Funktional-analysis 2

Martin Blümlinger
Inst. 101 TU-Wien

1. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Banachalgebren mit Einselement

Eine *Banachalgebra mit Einselement* ist ein Banachraum $\mathfrak{B}$ auf dem eine bilineare assoziative Multiplikation

$$\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

erklärt ist, die $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ erfüllt und eine multiplikative Einheit e besitzt, also ein Element e, für das $\|e\| = 1$ und $xe = ex = x$ für alle $x \in \mathfrak{B}$ gilt.

Beispiel 1.0.1 Ist X ein topologischer Raum, so ist $C_b(X)$ (stetige beschränkte Funktionen auf X) mit Supremumsnorm unter punktweiser Multiplikation eine kommutative Banachalgebra mit der konstanten Funktion 1 als Einselement.

Beispiel 1.0.2 Ist X ein Banachraum, so ist $L(X)$, der Raum der beschränkten linearen Abbildungen von X in sich mit der Operatornorm und der Identität als Einselement eine (für Dimension $X > 1$) nichtkommutative Banachalgebra.

Beispiel 1.0.3 Der Raum $A(\mathbb{T})$ der 2π-periodischen Funktionen mit absolut konvergenter Fourierreihe $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ und der Norm $\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$ wird unter punktweiser Multiplikation und der konstanten Funktion 1 als Einselement zu einer kommutative Banachalgebra mit Einselement, die als *Fourieralgebra* bezeichnet wird. Dies folgt wegen $\widehat{fg}(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k)$ und

$$\begin{aligned}\|fg\|_{A(\mathbb{T})} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n-k)g(k)| \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} |f(i)| \sum_{j\in\mathbb{Z}} |g(j)| = \|f\|_{A(\mathbb{T})}\|g\|_{A(\mathbb{T})}\end{aligned}$$

Beispiel 1.0.4 Die *Diskalgebra* $H(D)$ der im Inneren von $D = \{z : |z| \leq 1\}$ analytischen Funktionen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ ist unter punktweiser Multiplikation mit der Norm $\|f\|_{H(D)} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n|$ und der konstanten Funktion 1 als Einselement also der abgeschlossener Teilraum $\{f \in A(\mathbb{T}) : \ \hat{f}(n) = 0 \ \text{ für } n < 0\}$ von $A(\mathbb{T})$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement.

Im Folgenden verstehen wir unter einer Banachalgebra immer eine Banachalgebra mit Einselement

1.1 Spektrum und Satz von Gelfand-Mazur

Ein Element x einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ heißt *invertierbar*, wenn es ein Element x^{-1} in $\mathfrak{B}$ gibt, das $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ erfüllt. Das *Spektrum* $\sigma(x)$ von x ist die Menge $\{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ ist nicht invertierbar}\}$. Das Komplement $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ ist die *Resolventenmenge* $\rho(x)$. Für $x \in \mathfrak{B}$ definieren wir den *Spektralradius* $r(x)$ als

$$r(x) := \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Diese Definition ist für alle $x \in \mathfrak{B}$ sinnvoll, denn $\sigma(x) \neq \emptyset$:

Satz 1.1.1 *Für $x \in \mathfrak{B}$ ist $\sigma(x)$ eine nichtleere kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$.*
Es gilt $r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$ und $r(x) \leq \|x\|$.

Beweis: Für $\|x\| < 1$ konvergiert die Reihe $-\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ in der Norm und stellt wie man unmittelbar (in Analogie zur Summationsformel für die geometrische Reihe) nachrechnet die Inverse von $x - e$ dar. Hieraus ergibt sich für invertierbares y und z mit $\|z\| < \|y^{-1}\|^{-1}$:

$$(z - y)^{-1} = (y(y^{-1}z - e))^{-1} = (y^{-1}z - e)^{-1}y^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(y^{-1}z)^n y^{-1}. \tag{1.1}$$

Insbesondere folgt für $\|z\| < |\lambda|$, $y := \lambda e$: $\lambda \in \rho(z)$ mit

$$(z - \lambda e)^{-1} = -\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}z^n, \quad \left\|(z - \lambda e)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|(1 - \|z\|/|\lambda|)} = \frac{1}{|\lambda| - \|z\|}. \tag{1.2}$$

Die Elemente von $\sigma(x)$ sind demnach betragsmäßig durch $\|x\|$ beschränkt und es gilt $\lim_{|\lambda|\to\infty} \|(x - \lambda e)^{-1}\| = 0$.
Für $\mu \in \rho(x)$ folgt aus (1.1) mit $z := (\lambda - \mu)e$ und $y := x - \mu e$: $\lambda \in \rho(x)$ für $|\mu - \lambda| < \|(x - \mu e)^{-1}\|^{-1}$

$$(x - \lambda e)^{-1} = -((\lambda - \mu)e - (x - \mu e))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \mu)^n(x - \mu e)^{-n-1}. \tag{1.3}$$

$\sigma(x)$ ist also auch abgeschlossen und somit kompakt.

Die $\mathfrak{B}-$wertige Funktion $\lambda \mapsto (x-\lambda e)^{-1}$ ist nach (1.3) analytisch auf $\rho(x)$, d.h. sie kann lokal um $\mu \in \rho(x)$ nach Potenzen von $(\lambda-\mu)$ mit Koeffizienten in $\mathfrak{B}$ entwickelt werden. Es folgt, dass für ein stetiges lineares Funktional ϕ auf $\mathfrak{B}$ die Abbildung

$$\lambda \mapsto \phi((x-\lambda e)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\mu)^n \phi((x-\mu e)^{-n-1})$$

auf $\rho(x)$ komplexwertig analytisch ist.
Wäre $\sigma(x)$ leer, so wäre diese Abbildung für jedes $\phi \in \mathfrak{B}'$ eine ganze Funktion die im Unendlichen gegen 0 konvergiert, nach dem Satz von Liouville also die Nullfunktion. Aus $\phi((x-\lambda e)^{-1}) = 0$ für alle $\phi \in \mathfrak{B}'$ folgt aber $(x-\lambda e)^{-1} = 0$, was offensichtlich unmöglich ist. Somit ist $\sigma(x)$ nicht leer.
Setzt man $\zeta := \lambda^{-1}$, so sieht man, dass wegen (1.2) für $\phi \in \mathfrak{B}'$ die Funktion

$$f_\phi : \quad \rho(x) \to \mathbb{C}, \quad \zeta \mapsto \phi\left((x-\zeta^{-1}e)^{-1}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1}\phi(x^n) \tag{1.4}$$

durch $f_\phi(0) = 0$ zu einer Funktion fortgesetzt werden, die für $|\lambda| > r(x)$, also $|\zeta| < r(x)^{-1}$ analytisch ist. Demzufolge konvergiert die Taylorreihe (1.4) für $|\zeta| < r(x)^{-1}$, insbesondere ist also die Folge $(|\zeta^n\phi(x^n)|)_{n\geq 0}$ für jedes $\phi \in \mathfrak{B}'$ und $|\zeta| < r(x)^{-1}$ beschränkt. Die Operatornorm der Abbildung $\mathfrak{B}' \to \mathbb{C}, \quad \phi \mapsto \zeta^n\phi(x^n)$ ist $|\zeta^n|\|x^n\|$, somit gibt es nach dem Satz von Banach-Steinhaus für $|\zeta| < r(x)^{-1}$ Konstante $M_{\zeta,x}$ mit $|\zeta^n|\|x^n\| < M_{\zeta,x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\|x^n\|^{1/n} < M_{\zeta,x}^{1/n}|\zeta|^{-1} \quad \text{und } \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\zeta|^{-1}$$

für $|\zeta| < r(x)^{-1}$, also

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq r(x). \tag{1.5}$$

Für $\lambda^n \in \rho(x^n)$ ist

$$(x^n - \lambda^n e)^{-1}(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1}e)$$

offensichtlich die Linksinverse und

$$(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1}e)(x^n - \lambda^n e)^{-1}$$

die Rechtsinverse von $x - \lambda e$. Gilt $zy = yz$ und ist z invertierbar, so folgt

$$z^{-1}y = z^{-1}yzz^{-1} = z^{-1}zyz^{-1} = yz^{-1}.$$

Da $x-\lambda e$ mit $x^n - \lambda^n e$ kommutiert, sind demnach Links und Rechtsinverse gleich und es gilt $\sigma(x)^n \subseteq \sigma(x^n)$ und damit $r(x)^n \leq r(x^n) \leq \|x^n\|$, also $r(x) \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, woraus mit (1.5)

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = r(x)$$

folgt. □

Der folgende Satz zeigt, dass nur $\mathbb{C}$ eine Banachalgebra ist, die zugleich ein Schiefkörper ist.

Satz 1.1.2 (Gelfand-Mazur) *Eine Banachalgebra in der jedes $x \neq 0$ invertierbar ist, ist isomorph zu $\mathbb{C}$.*

Beweis: Für ein Element x der Banachalgebra gilt nach Satz 1.1.1 $\sigma(x) \neq \emptyset$. Also gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ für das $x - \lambda e$ nicht invertierbar ist. Nach Voraussetzung ist das nur für das Nullelement der Fall, also gilt $x = \lambda e$. □

1.2 Maximale Ideale und multiplikative lineare Funktionale

Aufgrund der zusätzlichen multiplikativen Struktur einer Banachalgebra liegt es nahe jene stetigen linearen Funktionale zu betrachten, die multiplikativ sind: Ein nichttrivialer Homomorphismus der Banachalgebra $\mathfrak{B}$ nach $\mathbb{C}$ heißt *multiplikatives lineares Funktional.* Multiplikative lineare Funktionale auf kommutativen Banachalgebren können wie im Folgenden gezeigt wird durch maximale Ideale beschrieben werden. Dabei heißt ein linearer Teilraum I von $\mathfrak{B}$ ein *Ideal*, wenn aus $a \in I$, $x \in \mathfrak{B}$ folgt $ax \in I$ und $xa \in I$. Ein Ideal ist ein *echtes Ideal*, wenn es nichttrivial (d.h. ungleich den Idealen $\{0\}$ und $\mathfrak{B}$) ist und *maximales Ideal*, wenn es in keinem größeren echten Ideal enthalten ist.
Da für ein multiplikatives lineares Funktional m stets $m(xy) = m(x)m(y) = m(yx)$ gilt, können multiplikative lineare Funktionale auf nichtkommutativen Banachalgebren nicht punktetrennend operieren. Es überrascht also nicht, dass wir uns im Folgenden bei einigen Aussagen auf kommutative Banachalgebren beschränken müssen.

