso $\alpha \geq 3$ si ottengono quindi la (1.36) e la (1.37) per $2 < \alpha < 3$.

Settimo passo.

Equazione di Eulero-Lagrange per la funzione di twist.

Per concludere la dimostrazione del teorema, dobbiamo verificare l'ultima equazione di Eulero-Lagrange del Γ-limite. Anche in questo passo è necessario distinguere i casi $\alpha \geq 3$ e $2 < \alpha < 3$.

Supponiamo inizialmente $\alpha \geq 3$.

Sia $\eta \in C_b^1(\mathbb{R})$ con $\eta(0) = 0$ e poniamo

$$\phi^h(x) = \left(0, -\theta^h\left(\frac{x_3}{h}\right)\eta(x_1), \theta^h\left(\frac{x_2}{h}\right)\eta(x_1)\right), \tag{4.76}$$

dove θ^h è la funzione introdotta in (4.57).

Tenendo conto che

$$\nabla\phi^h = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ -\theta^h\left(\frac{x_3}{h}\right)\eta'(x_1) & 0 & -\frac{\eta(x_1)}{h}\frac{d\theta^h}{dt}\left(\frac{x_3}{h}\right) \\ \theta^h\left(\frac{x_2}{h}\right)\eta'(x_1) & \frac{\eta(x_1)}{h}\frac{d\theta^h}{dt}\left(\frac{x_2}{h}\right) & 0 \end{array}\right),$$

otteniamo

$$\int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T) e_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ -\theta^h\left(\frac{y_3^h}{h}\right)\eta'(y_1^h) \\ \theta^h\left(\frac{y_2^h}{h}\right)\eta'(y_1^h) \end{pmatrix} dx + \tag{4.77}$$

$$\int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T)_{32} \frac{\eta(y_1^h)}{h}\frac{d\theta^h}{dt}\left(\frac{y_2^h}{h}\right) - (R^h E^h (R^h)^T)_{23} \frac{\eta(y_1^h)}{h}\frac{d\theta^h}{dt}\left(\frac{y_3^h}{h}\right) dx$$

$$-h\int_\Omega \eta(y_1^h)\left[-f_2\theta^h\left(\frac{y_3^h}{h}\right) + f_3\theta^h\left(\frac{y_2^h}{h}\right)\right] dx = 0.$$

Per semplicità di notazione consideriamo separatamente le tre quantità seguenti:

$$(\mathrm{A}) = \int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T) e_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ -\theta^h \left(\frac{y_3^h}{h}\right) \eta'(y_1^h) \\ \theta^h \left(\frac{y_2^h}{h}\right) \eta'(y_1^h) \end{pmatrix} dx,$$

$$(\mathrm{B}) = \int_\Omega \frac{\eta(y_1^h)}{h} \left[(R^h E^h (R^h)^T)_{32} \frac{d\theta^h}{dt} \left(\frac{y_2^h}{h}\right) - (R^h E^h (R^h)^T)_{23} \frac{d\theta^h}{dt} \left(\frac{y_3^h}{h}\right) \right] dx,$$

$$(\mathrm{C}) = -h \int_\Omega \eta(y_1^h) \left[-f_2 \theta^h \left(\frac{y_3^h}{h}\right) + f_3 \theta^h \left(\frac{y_2^h}{h}\right) \right] dx.$$

Consideriamo il termine (A). Osserviamo che, procedendo come nel sesto passo, abbiamo:

$$\theta^h \left(\frac{y_3^h}{h}\right) \eta'(y_1^h) \stackrel{L^2}{\to} \begin{cases} (x_3 + v_3)\eta'(x_1) & \text{per } \alpha = 3, \\ x_3 \eta'(x_1) & \text{per } \alpha > 3, \end{cases}$$

$$\theta^h \left(\frac{y_2^h}{h}\right) \eta'(y_1^h) \stackrel{L^2}{\to} \begin{cases} (x_2 + v_2)\eta'(x_1) & \text{per } \alpha = 3, \\ x_2 \eta'(x_1) & \text{per } \alpha > 3, \end{cases}$$

Dunque, suddividendo Ω in B_h e $\Omega \setminus B_h$ e ricordando che $\overline{E} = 0$, otteniamo

$$(\mathrm{A}) \to \int_0^L -\widehat{E}_{12}\eta' + \widetilde{E}_{13}\eta' dx_1.$$

