Übung zu Funktionalanalysis 1
5. Übung (29. 5. 2015)

41. Sei X ein Banachraum, $A \in \mathcal{B}(X)$, und $\lambda \in \rho(A)$. Dann gilt $r\big((A-\lambda)^{-1}\big) = d(\lambda, \sigma(A))^{-1}$.

42. Sei X ein Banachraum, $A, T \in \mathcal{B}(X)$ mit $0 \in \rho(A)$, und setze $B := A+T$. Wir wissen (Neumannsche Reihe): Ist $\|T\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, dann ist $0 \in \rho(B)$. Unter der Voraussetzung dass $AT = TA$, zeige die stärkere Aussage: Ist $r(T) < r(A^{-1})^{-1}$, dann ist $0 \in \rho(B)$. Warum ist diese Aussage eigentlich stärker als die obige?

43. Sei X ein Banachraum, $A, B \in \mathcal{B}(X)$ mit $AB = BA$. Zeige, dass

$$d_H\big(\sigma(A), \sigma(B)\big) \leq r(A-B).$$

Hier bezeichnet d_H die Hausdorff-Metrik auf der Menge $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$, d.h.,

$$d_H(M,N) := \max\Big\{ \sup_{x\in M} \inf_{y\in N} |x-y|, \sup_{y\in N} \inf_{x\in M} |x-y| \Big\}.$$

Folgere: Ist $\mathcal{C}$ eine kommutative Teilalgebra von $\mathcal{B}(X)$, so ist die Funktion

$$\Sigma : \begin{cases} (\mathcal{C}, \|.\|_{\mathcal{B}(X)}) & \to \quad (\mathcal{K}(\mathbb{C}), d_H) \\ \qquad\qquad A & \mapsto \quad \sigma(A) \end{cases}$$

stetig.

44. Das "approximative Punktspektrum" $\sigma_{app}(T)$ eines Operators $T \in B(X)$ besteht aus jenen $\lambda \in \mathbb{C}$ für die es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\|x_n\| = 1$ und $\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0$ gibt.

    Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{B}(X)$.

    (a) Finde eine Charakterisierung von "$\lambda \in \sigma_{app}(T)$" durch eine Eigenschaft des Operators $T - \lambda$.

    (b) Zeige $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subseteq \sigma_{app}(T)$. Kann der Fall eintreten, dass in dieser Inklusion Gleichheit gilt? Kann der Fall eintreten, dass in dieser Inklusion Gleichheit nicht gilt?

    (c) Zeige $\sigma_{app}(T) \subseteq \sigma(T)$ und beantworte die gleichen Fragen.

45. Sei X ein Banachraum und $A, T \in \mathcal{B}(X)$ mit $0 \in \rho(A)$ und T kompakt. Zeige, dass $\operatorname{ran}(A+T)$ abgeschlossen ist. Folgere: Ist $A, T \in \mathcal{B}(X)$ und T kompakt, so gilt

$$\rho(A) \subseteq \sigma_p(A+T) \cup \big(\mathbb{C} \setminus \sigma_{app}(A+T)\big).$$

46. Seien X, Y, Z Banachräume, $K \in B(X,Y)$ kompakt und $L \in B(Y,Z)$ injektiv. Zeige, dass

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, C > 0\ \forall\, x \in X: \quad \|Kx\| \leq \epsilon\|x\| + C\|LKx\|$$

47. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$, und betrachte den Operator auf $\ell^2(\mathbb{N})$ der durch die Matrix

$$A := (a_{i+j-1})_{i,j=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & \\ a_3 & \cdots & & \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Explizite agiert A also als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n-1} x_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei (der Einfachheit halber) weiters vorausgesetzt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Zeige, dass A kompakt ist.
Hinweis: Approximiere A mit Operatoren die endlichdimensionales Bild haben.