Satz 1.2.1 *Jedes echte Ideal einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ ist in einem maximalen Ideal enthalten. Maximale Ideale sind abgeschlossen.*
Ist $\mathfrak{B}$ kommutativ, so hat jedes maximale Ideal Kodimension 1 und $x \in \mathfrak{B}$ ist genau dann in einem maximalen Ideal enthalten, wenn es nicht invertierbar ist.

Beweis: Ein invertierbares x ist wegen $y = x(x^{-1}y)$ in keinem echten Ideal enthalten. Für $x \in B_e := \{x : \|e - x\| < 1\}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(e - x)^n$ konvergent und stellt die Inverse von x dar. Somit ist jedes echte Ideal Teilmenge der abgeschlossenen Menge $B_e^{\complement}$. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation gilt für $x \in \mathfrak{B}$: $x\bar{I} \subseteq \overline{xI} \subseteq \bar{I}$, also ist auch $\bar{I}$ ein Ideal. Es folgt, dass mit I auch sein Abschluss ein echtes Ideal ist.
Für ein echtes Ideal I ist die Menge der echten Ideale die I enthalten durch Mengeninklusion teilgeordnet. Die Vereinigung der Elemente einer totalgeordneten Familie von echten Idealen ist ebenfalls ein Ideal. Da alle echten Ideale Teilmengen von $B_e^{\complement}$ sind, ist auch diese obere Schranke ein echtes Ideal. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element, also ein maximales echtes Ideal, das I enthält. Dieses ist, da auch sein Abschluss ein echtes Ideal ist, selbst abgeschlossen.

In einer kommutativen Banachalgebra ist jedes nichtinvertierbare Element x in einem echten Ideal enthalten: Das Hauptideal $x\mathfrak{B}$ von x ist wegen $e \notin x\mathfrak{B}$ ein echtes Ideal und x ist damit auch in einem maximalen Ideal enthalten.
Ist ein Ideal I in einer kommutativen Banachalgebra maximal, so ist es abgeschlossen und der Quotientenraum $\mathfrak{B}/I$ ist eine kommutative Banachalgebra mit Einselement $e+I$ und Multiplikation $(x+I)(y+I) = xy+I$.
Enthält $\mathfrak{B}/I$ ein nicht invertierbares Element $x_0 + I \neq 0 + I$, so ist $x_0 + I$ in einem echten Ideal J von $\mathfrak{B}/I$ enthalten. Wegen

$$xy + I = (x+I)(y+I) \in J(y+I) \subseteq J \quad \text{ für } x+I \in J$$

ist die Menge $I' := \{x \in \mathfrak{B} : x + I \in J\}$ ein echtes Ideal in $\mathfrak{B}$, das I enthält, aber wegen $x_0 \in I' \setminus I$ echt größer als I ist, im Widerspruch zur Maximalität von I.
Demzufolge enthält die Banachalgebra $\mathfrak{B}/I$ keine nicht invertierbaren Elemente außer 0, weshalb sie nach dem Satz von Gelfand-Mazur 1.1.2 eindimensional ist. I hat also Kodimension 1. □

Satz 1.2.2 *In einer Banachalgebra sind multiplikative lineare Funktionale stetig mit $\|m\| = m(e) = 1$.*
In einer kommutativen Banachalgebra sind die maximalen Ideale genau die Kerne multiplikativer linearer Funktionale.

Beweis: Ist m ein multiplikatives lineares Funktional, so ist sein Kern offensichtlich ein echtes Ideal mit Kodimension 1, also maximal. Nach Satz 1.2.1 ist sein Kern damit abgeschlossen. Lineare Funktionale sind aber genau dann stetig wenn ihr Kern abgeschlossen ist, also ist m stetig.
Wäre $\|m\| > 1$, so gäbe es ein $x \in \mathfrak{B}$ mit $\|x\| < 1$ und $|m(x)| = 1$. Dann folgt aber $\|x^n\| \leq \|x\|^n \to_{n\to\infty} 0$ und $|m(x^n)| = |m(x)^n| = 1$ im Widerspruch zur Stetigkeit. Also gilt $\|m\| \leq 1$. Da es ein $x \in \mathfrak{B}$ mit $m(x) \neq 0$ gibt, folgt aus $m(e)m(x) = m(ex) = m(x)$ und $m(e) = 1$ wegen $\|e\| = 1$ aber $\|m\| \geq 1$, also $\|m\| = 1$.
Ist andererseits I ein maximales Ideal in einer kommutativen Banachalgebra, so hat es nach Satz 1.2.1 Kodimension 1. Jedes Element x der Algebra kann wegen $e \notin I$ eindeutig als $x = \lambda_x e + y$ mit $y \in I$, $\lambda_x \in \mathbb{C}$ dargestellt werden. Die Abbildung $x \mapsto \lambda_x$ ist ein multiplikatives lineares Funktional mit Kern I.

□

Wir bezeichnen die Menge Δ der multiplikativen linearen Funktionale einer Banachalgebra als den *Gelfandraum* (oder *maximalen Idealraum* bzw. *Spektrum*) der Banachalgebra. Die Spurtopologie der schwach*-Topologie auf Δ wird als *Gelfandtopologie* bezeichnet.

Satz 1.2.3 *In einer Banachalgebra mit Einselement ist der Gelfandraum Δ versehen mit der Gelfandtopologie ein kompakter Raum.*

In einer Banachalgebra ohne Einselement gilt dieser Satz nicht!
Beweis: Für $x \in \mathfrak{B}$ ist die Abbildung $\mathfrak{B}' \to \mathbb{C}$, $\phi \mapsto \phi(x)$ schwach*-stetig (die schwach*-Topologie ist ja genau die initiale Topologie bezüglich dieser Abbildungen). Also ist für $x, y \in \mathfrak{B}$ auch die Abbildung

$$\mathfrak{B}' \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C},\ \phi \mapsto (\phi(xy), \phi(x), \phi(y))$$

schwach*-stetig. Da offensichtlich die Abbildung $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(a, b, c) \mapsto a - bc$ stetig ist, folgt, dass für $x, y \in \mathfrak{B}$ die Menge

$$M_{x,y} := \{\phi \in \mathfrak{B}' : \phi(xy) - \phi(x)\phi(y) = 0\}$$

als Kern der schwach*-stetigen Abbildung

$$\mathfrak{B}' \to \mathbb{C},\ \phi \to \phi(xy) - \phi(x)\phi(y)$$

schwach*-abgeschlossen ist. Somit ist $\Delta \cup \{0\} = \cap_{x,y\in\mathfrak{B}} M_{x,y}$ schwach*-abgeschlossen. Da auch $M_0 := \{\phi \in \mathfrak{B}' : \phi(e) = 1\}$ schwach*-abgeschlossen ist, folgt, dass $\Delta = M_0 \cap \bigcap_{x,y\in\mathfrak{B}} M_{x,y}$ schwach*-abgeschlossen ist. Nach dem Satz von Alaoglu ist die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathfrak{B}'$ schwach*-kompakt. Als schwach*-abgeschlossene Teilmenge ist somit Δ selbst schwach*-kompakt. □

Für $x \in \mathfrak{B}$ ist die Abbildung $m \mapsto m(x)$ nach Definition der schwach*-Topologie stetig auf Δ bezüglich der Gelfandtopologie. Die Abbildung

$$\mathfrak{B} \to C(\Delta),\ x \mapsto \hat{x} : \quad \hat{x}(m) = m(x)$$

heißt *Gelfandtransformation*. $C(\Delta)$ mit der Maximumsnorm ist selbst unter punktweiser Multiplikation eine Banachalgebra. Es gilt:

Satz 1.2.4 (Gelfand'scher Darstellungssatz) *In einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ ist die Gelfandtransformation ein stetiger Algebrenhomomorphismus von $\mathfrak{B}$ nach $C(\Delta)$.*
Ist $\mathfrak{B}$ kommutativ, so gilt $\hat{x}(\Delta) = \sigma(x)$ und $\|\hat{x}\|_{C(\Delta)} = r(x) \leq \|x\|$.

Beweis: Wegen

$$\widehat{xy}(m) = m(xy) = m(x)m(y) = \hat{x}(m)\hat{y}(m) \text{ und } \hat{e}(m) = 1 \text{ (Satz 1.2.2)}$$

ist die Gelfandtransformation tatsächlich ein Algebrenhomomorphismus.
Nach Satz 1.2.1 liegt y genau dann in einem maximalen Ideal, wenn y nicht invertierbar ist. Für kommutative C^*-Algebren folgt mit Satz 1.2.2: $\lambda \in \sigma(x) \Leftrightarrow x - \lambda e$ ist nicht invertierbar $\Leftrightarrow x - \lambda e$ ist in einem maximalen Ideal enthalten $\Leftrightarrow \exists m \in \Delta : m(x - \lambda e) = 0 \Leftrightarrow \exists m \in \Delta$ mit $m(x) = \lambda$.
Also gilt $\hat{x}(\Delta) = \sigma(x)$ und damit $\|\hat{x}\|_{C(\Delta)} = r(x) \leq \|x\|$ nach der Definition des Spektralradius und Satz 1.1.1. □

Beispiel 1.2.5 Für einen kompakten Raum K ist in der Banachalgebra $C(K)$ offensichtlich jede Punktauswertung $m_t(f) = f(t)$ ein multiplikatives Funktional. Das entsprechende maximale Ideal $\ker(m)$ ist der Teilraum der Funktionen die in t verschwinden.
Ist I ein Ideal in $C(K)$, das für jedes $t \in K$ eine Funktion $f_t \in C(K)$ mit $f_t(t) \neq 0$ enthält, so bilden die Mengen $\{f_t^{-1}(\{0\}^\complement) : t \in K\}$ eine offene Überdeckung von K und es gibt, da Δ kompakt ist, $t_1, \ldots, t_n$ mit $\sum_{i=1}^n |f_{t_i}(t)| > 0 \quad \forall t \in K$. Es folgt, dass $\sum_{i=1}^n f_{t_i}(t)\overline{f_{t_i}(t)}$ eine invertierbare Funktion in I ist und damit $I = C(K)$. Demnach gibt es für jedes echte Ideal I ein $t_0 \in K$ mit $f(t_0) = 0$ für $f \in I$. Jedes echte Ideal ist also Teilmenge von $\ker(m_{t_0})$ für ein $t_0 \in K$, woraus mit Satz 1.2.2 folgt, dass alle multiplikativen Funktionale Punktauswertungen sind. Also kann Δ in kanonischer Weise mit K und die Gelfandtransformation mit der Identität identifiziert werden.