Per quanto riguarda il termine (C), abbiamo che esso è infinitesimo perché, dalla (4.58),

$$|(\mathrm{C})| \leq Ch \left(||f_2||_{L^2} \left|\left| \frac{y_3^h}{h} \right|\right|_{L^2} + ||f_3||_{L^2} \left|\left| \frac{y_2^h}{h} \right|\right|_{L^2} \right).$$

Studiamo infine (B). Osserviamo preliminarmente che dalla simmetria di E^h segue la simmetria di $R^h E^h (R^h)^T$, pertanto

$$(\mathrm{B}) = \int_\Omega \frac{\eta(y_1^h)}{h} (R^h E^h (R^h)^T)_{32} \left(\frac{d\theta^h}{dt} \left(\frac{y_2^h}{h}\right) - \frac{d\theta^h}{dt} \left(\frac{y_3^h}{h}\right) \right) dx.$$

Di conseguenza, possiamo scrivere (B) come

$$(\mathrm{B}) = \int_\Omega \frac{\eta(y_1^h)}{h} (R^h E^h (R^h)^T)_{32} \left[\left(\frac{d\theta^h}{dt} \left(\frac{y_2^h}{h}\right) - 1 \right) + \left(1 - \frac{d\theta^h}{dt} \left(\frac{y_3^h}{h}\right) \right) \right] dx.$$

Ragionando come abbiamo fatto nel sesto passo per la (4.65), si ottiene dunque che (B) è infinitesimo per $h \to 0$. Riunendo le osservazioni fatte sui termini (A), (B) e (C), otteniamo la (1.38), ovvero abbiamo verificato l'ultima equazione di Eulero-Lagrange del Γ-limite per $\alpha \geq 3$.
Non possiamo utilizzare esattamente lo stesso procedimento per $2 < \alpha < 3$ perché, come sottolineato nell'Osservazione 4.1.2, non possiamo garantire la convergenza in L^2 della successione $\widetilde{y}^h$ definita in (4.2). In quest'ultimo caso possiamo comunque ottenere la (1.38) facendo uso della funzione θ^h definita in (4.57) e delle mappe ξ_k^h per $k = 2, 3$ introdotte nella Proposizione 4.1.2.
A tale scopo modifichiamo la (4.76) definendo

$$\phi^h(x) = \left(0, -\theta^h\left(\frac{x_3}{h} - \frac{\xi_3^h(x_1)}{h}\right)\eta(x_1), \theta^h\left(\frac{x_2}{h} - \frac{\xi_2^h(x_1)}{h}\right)\eta(x_1)\right),$$

con $\eta \in C_b^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $\eta(0) = 0$. Abbiamo che $\phi^h \in C_b^1(\mathbb{R})$ e $\phi^h(0) = 0$ per ogni $h > 0$, inoltre

$$\nabla\phi^h(y^h)e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))(\xi_3^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h) - \theta^h(\iota_3(y^h))\eta'(y_1^h) \\ -\frac{1}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(i_2(y^h))(\xi_2^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h) + \theta^h(i_2(y^h))\eta'(y_1^h) \end{pmatrix},$$

$$\nabla\phi^h(y^h)e_2 = \frac{\eta(y_1^h)}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(i_2(y^h))e_3,$$

$$\nabla\phi^h(y^h)e_3 = -\frac{\eta(y_1^h)}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))e_2.$$

Sostituendo ϕ^h nell'equazione di Eulero-Lagrange (4.33) otteniamo

$$\int_\Omega (R^hE^h(R^h)^T)e_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))(\xi_3^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h) - \theta^h(\iota_3(y^h))\eta'(y_1^h) \\ -\frac{1}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(i_2(y^h))(\xi_2^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h) + \theta^h(i_2(y^h))\eta'(y_1^h) \end{pmatrix} dx + \tag{4.78}$$

$$\int_\Omega (R^hE^h(R^h)^T)_{32}\frac{\eta(y_1^h)}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(i_2(y_h)) - (R^hE^h(R^h)^T)_{23}\frac{\eta(y_1^h)}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))dx$$

$$-h\int_\Omega \eta(y_1^h)[-f_2\theta^h(\iota_3(y^h)) + f_3\theta^h(i_2(y^h))]dx = 0.$$