Beispiel 1.2.6 Auf der Fourieralgebra $A(\mathbb{T})$ (vgl. Beispiel 1.0.3) sind Punktauswertungen ebenfalls multiplikative Funktionale. Ist umgekehrt $m \in \Delta$ und bezeichnet e_n die Funktion $e_n(t) := \mathrm{e}^{int}$, so folgt wegen $\|e_n\|_{A(\mathbb{T})} = 1$ aus Satz 1.2.2 $|m(e_n)| \leq 1$ und wegen $1 = m(e_0) = m(e_1)m(e_{-1})$ folgt $|m(e_1)| = 1$, also $m(e_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_m}$ für ein $t_m \in \mathbb{T}$. Aus der Multiplikativität folgt $m(e_n) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt_m} = e_n(t_m)$ und somit $m(f) = f(t_m)$ wegen der Stetigkeit von m und der absoluten Konvergenz der Fourierreihe von f. Demnach sind auch auf $A(\mathbb{T})$ die Auswertungsfunktionale die einzigen multiplikativen Funktionale.
Betrachtet man die zu $A(\mathbb{T})$ isometrisch isomorphe Algebra $\ell_1(\mathbb{Z})$ mit Faltung

$$* : \ell_1(\mathbb{Z}) \times \ell_1(\mathbb{Z}), \quad f * g(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(n-m)g(m),$$

so sieht man, dass der Gelfandraum von $(\ell_1(\mathbb{Z}), *)$ mit $\mathbb{T}$ identifiziert werden kann, wobei unter dieser Identifikation die Gelfandtransformation genau der Fourierrücktransformation $\ell_1(\mathbb{Z}) \to A(\mathbb{T})$ entspricht. $\ell_1(\mathbb{Z})$ ist eine kommutative C*-Algebra bei der die Darstellung als ein Raum $C(K)$ nicht offensichtlich ist.

Beispiel 1.2.7 Auf der Diskalgebra $H(D)$ vgl. Bsp. 1.0.4 gilt für $m \in \Delta$ und $e_j(z) = z^j$: $m(e_1) = \zeta_m$ mit $|\zeta_m| \leq 1$. Aus der Multiplikativität folgt $m(e_j) = m(e_1^j) = m(e_1)^j = \zeta_m^j$ und aus der Stetigkeit $m(f) = f(\zeta_m)$. Die multiplikativen Funktionale entsprechen demnach genau den Punktauswertungen in $\zeta_m \in D$.

Bemerkung: Da $H(D)$ als Unteralgebra der Fourieralgebra $A(\mathbb{T})$ aufgefasst werden kann, zeigen die beiden vorangegangenen Beispiele, dass im Gegensatz zu linearen Funktionalen (Satz von Hahn-Banach) multiplikative lineare Funktionale im Allgemeinen nicht von Teilräumen multiplikativ fortgesetzt werden können.

Der Beweis des folgenden Satzes ohne Verwendung der Theorie der Banachalgebren ist überaus aufwendig! Er zeigt, dass die Theorie der Banachalgebren ein sehr wichtiges Werkzeug darstellen kann.

Satz 1.2.8 (Wiener) *Gilt für eine Funktion* $f \in A(\mathbb{T})$*:* $f(t) \neq 0$ *für* $t \in \mathbb{T}$*, so ist die Funktion* $1/f$ *ebenfalls in* $A(\mathbb{T})$*.*

Beweis: f ist in $A(\mathbb{T})$ genau dann invertierbar, wenn $0 \notin \sigma(f)$ gilt. Nach dem Gelfand'schen Darstellungssatz und Beispiel 1.2.6 gilt $\sigma(f) = \hat{f}(\Delta) = f(\mathbb{T})$. Nach Voraussetzung gilt aber $0 \notin f(\mathbb{T})$, also $0 \notin \sigma(f)$ und f ist in $A(\mathbb{T})$ invertierbar. also $0 \notin \sigma(f)$ und f ist in $A(\mathbb{T})$ invertierbar. □

1.3 C*-Algebren

Unter den bisher getroffenen Voraussetzungen muss die Gelfandtransformation nicht injektiv sein. Unter zusätzlichen Voraussetzungen wird aber die Gelfandtransformation sogar zu einer surjektiven Isometrie.
Auf einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ über $\mathbb{C}$ ist eine *Involution* eine Abbildung $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, $x \mapsto x^*$, mit

$$
\begin{aligned}
&-- \quad (x+y)^* = x^* + y^* \\
&-- \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^* \\
&-- \quad (x^*)^* = x \\
&-- \quad (xy)^* = y^* x^* \qquad \forall x, y \in \mathfrak{B},\ \lambda \in \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

Erfüllt eine Involution auf einer Banachalgebra zusätzlich

$$-- \qquad \|xx^*\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathfrak{B},$$

so ist die Banachalgebra eine *C^*-Algebra* $\mathfrak{C}$. Ein Banachalgebrenhomomorphismus Φ zwischen Algebren mit Involution heißt **-Homomorphismus*, wenn $\Phi(x^*) = (\Phi(x))^*$ gilt.

Beispiel 1.3.1 Unter komplexer Konjugation ist $C_b(X)$ (Raum der stetigen beschränkten Funktionen auf dem topologischen Raum X) eine kommutative C^*-Algebra.
Unter Adjungiertenbildung ist der Raum $L(\mathcal{H})$ der beschränkten Operatoren in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ eine nichtkommutative C^*-Algebra.
$\ell_1(\mathbb{N})$ mit Faltung und komplexer Konjugation ist eine kommutative Banachalgebra mit Involution, die keine C^*-Algebra ist.

Ein Element x in einer Banachalgebra mit Involution heißt *normal*, wenn $x^*x = xx^*$ gilt und *selbstadjungiert*, wenn $x^* = x$ gilt.

Satz 1.3.2 *Ist das Element* x *einer C^*-Algebra normal, so gilt* $r(x) = \|x\|$*. Ist* x *selbstadjungiert, so gilt* $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$*.*

Beweis: Für ein normales Element x einer C^*-Algebra folgt

$$\|x\|^4 = \|xx^*\|^2 = \|(xx^*)(xx^*)^*\| = \|xx^*x^*x\| = \|x^2(x^2)^*\| = \|x^2\|^2,$$

also $\|x^2\| = \|x\|^2$. Mit x ist auch jede Potenz von x normal, und wir erhalten durch Induktion aus $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$:

$$\left\|x^{2^{n+1}}\right\| = \left\|x^{2^n}\right\|^2 = \left(\|x\|^{2^n}\right)^2 = \|x\|^{2^{n+1}}.$$

Mit Satz 1.1.1 folgt $r(x) = \|x\|$.
Ist x selbstadjungiert mit $\zeta \in \sigma(x) \setminus \mathbb{R}$, so ist $x' := (x - \mathrm{Re}(\zeta)e)$ selbstadjungiert mit $\mathrm{iIm}(\zeta) \in \sigma(x')$.
Es folgt für $\lambda \in \mathbb{R}$: $\mathrm{i}(\mathrm{Im}(\zeta) + \lambda) \in \sigma(x' + \mathrm{i}\lambda e)$ und

$$(\mathrm{Im}(\zeta) + \lambda)^2 \leq \|x' + \mathrm{i}\lambda e\|^2 = \|(x' + \mathrm{i}\lambda e)(x' - \mathrm{i}\lambda e)\| = \|x'^2 + \lambda^2 e\| \leq \|x'\|^2 + \lambda^2,$$

ein Widerspruch für $\lambda\mathrm{Im}(\zeta) > \|x'\|^2/2$. □

Satz 1.3.3 (Gelfand-Neimark) *In einer kommutativen C^*-Algebra $\mathfrak{C}$ mit Gelfandraum Δ ist die Gelfandtransformation $x \mapsto \hat{x}$ ein isometrischer *-Isomorphismus von $\mathfrak{C}$ auf $C(\Delta)$.*

Beweis: Nach dem Gelfand'schen Darstellungssatz ist die Gelfandtransformation ein Algebrenhomomorphismus mit $\|\hat{x}\| = r(x)$. In einer kommutativen C^*-Algebra ist jedes Element normal, also folgt aus Satz 1.3.2, dass die Gelfandtransformation eine Isometrie ist.
Das Bild $\hat{\mathfrak{C}}$ von $\mathfrak{C}$ unter der Gelfandtransformation ist eine Unteralgebra von $C(\Delta)$, die als isometrisches Bild eines vollständigen Raumes abgeschlossen ist. Die Elemente von $\hat{\mathfrak{C}}$ operieren klarerweise punktetrennend auf Δ. Da für $x \in \mathfrak{C}$ die Elemente $x + x^*$ und $\mathrm{i}(x - x^*)$ stets selbstadjungiert sind, folgt aus Satz 1.3.2

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \widehat{\left(\frac{x+x^*}{2} + \frac{x-x^*}{2}\right)} = \widehat{\left(\frac{x+x^*}{2}\right)} - \mathrm{i}\,\widehat{\left(\mathrm{i}\frac{x-x^*}{2}\right)} \\
\widehat{x^*} &= \widehat{\left(\frac{x^*+x}{2} + \frac{x^*-x}{2}\right)} = \widehat{\left(\frac{x+x^*}{2}\right)} + \mathrm{i}\,\widehat{\left(\mathrm{i}\frac{x-x^*}{2}\right)}
\end{aligned}$$

mit $\widehat{\left(\frac{x+x^*}{2}\right)}$ und $\widehat{\left(\mathrm{i}\frac{x-x^*}{2}\right)}$ reell, also gilt $\bar{\hat{x}} = \widehat{x^*}$ und $\hat{\mathfrak{C}}$ ist abgeschlossen unter komplexer Konjugation. $\hat{\mathfrak{C}}$ enthält auch die konstanten Funktionen $\widehat{\lambda e}$. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist diese Unteralgebra somit $C(\Delta)$. □

Die Bedeutung des Satzes von Gelfand-Neimark liegt weniger in der Aussage, dass $C(K)$ die einzigen kommutativen C^*-Algebren sind, als darin, dass jede kommutative C^*-Algebra eine Darstellung als $C(K)$ mit einem Kompaktum K hat. Dies ist für zahlreiche kommutative C^*-Algebren nichttrivial und nicht unmittelbar zu erkennen, wie das Beispiel des Raumes $C_b(X)$ für nicht kompakte topologische Räume X zeigt:

Satz 1.3.4 *Auf einem topologischen Raum X ist $C_b(X)$ (Raum der stetigen beschränkten Funktionen mit Supremumsnorm, punktweiser Multiplikation und komplexer Konjugation) eine kommutative C^*-Algebra. Alle Auswertungsfunktionale $m_x : m_x(f) = f(x)$ auf $C_b(X)$ (vgl. Bsp. 1.0.1) sind multiplikativ. Die kanonische Abbildung $\Phi : X \to \Delta,\ x \mapsto m_x$ von X nach Δ versehen mit der Gelfandtopologie ist stetig mit dichtem Bild.*

Beweis: Es ist nur zu zeigen, dass Φ stetig mit dichtem Bild ist.
Für $f \in C_b(X)$ ist $\hat{f} \circ \Phi : X \to \mathbb{C}$ wegen $\hat{f} \circ \Phi(x) = m_x(f) = f(x)$ stetig. Deshalb ist Φ stetig, wenn Δ mit der Initialtopologie bezüglich der Abbildungen $\hat{f}$, $f \in C_b(X)$ versehen ist. Diese Topologie ist aber genau die Gelfandtopologie auf Δ.
Für $m_0 \in \Delta$ bilden Mengen der Form $U := \{m \in \Delta : |\hat{f}_i(m) - \hat{f}_i(m_0)| < \alpha_i,\ i = 1, \dots, N\}$, $f_i \in C_b(X)$, $\alpha_i > 0$ eine Umgebungsbasis von m_0 bezüglich der Gelfandtopologie. Für

$$G(m) := \max \left\{ 0, 1 - \sum_{i=1}^{N} |\hat{f}_i(m) - \hat{f}_i(m_0)|/\alpha_i \right\} \in C(\Delta)$$

gilt $m_0 \in \{m : G(m) > 0\} \subseteq U$. Da $C_b(X)$ eine kommutative C^*-Algebra ist, gibt es nach dem Satz von Gelfand-Neimark 1.3.3 ein $f \in C_b(X)$ mit $G = \hat{f}$, also bilden auch die Mengen $\{m : |\hat{f}(m)| > 0\}$, $f \in C_b(X)$ mit $|\hat{f}(m_0)| > 0$ eine Umgebungsbasis von m_0.
Aus $\hat{f}(m_x) = 0\, \forall x \in X$ folgt $f(x) = 0\, \forall x \in X$, also $f = 0$ und damit $\hat{f}(m_0) = 0$. Somit ist $\Phi(X)$ dicht in Δ. □

Der Satz von Gelfand-Neimark liefert jetzt für vollständig reguläre Räume die Existenz einer Kompaktifizierung (also eine kompakte Menge, die X als dichte Teilmenge enthält, sodass die Topologie auf X genau die Spurtopologie ist), auf der alle auf X stetigen Funktionen eine stetige Fortsetzung auf das Kompaktum zulassen. Ein topologischer Raum X heißt *vollständig regulär*, wenn Punkte abgeschlossen sind und es für jede abgeschlossene Menge A und $x \notin A$ ein $f \in C(X)$ mit $f(x) = 1$ und $f(y) = 0 \quad \forall y \in A$ gibt.

Satz 1.3.5 *Ist X ein vollständig regulärer Raum, so gibt es einen kompakten Raum βX (genannt die Stone-Čech Kompaktifizierung von X) und eine Abbildung $\Phi : X \to \beta X$ mit folgenden Eigenschaften:*
i) Φ ist ein Homöomorphismus von X auf $\Phi(X)$ versehen mit der Spurtopologie von βX.
ii) $\Phi(X)$ ist dicht in βX.
iii) Für jede Funktion f aus $C_b(X)$ (komplexwertige stetige beschränkte Funktionen auf X) gibt es eine Funktion $F \in C(\beta X)$ mit $f(x) = F(\Phi(x)) \quad \forall x \in X$, d.h. $f \circ \Phi^{-1}$ kann stetig von $\Phi(X)$ auf βX fortgesetzt werden.
iv) Die kompakte Menge βX ist bis auf Homöomorphie durch obige Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Beweis: Da in vollständig regulären Räumen stetige Funktionen punktetrennend operieren (d.h. für $x \neq y$ gibt es $f \in C_b(X)$ mit $f(x) \neq f(y)$) ist die Abbildung $\Phi : X \to \Delta,\ x \mapsto m_x$ aus Satz 1.3.4 injektiv.

Ist $x \in X$ und U eine Umgebung von x, so gibt es wegen der vollständigen Regularität von X ein $f \in C_b(X)$ mit $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$ für $y \in U^\complement$. Es folgt $\Phi(x) \in \{m : \hat{f}(m) > 0\} \subset \Phi(U)$, also ist Φ eine offene injektive Abbildung von X nach $\Phi(X)$. Φ ist nach Satz 1.3.4 auch stetig, also ein Homöomorphismus von X auf $\Phi(X)$ versehen mit der Spurtopologie der Gelfandtopologie.
Für $f \in C_b(X)$ ist die Gelfandtransformierte $\hat{f}$ wegen $f(x) = \hat{f}(m_x) = \hat{f}(\Phi(x))$, $x \in X$ die gesuchte Funktion F.
Ist βX eine Menge mit obigen Eigenschaften, so ist $C_b(X)$ isometrisch isomorph zu $C(\beta X)$. (Die Banachalgebra $C(K)$ ist isometrisch isomorph zu der Banachalgebra von Funktionen auf einer dichten Teilmenge X von K, die durch Restriktion von Funktionen aus $C(K)$ auf X hervorgehen). Die multiplikativen Funktionale auf $C(\beta X)$ sind aber nach Beispiel 1.2.5 genau die Auswertungsfunktionale. Somit kann Δ mit βX identifiziert werden. $\square$

Bemerkung: Eine konkrete Darstellung einzelner Elemente von $\beta X \setminus \Phi(X)$ ist im Allgemeinen auch für einfache Räume X nicht möglich.

Für eine Teilmenge A einer C^*-Algebra $\mathfrak{C}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen C^*-Unteralgebren von $\mathfrak{C}$ die A enthalten die kleinste C^*-Unteralgebra von $\mathfrak{C}$ die A enthält. Sie wird als die von A *erzeugte C^*-Algebra* bezeichnet.
In Hinblick auf Bemerkung 1.2 ist zu erwarten, dass das Spektrum eines Elementes größer wird, wenn man es als Element einer C^*-Unteralgebra auffasst. Wir zeigen dass das Spektrum eines normalen Elements x einer C^*-Algebra unabhängig von der gewählten C^*-Unteralgebra ist, die wir für die Definition von $\sigma(x)$ heranziehen:

Satz 1.3.6 *Ist x ein normales Element einer C^*-Algebra $\mathfrak{C}_0$, die Unteralgebra der C^*-Algebra $\mathfrak{C}_1$ ist, so gilt $\sigma_{\mathfrak{C}_1}(x) = \sigma_{\mathfrak{C}_0}(x)$, wobei $\sigma_{\mathfrak{C}_i}(x)$ das Spektrum von x in der C^*-Unteralgebra $\mathfrak{C}_i$ bezeichnet, also die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ für die $x - \lambda e$ keine Inverse in $\mathfrak{C}_i$ hat.*

Beweis: Wegen Satz 1.3.2 gilt $\max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathfrak{C}_i}\} = \|x\|$ für $i = 0, 1$, x normal. Wir konstruieren unter der Annahme $\sigma_{\mathfrak{C}_1}(x) \neq \sigma_{\mathfrak{C}_0}(x)$ ein normales Element $y^{-1} \in \mathfrak{C}_1$, das diese Bedingung verletzt.
$x - \lambda$ ist sicher in $\mathfrak{C}_1$ invertierbar, wenn es sogar in $\mathfrak{C}_0$ invertierbar ist.
Es genügt also die Annahme, dass $x - \lambda$ in $\mathfrak{C}_1$ aber nicht in $\mathfrak{C}_0$ invertierbar ist auf einen Widerspruch zu führen. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass $\lambda = 0$ gilt und dass $\mathfrak{C}_0$ die von $\{x, x^*\}$ sowie $\mathfrak{C}_1$ die von $\{x, x^*, x^{-1}, x^{*-1}\}$ erzeugten C^*-Algebren sind.
Wir zeigen, dass x in $\mathfrak{C}_0$ invertierbar ist wenn es in $\mathfrak{C}_1$ invertierbar ist.
Da x normal ist, folgt $x^*x^{-1} = x^{-1}xx^*x^{-1} = x^{-1}x^*xx^{-1} = x^{-1}x^*$, also sind beide C^*-Algebren kommutativ.
Wir nehmen an $x \in \mathfrak{C}_0$ ist in $\mathfrak{C}_1$ aber nicht in $\mathfrak{C}_0$ invertierbar und $\|x\| < 1$. Dann ist nach dem Satz von Gelfand-Neimark auch xx^* in $\mathfrak{C}_1$ aber nicht in $\mathfrak{C}_0$ invertierbar, was nach

dem Gelfand'schen Darstellungssatz bedeutet, dass $\min(\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathfrak{C}_1}(xx^*)\}) > 0$ und $\min(\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathfrak{C}_0}(xx^*)\}) = 0$ gilt. Für $y := xx^* + e$ folgt wegen $m(xx^* + e) = m(x)\overline{m(x)} + 1$ mit dem Gelfand'schen Darstellungssatz:

$$1 = \min(\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathfrak{C}_0}(y)\}) < \min(\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathfrak{C}_1}(y)\}).$$

Für die Norm der Inversen y^{-1} gilt aber nach dem Satz von Gelfand-Neimark $\|y^{-1}\| = \|\widehat{y^{-1}}\| = \|\hat{y}^{-1}\| = (\min(\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathfrak{C}_i}(y)\}))^{-1}$, also $\|y^{-1}\|_{\mathfrak{C}_0} > |y^{-1}\|_{\mathfrak{C}_1}$, ein Widerspruch. $\square$

Wir zeigen, dass wir den Gelfandraum der von einem normalen Element x erzeugten kommutativen C^*-Algebra mit dem Spektrum von x identifizieren können. Insbesondere ist also der Gelfandraum solcher C^*-Algebren metrisierbar.