Per semplicità di notazione consideriamo separatamente le quattro quantità seguenti:

$$(\mathrm{A}) = \int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T) e_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ -\theta^h(\iota_3(y^h))\eta'(y_1^h) \\ \theta^h(i_2(y^h))\eta'(y_1^h) \end{pmatrix} dx,$$

$$(\mathrm{B}) = \int_\Omega (R^h E^h (R^h)^T) e_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))(\xi_3^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h) \\ -\frac{1}{h}\frac{d\theta^h}{dt}(i_2(y^h))(\xi_2^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h) \end{pmatrix} dx,$$

$$(\mathrm{C}) = \int_\Omega \frac{\eta(y_1^h)}{h}\left[(R^h E^h (R^h)^T)_{32}\frac{d\theta^h}{dt}(i_2(y^h)) - (R^h E^h (R^h)^T)_{23}\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))\right] dx,$$

$$(\mathrm{D}) = -h\int_\Omega \eta(y_1^h)[-f_2\theta^h(\iota_3(y^h)) + f_3\theta^h(i_2(y^h))]dx.$$

Consideriamo il termine (A). Osserviamo che, dalle proprietà (4.7) e (4.58), dalla limitatezza di η, procedendo come nel sesto passo, abbiamo:

$$\theta^h(\iota_k(y^h))\eta'(y_1^h) \to x_k\eta'(x_1) \text{ in } L^2(\Omega) \text{ per } k = 2, 3.$$

Dunque, suddividendo Ω in B_h e $\Omega \setminus B_h$, otteniamo

$$(\mathrm{A}) \to \int_0^L -\widehat{E}_{12}\eta' + \widetilde{E}_{13}\eta' dx_1.$$

Per quanto riguarda il termine (D), abbiamo che esso è infinitesimo perché, dalla (4.58) e dalla (4.7),

$$|(\mathrm{D})| \leq Ch(||f_2||_{L^2}||\iota_3(y^h)||_{L^2} + ||f_3||_{L^2}||i_2(y^h)||_{L^2}) \leq Ch.$$

Studiamo (C). Osserviamo preliminarmente che dalla simmetria di E^h segue la simmetria di $R^h E^h (R^h)^T$, pertanto

$$(\mathrm{C}) = \int_\Omega \frac{\eta(y_1^h)}{h}(R^h E^h (R^h)^T)_{32}\left(\frac{d\theta^h}{dt}(i_2(y^h)) - \frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))\right) dx.$$

Di conseguenza, possiamo scrivere (C) come

$$(\mathrm{C}) = \int_\Omega \frac{\eta(y_1^h)}{h}(R^h E^h (R^h)^T)_{32}\left[\left(\frac{d\theta^h}{dt}(i_2(y^h)) - 1\right) + \left(1 - \frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h))\right)\right] dx.$$

Ragionando come abbiamo fatto nel sesto passo per la (4.73), si ottiene che (C) è infinitesimo per $h \to 0$. A questo punto ci rimane solamente da caratterizzare il termine (B). Proviamo che (B) è infinitesimo, verificando che

$$\lim_{h\to 0}\int_\Omega \frac{1}{h}(R^h E^h (R^h)^T)_{k1}\frac{d\theta^h}{dt}(i_j(y^h))(\xi_j^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h)dx = 0 \text{ per } k,j \in \{2,3\}, k \neq j.$$

Fissiamo $k = 2, j = 3$ e scriviamo il precedente integrale come somma dei due termini

$$\text{(B.1)} = \int_\Omega \frac{1}{h}(R^h E^h (R^h)^T)_{21}\left(\frac{d\theta^h}{dt}(\iota_3(y^h)) - 1\right)(\xi_3^h)'(y_1^h)\eta(y_1^h)dx,$$
$$\text{(B.2)} = \int_\Omega \frac{(R^h E^h (R^h)^T)_{21}}{h^{1-\epsilon}}\frac{(\xi_3^h)'(y_1^h)}{h^\epsilon}\eta(y_1^h)dx.$$

con $0 < \epsilon < \alpha - 2$. Procedendo come nella dimostrazione dell'equazione (4.73) si ha che il termine (B.1) è infinitesimo. Per quanto riguarda il termine (B.2), si osserva che, se consideriamo una successione $(\psi^h) \subset C_b^1(\mathbb{R})$, con $\psi^h(0) = 0$ e $||\psi^h||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C$ per ogni $h > 0$, allora è possibile utilizzare le mappe $\psi^h(x_1)e_2$ come funzioni test nell'equazione di Eulero-Lagrange (4.33), ottenendo

$$\left|\int_\Omega \frac{(R^h E^h (R^h)^T)_{21}}{h^{1-\epsilon}}(\psi^h)'(y_1^h)dx\right| = \left|\int_\Omega \frac{R^h E^h (R^h)^T}{h^{1-\epsilon}} : \nabla\psi^h(y_1^h)dx\right|$$
$$= \left|\int_\Omega h^\epsilon f_2 \psi^h(y_1^h)dx\right| \leq Ch^\epsilon ||f_2||_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