Satz 1.3.7 *Sei $\mathfrak{C}_0$ die von einem normalen Element x erzeugte C^*-Algebra. Dann ist die Abbildung $\Phi : \Delta_{\mathfrak{C}_0} \to \sigma(x)$, $m \mapsto m(x)$ ein Homöomorphismus.*

Beweis: Nach dem Gelfand'schen Darstellungssatz ist Φ surjektiv. Gilt $\hat{x}(m_1) = \hat{x}(m_2)$, so folgt auch $\widehat{x^*}(m_1) = \widehat{x^*}(m_2)$ und wegen der Multiplikativität und Stetigkeit $\hat{y}(m_1) = \hat{y}(m_2)$ für alle $y \in \mathfrak{C}_0$. Also ist Φ injektiv.
Wegen $\Phi(m) = m(x) = \hat{x}(m)$ und $\hat{x} \in C(\Delta_{\mathfrak{C}_0})$ ist Φ stetig. Da jede stetige Bijektion zwischen kompakten Hausdorffräumen ein Homöomorphismus ist, folgt die Behauptung. $\square$

Kapitel 2

Spektralsätze

Die unter vielen Gesichtspunkten einfachste und anschaulichste Klasse von Operatoren aus $L(L_2(X))$ sind Multiplikationsoperatoren $T_f : g \mapsto fg$ mit einer beschränkten messbaren Funktion f auf X. Wir werden zeigen, dass jeder beschränkte normale Operator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ eine Darstellung erlaubt, die der obigen sehr ähnlich ist, indem wir den Spektralsatz für normale Operatoren herleiten.
Für einen *normalen Operator* T (also einen Operator für den $T^*T = TT^*$ gilt) in einer kommutativen C^*-Unteralgebra $\mathfrak{C}$ von $L(\mathcal{H})$ mit diskretem Gelfandraum Δ (wenn also alle Teilmengen von Δ offen sind), sind die charakteristischen Funktionen χ_D für jede Teilmenge $D \subseteq \Delta$ stetige Funktionen, die nach dem Satz von Gelfand-Neimark 1.3.3 wegen $\chi_D = \overline{\chi_D} = \chi_D^2$ der Gelfandtransformierten eines selbstadjungierten also orthogonalen Projektionsoperators E_D entsprechen. Weiters folgt aus den entsprechenden Eigenschaften charakteristischer Funktionen unmittelbar, dass gilt:

$$\begin{aligned}
-- \quad & E_{D_1}E_{D_2} = E_{D_1 \cap D_2} \text{ für } D_{1,2} \subseteq \Delta \\
-- \quad & E_{D_1} + E_{D_2} = E_{D_1 \cup D_2} \text{ für } D_1 \cap D_2 = \emptyset \\
-- \quad & E_\Delta = 1, \quad E_\emptyset = 0.
\end{aligned}$$

Eine Familie orthogonaler Projektoren auf einem Hilbertraum, die diesen Eigenschaften genügt, nennt man eine *Zerlegung der Einheit*.
Der Operator T erlaubt also bei diskretem Gelfandraum die Darstellung

$$T = \sum_{m \in \Delta} \hat{T}(m) E_{\{m\}},$$

wobei diese Reihe in der starken Operatortopologie konvergiert und T hat eine Darstellung als Multiplikationsoperator $\hat{T}$ auf dem Hilbertraum $\bigoplus_{m \in \Delta} E_{\{m\}}$.
Im Allgemeinen ist der Gelfandraum natürlich nicht diskret. Wir werden aber zeigen, dass es für einen normalen Operator T auf $\mathcal{H}$ eine kommutative C^*-Unteralgebra $\mathfrak{C}$ von $L(\mathcal{H})$ gibt, die eine Zerlegung der Einheit $\{E_D\}$ auf $\mathcal{H}$ enthält, wobei D die Borelmengen von

$\sigma(T)$ durchläuft, sodass T eine Integraldarstellung erlaubt, die eine Verallgemeinerung obiger Spektraldarstellung für normale Operatoren mit diskretem Spektrum liefert.

2.1 Spektralsatz für normale Operatoren

Um den normalen Operator T durch eine geeignete Zerlegung der Einheit darstellen zu können wollen wir die von T erzeugte C^*-Algebra so erweitern, dass sie für Borel-Teilmengen D des Spektrums Δ von T orthogonale Projektionsoperatoren E_D enthält. Dazu erweitern wir die Inverse der Gelfandtransformation zu einem $*$-Algebrenhomomorphismus von der Algebra der beschränkten Borel-messbaren Funktionen in eine Unteralgebra von $L(\mathcal{H})$ (Satz 2.1.1) und zeigen dass das Bild dieses Algebrenhomomorphismus im Abschluss der von T erzeugten C^*-Algebra bezüglich der schwachen Operatortopologie ist. In diesem Abschluss finden wir dann die gesuchten Projektionsoperatoren (Satz 2.1.2) als die Bilder der charakteristischen Funktionen χ_D.
Man beachte, dass der Gelfandraum der erweiterten Algebra nicht mit dem der von T erzeugten Algebra übereinstimmt, dass also die Gelfandtransformierte dieses Projektionsoperators nicht notwendigerweise als eine Funktion auf dem Spektrum von T aufgefasst werden kann.
Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}(\Delta)$ den Raum der borelmessbaren beschränkten Funktionen auf Δ versehen mit der Supremumsnorm. Da der Grenzwert messbarer Funktionen messbar ist, ist $\mathcal{B}(\Delta)$ ein Banachraum.
Unter der *schwachen Operatortopologie* verstehen wir die von den Seminormen $p_{x,y}$, $x, y \in \mathcal{H}$ durch $p_{x,y}(T) = |(Tx, y)|$ induzierte lokalkonvexe Topologie auf $L(\mathcal{H})$. Die *starke Operatortopologie* ist die von den Seminormen p_x, $x \in \mathcal{H}$ durch $p_x(T) = \|Tx\|$ induzierte lokalkonvexe Topologie auf $L(\mathcal{H})$.

Satz 2.1.1 *Es sei $\mathfrak{C} \subset L(\mathcal{H})$ eine kommutative C^*-Algebra mit Gelfandraum Δ. Dann kann der durch den Satz von Gelfand-Neimark gegebene *-Isomorphismus Φ_0 von $C(\Delta)$ auf $\mathfrak{C}$ (Inverse der Gelfandtransformation) so zu einem *-Homomorphismus Φ mit $\|\Phi\| = 1$ von $\mathcal{B}(\Delta)$ in eine kommutative C^*-Unteralgebra von $L(\mathcal{H})$ fortgesetzt werden, dass aus der punktweisen Konvergenz einer Folge (f_n) gleichmäßig beschränkter messbarer Funktionen $f_n \in \mathcal{B}(\Delta)$ gegen f_0 die Konvergenz von $\Phi(f_n)$ gegen $\Phi(f_0)$ in der schwachen Operatortopologie folgt.*

(Der punktweise Grenzwert messbarer Funktionen ist immer messbar!)
Beweis: Für $x, y \in \mathcal{H}$ ist die Abbildung $C(\Delta) \to \mathbb{C} : f \mapsto (\Phi_0(f)x, y)$ nach dem Satz von Gelfand-Neimark 1.3.3 ein durch $\|x\|\|y\|$ beschränktes lineares Funktional auf $C(\Delta)$, das nach dem Satz von Riesz durch ein eindeutiges reguläres Borelmaß $\mu_{x,y}$ auf Δ mit $\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$ dargestellt werden kann:

$$(\Phi_0(f)x, y) = \int_\Delta f \, d\mu_{x,y} \quad \forall f \in C(\Delta). \tag{2.1}$$

Offensichtlich gilt $\mu_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y} = \lambda_1 \mu_{x_1,y} + \lambda_2 \mu_{x_2,y}$ und wegen

$$\int_\Delta \bar{f}\, d\,\overline{\mu_{x,y}} = \overline{\int_\Delta f\, d\mu_{x,y}} = \overline{(\Phi_0(f)x, y)} = (y, \Phi_0(f)x) = (\Phi_0(f)^* y, x) = \int_\Delta \bar{f}\, d\mu_{y,x}$$

folgt

$$\overline{\mu_{x,y}} = \mu_{y,x}. \tag{2.2}$$

Also ist für $f \in C(\Delta)$ die Abbildung $B_f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \int_\Delta f\, d\mu_{x,y}$ eine durch $\|f\|$ beschränkte Sesquilinearform (d.h. $|\int_\Delta f\, d\mu_{x,y}| \leq \|x\|\|y\|\|f\|_\infty$).
Durch (2.1) wird aber nicht nur für $f \in C(\Delta)$, sondern für alle beschränkten Borel-messbaren Funktionen f eine beschränkte Sesquilinearform B_f : $B_f(x, y) = \int_\Delta f\, d\mu_{x,y}$, $|B_f(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$ erklärt. Da die Abbildung $x \mapsto B_f(x, y)$ linear und beschränkt ist gibt es nach dem Darstellungssatz von Riesz für stetige Funktionale im Hilbertraum ein $z_f(y)$ mit $B_f(x, y) = (x, z_f(y))$. Da B_f und das Skalarprodukt in der zweiten Komponente konjugiert linear sind, ist die Abbildung $y \mapsto z_f(y)$ linear. Es folgt $\|z_f(y)\| \leq M_f\|y\|$, also ist diese Abbildung stetig. Ihre Adjungierte $\Phi(f)$ erfüllt dann

$$(\Phi(f)x, y) = B_f(x, y) = \int_\Delta f\, d\mu_{x,y} \quad \forall f \in \mathcal{B}(\Delta). \tag{2.3}$$

Für stetiges f gilt offensichtlich $\Phi(f) = \Phi_0(f)$. Weiters ist Φ klarerweise eine lineare Abbildung von $\mathcal{B}(\Delta)$ nach $L(\mathcal{H})$, also ist Φ als lineare Abbildung eine Erweiterung der Inversen der Gelfandtransformation.
Wegen $\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$ gilt $\|\Phi\| \leq 1$.
Wir zeigen, dass Φ ein *-Algebrenhomomorphismus von $\mathcal{B}(\Delta)$ nach $L(\mathcal{H})$ ist:
Für $f, g \in C(\Delta)$ gilt nach dem Satz von Gelfand-Neimark 1.3.3

$$\int_\Delta fg\, d\mu_{x,y} = (\Phi(fg)x, y) = (\Phi(f)\Phi(g)x, y) = \int_\Delta f\, d\mu_{\Phi(g)x,y}.$$

Mit dem Satz von Riesz folgt $g\mu_{x,y} = \mu_{\Phi(g)x,y}$. Für $F \in \mathcal{B}(\Delta)$, $g \in C(\Delta)$ gilt somit:

$$(\Phi(Fg)x, y) = \int_\Delta Fg\, d\mu_{x,y} = \int_\Delta F\, d\mu_{\Phi(g)x,y} = (\Phi(F)\Phi(g)x, y),$$

also $\Phi(Fg) = \Phi(F)\Phi(g)$. Daraus folgt für alle $g \in C(\Delta)$:

$$\int_\Delta Fg\, d\mu_{x,y} = (\Phi(F)\Phi(g)x, y) = \int_\Delta g\, d\mu_{x,\Phi(F)^* y},$$

also $F\mu_{x,y} = \mu_{x,\Phi(F)^* y}$.
Für $F, G \in \mathcal{B}(\Delta)$ ergibt sich damit

$$(\Phi(GF)x, y) = \int_\Delta GF\, d\mu_{x,y} = \int_\Delta G\, d\mu_{x,\Phi(F)^* y} = (\Phi(G)x, \Phi(F)^* y) = (\Phi(F)\Phi(G)x, y),$$

also $\Phi(FG) = \Phi(F)\Phi(G)$. Somit ist Φ ein Algebrenhomomorphismus.
Wegen (2.2) gilt

$$(\Phi(\bar{F})x, y) = \int_\Delta \bar{F}\, d\mu_{x,y} = \overline{\int_\Delta F\, d\overline{\mu_{x,y}}} = \overline{\int_\Delta F\, d\mu_{y,x}} = \overline{(\Phi(F)y, x)} = (\Phi(F)^* x, y)$$

und Φ ist ein *-Homomorphismus.
Aus der punktweisen Konvergenz einer beschränkten Folge (f_n) in $\mathcal{B}(\Delta)$ gegen eine Funktion f_0 folgt nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz die Konvergenz der Integrale, also gilt mit der Darstellung (2.3)

$$\lim_{n\to\infty} (\Phi(f_n)x, y) = \lim_{n\to\infty} \int_\Delta f_n\, d\mu_{x,y} = \int_\Delta f_0\, d\mu_{x,y} = (\Phi(f_0)x, y),$$

d.h. die Folge $(\Phi(f_n))$ konvergiert in der schwachen Operatortopologie gegen $\Phi(f_0)$, wenn die Folge (f_n) beschränkt ist und punktweise gegen f_0 konvergiert. □

Eine *W^*-Algebra* oder *Von Neumann Algebra* ist eine C^*-Algebra in $L(\mathcal{H})$ die abgeschlossen in der schwachen Operatortopologie ist.

Satz 2.1.2 *Ist $\mathfrak{C}_T$ die von einem normalen Operator T auf $\mathcal{H}$ erzeugte C^*-Algebra, so ist der Abschluss $\mathfrak{W}_T$ von $\mathfrak{C}_T$ unter der schwachen Operatortopologie eine kommutative C^*-Unteralgebra von $L(\mathcal{H})$, die eine Zerlegung der Einheit (E_D) mit $E_D = \Phi(\chi_D)$ enthält, wobei D die Borelteilmengen von $\sigma(T)$ durchläuft, und Φ der durch Satz 2.1.1 gegebene *-Homomorphismus von $\mathcal{B}(\sigma(T))$ nach $L(\mathcal{H})$ ist.*
Für jede Borelteilmenge D von $\sigma(T)$, $S \in \mathfrak{C}_T$ und $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ gilt

$$E_D S = S E_D \quad \text{und} \quad \|(S - \lambda_0)E_D\| \le \sup\{|\hat{S}(\lambda) - \lambda_0| : \lambda \in D\}.$$

Hierbei identifizieren wir vermöge Satz 1.3.7 den Gelfandraum $\Delta_{\mathfrak{C}_T}$ von $\mathfrak{C}_T$ mit $\sigma(T)$.

Beweis: Der durch Satz 2.1.1 gegebene *-Homomorphismus Φ bildet charakteristische Funktionen von Borelteilmengen von $\sigma(T)$ auf orthogonale Projektoren ab, da Idempotenz und Selbstadjungiertheit unter *-Homomorphismen erhalten bleiben.
Für eine offene Teilmenge O von $\sigma(T)$ ist $f(\lambda) := \min(1, \min\{d(\lambda,\kappa) : \kappa \in \sigma(T) \setminus O)\})$ eine stetige Funktion auf $\sigma(T)$, für die die Folge $f^{1/n}$ für $n \to \infty$ punktweise gegen χ_O konvergiert. Für den durch Satz 2.1.1 erklärten *-Homomorphismus Φ ist $\Phi(\chi_O)$ für jede offene Teilmenge O von $\sigma(T)$ also in $\mathfrak{W}_T$.
Um zu sehen, dass für jede Borelmenge C der Projektor $\Phi(\chi_C)$ in $\mathfrak{W}_T$ ist, betrachten wir die Menge $\mathcal{S}$ aller Borelteilmengen C von $\sigma(T)$, für die $\Phi(\chi_C)$ in $\mathfrak{W}_T$ liegt. Für jede Folge (C_n) paarweise disjunkter Mengen $C_n \in \mathcal{S}$ konvergiert $\sum_{n=1}^N \chi_{C_n}$ punktweise gegen $\chi_{\cup_{n=1}^\infty C_n}$. Damit konvergiert $\sum_{n=1}^N \Phi(\chi_{C_n})$ nach Satz 2.1.1 in der schwachen Operatortopologie gegen $\Phi(\sum_{n=1}^\infty \chi_{C_n})$.

$\mathcal{S}$ ist also ein Mengensystem, das abgeschlossen unter der Bildung abzählbarer Vereinigung paarweise disjunkter Mengen ist. Mit $C \in \mathcal{S}$ gilt auch $C^{\complement} \in \mathcal{S}$. Damit ist $\mathcal{S}$ eine Dynkinsystem. Da $\mathcal{S}$ aber alle offenen Mengen enthält umfasst $\mathcal{S}$ das von den offenen Mengen erzeugte Dynkinsystem. Die offenen Mengen bilden ein durchschnittsstabiles Mengensystem und für durchschnittstabile Mengensysteme ist das erzeugte Dynkinsystem gleich der erzeugten σ-Algebra (vgl. [6]). $\mathcal{S}$ ist also die σ-Algebra der Borelmengen auf $\sigma(T)$.
Hieraus folgt, dass das Bild unter Φ aller einfachen Borel-messbaren Funktionen in $\mathfrak{W}_T$ liegt. Da jede beschränkte messbare Funktion sogar gleichmäßig durch einfache messbare Funtionen approximiert werden kann, sieht man, da aus punktweiser Konvergenz von (f_n) in $\mathcal{B}(\sigma(T))$ die Konvergenz von $\Phi(f_n)$ in der schwachen Operatortopologie folgt, dass das Bild von $\mathcal{B}(\sigma(T))$ unter Φ in $\mathfrak{W}_T$ liegt.
Für eine Borelteilmenge D von $\sigma(T)$ und $S \in \mathfrak{C}_T$ gilt, da Φ nach Satz 2.1.1 Norm 1 hat:

$$\|(S - \lambda_0 \mathrm{Id})E_D\| = \|\Phi((\hat{S} - \lambda_0)\chi_D)\| \leq \|(\hat{S} - \lambda_0)\chi_D\|_\infty = \sup\{|\hat{S}(\lambda) - \lambda_0| : \lambda \in D\}.$$

Die Adjungiertenbildung ist stetig bezüglich der schwachen Operatortopologie (Übungsbeisp. 13), also ist $\mathfrak{W}_T$ eine $* - Algebra$ und als Algebra von Operatoren eine C^*-Algebra. Diese ist kommutativ, da die kommutative Algebra $\mathfrak{C}_T$ schwach-*–dicht in ihr ist (Übungsbeisp. 15). □

Bemerkung: In obigem Beweis wurde im Wesentlichen gezeigt, dass auf einem metrisierbaren topologischen Raum Δ der kleinste Funktionenraum der alle stetigen Funktionen und die Grenzfunktionan punktweise konvergenter Funktionenfolgen enthält der Raum der Borelmessbaren Funktionen ist.

Bemerkung: $\mathfrak{W}_T$ ist für normales T eine kommutative C^*-Algebra. Der Gelfandraum von $\mathfrak{W}_T$ ist aber im Gegensatz zu dem von $\mathfrak{C}_T$ nicht als Teilmenge von $\mathbb{C}$ darstellbar. Man kann zeigen, dass der Gelfandraum jeder kommutativen in der schwachen Operatortopologie abgeschlossenen C^*-Algebra extrem unzusammenhängend ist, das heißt der Abschluß einer offenen Menge ist offen.
Weiters kann man zeigen, dass für konvexe Teilmengen von $L(\mathcal{H})$ der Abschluss bezüglich der schwachen Operatortopologie gleich dem bezüglich der starken Operatortopologie ist, dass also $\mathfrak{W}_T$ zugleich der Abschluss von $\mathfrak{C}_T$ bezüglich der starken Operatortopologie ist.

In der Maßtheorie wird das Integral einer beschränkten messbaren Funktion f auf einem endlichen Maßraum über die Approximation von f durch eine Folge $(f_{\mathcal{A}_n})$ einfacher messbarer Funktionen $f_{\mathcal{A}_n} = \sum_i c_{i,n}\chi_{A_{i,n}}$ definiert: Man zeigt, dass für jede Folge $(f_{\mathcal{A}_n})$ einfacher Funktionen, die gleichmäßig gegen f konvergieren, die Folge $(\sum_i c_{i,n}\mu(A_{i,n}))_n$ konvergiert. Dieser Grenzwert ist dann unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge einfacher Funktionen $\mathcal{A}_n$. Dieselbe Vorgangsweise ermöglicht die Definition von Integralen bezüglich projektorwertiger Maße auf den Borelmengen $\mathscr{B}$ von $\sigma(T)$: Wir betrachten anstatt eines Maßes auf $\sigma(T)$ eine Zerlegung der Einheit E_D, $D \in \mathscr{B}$ von orthogonalen Projektoren, die

-- $\quad E_{\cup_{i\in\mathbb{N}} D_i} x = \sum_{i\in\mathbb{N}} E_{D_i} x$ für $D_i \cap D_j = \emptyset$ für $i \neq j$, $x \in \mathcal{H}$

-- $\quad E_{\sigma(T)} = 1$

erfüllen. Dabei konvergiert die Reihe in der Norm von $\mathcal{H}$, d.h. die Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} E_{D_i}$ konvergiert in der starken Operatortopologie. Sei E_D, $D \in \mathscr{B}$ eine Zerlegung der Einheit in $\mathcal{H}$ und f eine Borel-messbare beschränkte Funktion auf $\sigma(T)$. Dann konvergiert für jede Folge einfacher Borel-messbarer Funktionen $f_{\mathcal{A}_n} = \sum_{i=1}^{N(n)} c_{i,n}\chi_{A_{i,n}}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert, die Folge $\sum_{i=1}^{N(n)} c_{i,n} E_{A_{i,n}}$ in der Operatornorm gegen einen Operator in $L(\mathcal{H})$, den wir mit

$$\int_{\sigma(T)} f\, dE$$

bezeichnen. Wegen der σ-Additivität der Operatoren E_D bezüglich der starken Operatortopologie folgt für diese Integrale auch der Satz von der majorisierten Konvergenz in der starken Operatortopologie.
Für einen Operator $S \in \mathfrak{C}_T$ und eine Folge von Zerlegungen von $\sigma(T)$ in disjunkte Borelmengen $\sigma(T) = \cup_{i=1}^{N(n)} A_{i,n}$, $1 \leq i \leq N(n)$ erhalten wir wegen Satz 2.1.2

$$\left\| S - \sum_{i=1}^{N(n)} c_{i,n} E_{A_{i,n}} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{N(n)} (S - c_{i,n}\mathrm{Id}) E_{A_{i,n}} \right\| \leq \max\{|\hat{S}(\lambda) - c_{i,n}| :\, \lambda \in A_{i,n},\, i \leq N(n)\}.$$