D'altra parte, scegliendo per ogni $h > 0$:

$$\psi^h(x_1) := \int_0^{x_1} \frac{(\xi_3^h)'(s)}{h^\epsilon}\eta(s)ds, \tag{4.79}$$

si ha che la regolarità della mappe ψ^h, la limitatezza delle loro derivate e la condizione nell'origine sono immediate dalla definizione (4.79). Per quanto riguarda l'uniforme limitatezza delle mappe, dalla (4.8) ed essendo $\eta \in L^1(\mathbb{R})$, si ottiene

$$||\psi^h||_{L^\infty} \leq Ch^{\alpha-2-\epsilon}||\eta||_{L^1} \leq C \text{ per ogni } h > 0$$

e dunque (B.2) è infinitesimo. Analogamente si ha considerando $k = 3, j = 2$. Riunendo le osservazioni fatte sui termini (A), (B), (C) e (D), otteniamo la

(1.38), ovvero abbiamo verificato l'ultima equazione di Eulero-Lagrange del Γ-limite per $2 < \alpha < 3$. $\square$

Bibliografia

[A-B-P] E.Acerbi, G.Buttazzo, D.Percivale, A variational definition for the strain energy of an elastic string, *J.Elasticity*, **Vol.25**, 137-148 (1991).

[B] J.M.Ball, Some open problems in elasticity, *Geometry, mechanics and dynamics*, 3-59, Springer, New York, (2002).

[C] P.G.Ciarlet, Mathematical Elasticity, Volume 1:Three-dimensional elasticity, North-Holland, Amsterdam, (1988).

[DM] G.Dal Maso, *An introduction to* Γ*-convercence*, Boston, Birkhäuser, (1993).

[DG-F] E.De Giorgi, T.Franzoni, Su un tipo di convergenza variazionale *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.***Vol.58**, 842-850 (1975).

[F-J-M] G.Friesecke, R.D.James, S.Müller, A Theorem on Geometric Rigidity and the Derivation of Nonlinear Plate Theory from Three-Dimensional Elasticity, *Comm. Pure Appl. Math.*, **Vol.LV**, 1461-1506 (2002).

[F-J-M2] G.Friesecke, R.D.James, S.Müller, A Hierarchy of Plate Models Derived from Nonlinear Elasticity by Gamma-Convergence, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **Vol.180**, 183-236 (2006).

[L-R] H.Le Dret, A.Raoult, The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity, *J.Math.Pures Appl.*, **Vol.74**, 549-578 (1995).

[M-M] M.G.Mora, S.Müller, A nonlinear model for inextensible rods as low energy Γ-limit of three-dimensional nonlinear elasticity, *Ann. I.H.Poincaré*, **AN 21**, 271-293 (2004).

[M-M2] M.G.Mora, S.Müller, Convergence of equilibria of three-dimensional thin elastic beams, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **138A**, 873-896 (2008).

[M-M3] M.G.Mora, S.Müller, Derivation of the nonlinear bending-torsion theory for inextensible rods by Γ-convergence, *Calc. Var.*, **Vol.18**, 287-305 (2003).

[M-M-S] M.G.Mora, S.Müller, M.G.Schultz, Convergence of Equilibria of Planar Thin Elastic Beams, *Indiana Univ. Math. J.*, **Vol.56**, 2414-2438 (2007).

[M-P] S.Müller, M.R.Pakzad, Convergence of Equilibria of Thin Elastic Plates-The Von Karman Case, *Comm. Partial Differential Equations*, **Vol 33**, 1018-1032 (2008).

[M-S] M.G.Mora, L.Scardia, Convergence of equilibria of thin elastic plates under physical growth conditions for the energy density, Preprint SISSA, Trieste (2009).

[S0] L.Scardia, The nonlinear bending-torsion theory for curved rods as Γ-limit of three-dimensional elasticity. *Asymptot. Anal.* **Vol.47** no. 3-4, 317-343 (2006).

[S] L.Scardia, Asymptotic models for curved rods derived from nonlinear elasticity by Gamma-convergence, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, in stampa.