Approximiert demnach die Folge einfacher messbarer Funktionen $f_{\mathcal{A}_n}$ die Gelfandtransformierte $\hat{S}$ eines Operators in $\mathfrak{C}_T$ gleichmäßig, so konvergiert die Folge $\sum_{i=1}^{N(n)} c_{i,n} E_{A_{i,n}}$ in der Norm gegen S. Wir haben also bis auf die Eindeutigkeit bewiesen:

Satz 2.1.3 (Spektralsatz für normale Operatoren) *Für einen normalen Operator T gibt es eine eindeutig bestimmte Zerlegung der Einheit E_D, wobei D die Borelteilmengen von $\sigma(T)$ durchläuft, sodass für jeden Operator S aus der von dem normalen Operator T erzeugten C^*-Algebra $\mathfrak{C}_T$ gilt:*

$$S = \int_{\sigma(T)} \hat{S}\, dE; \quad \textit{speziell gilt für } n \in \mathbb{N}_0 : \quad T^n = \int_{\sigma(T)} \mathrm{Id}^n\, dE \quad (\mathrm{Id}^n = z \mapsto z^n).$$

Beweis: Es bleibt nur noch die Eindeutigkeit der Zerlegung der Einheit zu zeigen. Wären (E_D) und (F_D) Zerlegungen der Einheit mit $T^n = \int \mathrm{Id}^n\, dE = \int \mathrm{Id}^n\, dF$. Dann folgt für $x, y \in \mathcal{H}$

$$(T^n x, y) = \int_{\sigma(T)} \mathrm{Id}^n\, d(Ex, y) = \int_{\sigma(T)} \mathrm{Id}^n\, d(Fx, y)$$

und damit die Gleichheit der Integrale von Polynomen bezüglich Integration nach $d(Ex, y)$ und $d(Fx, y)$. Nach dem Satz von Riesz ensprechen die stetigen linearen Funktionale auf $C(K)$, K kompakt genau den regulären Borelmaßen. Auf metrischen Räumen sind aber alle Borelmaße regulär, also folgt die Gleicheit der Integrale aller stetigen Funktionen und daraus $(E_D x, y) = (F_D x, y)$ für jede Borelteilmenge D von $\sigma(T)$ und $x, y \in \mathcal{H}$. Damit gilt aber $E_D = F_D$ für alle Borelteilmengen D. □

Definiert man für $x, y \in \mathcal{H}$ das Maß $\mu_{x,y}(D) := (E_D x, y)$, so ist die Konvergenz der Folge $\sum_i c_{i,n} E_{A_{i,n}}$ in der schwachen Operatortopologie äquivalent zur Konvergenz der Folge $\sum_i c_{i,n} \mu_{x,y}(A_{i,n})$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Das heißt man kann den Operator $\int f\,dE$ ebenso über die komplexwertigen Maße $\mu_{x,y}$ durch $\int f\,d(Ex, y) = \int f\,d\mu_{x,y}$ definieren.
Der folgende Satz fasst die hergeleiteten Eigenschaften des *-Homomorphismus $f \mapsto f(T)$ zusammen:

Satz 2.1.4 (Messbarer Funktionalkalkül) *Für einen normalen Operator T erfüllt die durch $f \mapsto f(T) = \int_{\sigma(T)} f\,dE$ erklärte Abbildung von $\mathcal{B}(\sigma(T))$ nach $L(\mathcal{H})$ für $f, g \in \mathcal{B}(\sigma(T))$:*

1. $(f + g)(T) = f(T) + g(T)$ *und* $(\alpha f)(T) = \alpha(f(T))$.
2. $(fg)(T) = f(T)g(T)$.
3. $f(T)^* = \overline{f}(T)$, *und* $f(T)$ *normal.*
4. *Gilt* $BE_D = E_D B$ *für alle Borelteilmengen* D, *so folgt* $Bf(T) = f(T)B$.
5. *Ist* (f_n) *eine Folge beschränkter messbarer Funktionen auf* $\sigma(T)$ *und konvergiert* $f_n \to f$ *gleichmäßig, so konvergiert* $f_n(T)$ *in der Norm gegen* $f(T)$.
6. $f(T)$ *ist selbstadjungiert wenn* f *auf* $\sigma(T)$ *reell ist. Ist* f *stetig und* $f(T)$ *selbstadjungiert, so ist* f *reell.*
7. *Ist* f *stetig, so gilt* $\|f(T)\| = \|f\|_{C(\sigma(T))}$.
8. $\|f(T)x\|^2 = \displaystyle\int_{\sigma(T)} |f|^2\,d(Ex, x)$.

Beweis: Für $f \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ und den durch Satz 2.1.1 definierten *-Homomorphismus Φ gilt

$$\Phi(f) = \int_{\sigma(T)} f\,dE,$$

denn beide Seiten stimmen für $f = \chi_A$, A messbar überein. Damit stimmen sie für einfache Funktionen überein. Da sowohl $f \mapsto \Phi(f)$ als auch $f \mapsto \int f\,dE$ stetig bezüglich der Supremumsnorm sind und einfache Funktionen dicht im Raum der messbaren beschränkten Funktionen liegen, stimmen sie auf $\mathcal{B}(\sigma(T))$ überein.

1,2,3,6 folgen unmittelbar aus der Tatsache, dass Φ ein *-Homomorphismus, bzw. für stetige f ein *-Isomorphismus ist.
4,5 folgen aus der Definition des Integrals $\int f\, dE$ als Grenzwert von Summen der Form $\sum_{i=1}^{N(n)} c_{i,n} E_{A_{i,n}}$.
7 gilt, da Φ für stetige f die Inverse der Gelfandtransformation ist (Satz 2.1.1) wegen dem Satz von Gelfand-Neimark 1.3.3.
Unter Verwendung von (2.3) erhalten wir

$$\|f(T)x\|^2 = (f(T)x, f(T)x) = (\bar{f}f(T)x, x) = (\Phi(|f|^2)x, x) = \int_{\sigma(T)} |f|^2 \, d\mu_{x,x}.$$

und $\mu_{x,x}(D) = \int \chi_D \, d\mu_{x,x} = (\Phi(\chi_D)x, x) = (E(D)x, x) = (E(D)x, E(D)x) = \|E(D)x\|^2$, also

$$\|f(T)x\|^2 = \int_{\sigma(T)} |f|^2 \, d\|Ex\|^2$$

$\square$

2.2 Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte und unitäre Operatoren

Für selbstadjungierte bzw. unitäre Operatoren T kann in obigem Spektralsatz aufgrund der Tatsache dass das Spektrum von T reell ist bzw. im Einheitskreis liegt die Zerlegung der Einheit mit einem reellen Parameter dargestellt werden:
Ist T ein beschränkter selbstadjungierter Operator, so ist nach Satz 1.3.2 $\sigma(T)$ reell. Es sei E_λ für $\lambda \in \mathbb{R}$ der Projektor $E_{(-\infty,\lambda]}$ aus dem Spektralsatz für normale Operatoren. Dann gilt

Satz 2.2.1 *Die Funktion $\lambda \mapsto E_\lambda$ ist rechtsseitig stetig bezüglich der starken Operatortopologie. Für jede monoton steigende Folge (λ_i) konvergiert E_{λ_i} in der starken Operatortopologie gegen einen selbstadjungierten Projektionsoperator.*

Beweis: Da auf $\mathcal{B}(\sigma(T))$ für $\lambda \downarrow \lambda_0$ die Funktionen $\chi_{\sigma(T)\cap(-\infty,\lambda]}$ punktweise gegen $\chi_{\sigma(T)\cap(-\infty,\lambda_0]}$ konvergiert, konvergiert $E_\lambda = \Phi(\chi_{\sigma(T)\cap(-\infty,\lambda]})$ für $\lambda \downarrow \lambda_0$ nach Satz 2.1.1 in der schwachen Operatortopologie gegen E_{λ_0}. Also ist $\lambda \mapsto E_\lambda$ eine in der schwachen Operatortopologie rechtsseitig stetige Familie orthogonaler Projektoren. Wegen

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (P^2x, x) = (Px, x)$$

folgt aber aus der Konvergenz von orthogonalen Projektoren in der schwachen Operatortopologie die Konvergenz in der starken Operatortoplogie. $\lambda \mapsto E_\lambda$ ist also eine in der starken Operatortopologie rechtsstetige Funktion auf $\sigma(T)$.

Analog folgt für $\lambda \uparrow \lambda_0$, dass E_λ in der starken Operatortopologie gegen $E_{(-\infty,\lambda)}$ konvergiert. $\square$

Definiert man $E_t = E(\{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \leq t\})$ für $t \in \mathbb{R}$, so ist $t \mapsto E_t$ eine bezüglich der starken Operatortopologie rechtsstetige Funktion von $\mathbb{R}$ in $L(\mathcal{H})$, mit $E_t = 0$ für $t < \min(\sigma(T))$ und $E_t = \mathrm{Id}$ für $t > \max(\sigma(T))$.
Damit lässt sich der Spektralsatz wie folgt formulieren:

Satz 2.2.2 (Spektralsatz f. beschränkte s.a. Operatoren) *Ist der Operator $T \in L(\mathcal{H})$ selbstadjungiert, so gibt es eine eindeutig bestimmte Familie orthogonaler Projektoren E_t, $t \in \Delta$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $E_t E_s = E_s E_t = E_{\min\{s,t\}}$.
2. $\lim\limits_{t \to s+} \|E_t x - E_s x\| = 0 \ \forall x$, *d. h.* $t \mapsto E_t$ *ist rechtsstetig bezüglich der starken Operatortopologie.*
3. $E_t = 0$ *für* $t < \gamma_T := \min\{s : s \in \sigma(T)\}$, $E_t = \mathrm{Id}$ *für* $t > \Gamma_T := \max\{s : s \in \sigma(T)\}$.
4. $E_t T = T E_t \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
5. *Für* $x, y \in H$ *ist die Totalvariation von* $t \mapsto (E_t x, y)$ *durch* $\|x\|\|y\|$ *beschränkt.*
6. *Für jedes Polynom p gilt*

$$(p(T)x, y) = \int_{\mathbb{R}} p(t)\, d(E_t x, y) \quad \forall x, y \in H.$$

Beweis: 1 und 3 folgt aus der Definition der Projektoren E_t.
Die Abbildung $t \mapsto E_t$ ist wie zuvor bemerkt stetig bezüglich der starken Operatortopologie also gilt 2.
4 entspricht 4 von Satz 2.1.4.
Mit den Bezeichnungen vom Beweis von Satz 2.1.1 folgt:

$$(E_t x, y) = (\Phi(\chi_{(-\infty,t]})x, y) = \int_{(-\infty,t]} 1\, d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}((-\infty, t]).$$

Wegen $\|\mu\| \leq \|x\|\|y\|$ (vgl. Beweis von Satz 2.1.1) ist die Totalvariation von $t \mapsto (E_t x, y)$ durch $\|x\|\|y\|$ beschränkt, also gilt 5.
Damit erhalten wir weiters

$$(p(T)x, y) = \int_{\sigma(T)} p(t)\, d\mu_{x,y}(t) = \int_{\sigma(T)} p(t)\, d(E_t x, y),$$

also 6. $\square$

Ein Operator $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ heißt *isometrisch*, oder *Isometrie* wenn $\|Ax\|_{\mathcal{H}_2} = \|x\|_{\mathcal{H}_1}$ $\forall x \in \mathcal{H}_1$ gilt.
Ein Operator $U \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ heißt *unitär*, wenn er isometrisch und surjektiv ist.

Satz 2.2.3 *Ein Operator $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ist genau dann isometrisch wenn $(Ax, Ay) = (x, y)$ $\forall x, y \in \mathcal{H}_1$ gilt.*
Ein Operator $U \in L(\mathcal{H})$ ist genau dann unitär, wenn $U^{-1} = U^*$ gilt.

Beweis: Ist A isometrisch, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= ((x+y),(x+y)) - ((Ax+Ay),(Ax+Ay)) = (x,y) + (y,x) - (Ax,Ay) - (Ay,Ax) \\ &= 2\mathrm{Re}((x,y) - (Ax,Ay)) \end{aligned}$$

und mit ix statt x: $\mathrm{Im}((x,y) - (Ax,Ay)) = 0$.
Gilt $U^* = U^{-1}$, so folgt $\forall x, y \in \mathcal{H}$:

$$(x,y) = (x, U^{-1}Uy) = (x, U^*Uy) = (Ux, Uy),$$

also ist U isometrisch. Da jeder invertierbare Operator surjektiv ist folgt, dass U unitär ist.
Ist U unitär, so folgt $(U^*Ux, y) = (Ux, Uy) = (x, y)$, also ist U^* die Linksinverse von U.
Ist U surjektiv, so gibt es für $z \in \mathcal{H}$ ein $y \in \mathcal{H}$ mit $z = Uy$. Es folgt $UU^*z = UU^*Uy = Uy = z$, also ist U^* auch die Rechtsinverse. □

Korollar 2.2.4 *Unitäre Operatoren in $L(\mathcal{H})$ sind normal.*

Ein beschränkter Operator P der $(Px, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ erfüllt heißt *positiv*. Wegen

$$\begin{aligned} 0 \leq &(T(x+\lambda y), x+\lambda y) = (Tx,x) + |\lambda|^2(Ty,y) + \bar{\lambda}(Tx,y) + \lambda(Ty,x) \\ =&(Tx,x) + |\lambda|^2(Ty,y) + \bar{\lambda}(Tx,y) + \lambda\overline{(T^*x,y)} \end{aligned}$$

folgt $\bar{\lambda}(Tx,y) + \lambda\overline{(T^*x,y)} \in \mathbb{R}$ und damit für $\lambda = 1$: $\mathrm{Im}(Tx,y) - \mathrm{Im}(T^*x,y) = 0$ und für $\lambda = \mathrm{i}$: $-\mathrm{Re}(Tx,y) + \mathrm{Re}(T^*x,y) = 0$, also $(Tx,y) = (T^*x,y)$, d.h. T ist selbstadjungiert.

Satz 2.2.5 (v. d. Polarzerlegung) *Sei $T \in L(\mathcal{H})$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Operatoren U, P mit*

$$T = UP,$$

wobei P ein positiver Operator und U eine partielle Isometrie auf $\overline{\mathcal{R}(P)}$ ist, d.h. für $x \in \mathcal{R}(P)$ gilt $\|Ux\| = \|x\|$ und für $x \in \mathcal{R}(P)^\perp$ gilt $Ux = 0$.
Außerdem gilt: $P = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ und für invertierbares T ist U eine Isometrie.

Beweis: T^*T ist selbstadjungiert und wegen $\widehat{T^*T} = |\hat{T}|^2$ folgt mit Satz 1.3.3 $\sigma(T^*T) \subseteq \mathbb{R}_0^+$. Somit existiert eine positive Quadratwurzel $P := \int \mathrm{Id}^{\frac{1}{2}}\, dE$ von T^*T.
Wir definieren eine Abbildung

$$V : \mathcal{R}(P) \to \mathcal{R}(T), \quad V(Px) := Tx \quad \forall x \in H.$$

Diese ist wegen $Px = 0 \Rightarrow T^*Tx = 0 \Rightarrow (T^*Tx, x) = 0 \Rightarrow Tx = 0$ wohldefiniert. V ist linear und wegen $\|Vy\| = \|Tx\| = \|Px\| = \|y\|$ für $y = Px$ isometrisch.
Sei $\widetilde{V}$ die stetige Fortsetzung von V auf $\overline{\mathcal{R}(P)}$. Dann wird durch

$$Ux := \left\{ \begin{array}{ll} \widetilde{V}x & x \in \overline{\mathcal{R}(P)} \\ 0 & x \in \mathcal{R}(P)^{\perp} \end{array} \right\}$$

eine partielle Isometrie definiert. Wegen

$$UPx = VPx = Tx \quad \forall x \in H$$

ist UP die gewünschte Zerlegung von T.
Wegen $(T^*Tx, y) = (UPx, UPy) = (Px, Py) = (P^2x, y)$ ist zunächst P^2 eindeutig durch $P^2 = T^*T$ bestimmt. Für jeden positiven (d.h. selbstadjungiert mit nichtnegativem Spektrum) Operator Q, der ebenfalls $Q^2 = T^*T$ erfüllt, enthält die von Q erzeugte C^*-Algebra $\mathfrak{C}_Q$ den Operator T^*T und damit die von T^*T erzeugte C^*-Algebra $\mathfrak{C}_{T^*T}$ die P enthält. In jeder C^*-Algebra folgt aber mit dem Satz von Gelfand-Neimark 1.3.3 aus $Q^2 = P^2$ für P, Q positiv, dass $P = Q$ gilt, da die Gelfandtransformierte von P^2 eine eindeutige positive Quadratwurzel besitzt.
Damit ist klarerweise auch die partielle Isometrie auf $\overline{\mathcal{R}(T)}$ eindeutig.
Für invertierbare T gilt $\mathcal{R}(T) = H$, also ist U eine Isometrie auf H. □

Satz 2.2.6 *Ist U ein unitärer Operator, so gilt $\sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Beweis: Da U isometrisch ist, folgt $r(U) = 1$. Mit U ist aber auch U^{-1} wegen

$$U^{-1^{-1}} = U = U^{**} = U^{-1^*}$$

unitär, damit gilt $r(U^{-1}) = 1$. Betrachtet man U und U^{-1} als Elemente der von U erzeugten C^*-Algebra mit Gelfandraum $\sigma(U)$, so folgt aus dem Gelfand'schen Darstellungssatz, dass

$$\sigma(U^{-1}) = \{m(U^{-1}) : m \in \sigma(U)\} = \{m(U)^{-1} : m \in \sigma(U)\} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(U)\}$$

gilt und damit die Behauptung. □

Wir können demnach die Spektralwerte eines unitären Operators U mit einer Teilmenge von $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : t \in [0, 2\pi)\}$ identifizieren und eine mit $[0, 2\pi)$ parametrisierte Zerlegung der Einheit $E_t := E(\sigma(U) \cap \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} : s \in [0, t]\})$ betrachten. Analog zu Satz 2.2.1 zeigt man:

Satz 2.2.7 *Die Funktion $\lambda \mapsto E_\lambda$ ist rechtsseitig stetig bezüglich der starken Operatortopologie. Für jede monoton steigende Folge (λ_i) konvergiert E_{λ_i} in der starken Operatortopologie gegen einen selbstadjungierten Projektionsoperator.*

Analog zum Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren 2.2.2 können wir damit den Spektralsatz 2.1.3 für unitäre Operatoren wie folgt formulieren:

Satz 2.2.8 (Spektralsatz f. unitäre Operatoren) *Ist U unitär, so gibt es eine eindeutig bestimmte Familie orthogonaler Projektoren E_t, $t \in \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $E_s E_t = E_t E_s = E_{\min\{s,t\}}$.
2. $t \mapsto E_t$ *ist rechtsstetig bezüglich der starken Operatortopologie.*
3. $E_t = 0$ *für* $t < 0$, $E_t = 1$ *für* $t \geq 2\pi$.
4. $UE_t = E_t U$.
5. $\forall x, y \in H$ *ist* $(E_t x, y)$ *von beschränkter Variation in* $[0, 2\pi]$.
6. $(Ux, y) = \displaystyle\int_{0-}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, d(E_t x, y)$.
7. *Für trigonometrische Polynome* $p(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$, $|z| = 1$ *gilt*

$$(p(U)x, y) = \int_{0-}^{2\pi} p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, d(E_t x, y).$$

Als Spezialfall von Satz 2.1.4 kann man den Funktionalkalkül für unitäre Operatoren durch Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}\right)\, dE_\lambda$$

formulieren.

Das folgende Beispiel zeigt, dass der Spektralsatz nicht nur in der Operatortheorie von Bedeutung ist, sondern auch bei Fragestellungen die zunächst keinen Zusammenhang mit der Spektraltheorie erkennen lassen:

Für ein endliches Maß μ auf $[0, 2\pi)$ sind die Fourier-Stieltjeskoeffizienten durch

$$\hat{\mu}(n) := \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int}\, d\mu(t), \quad n \in \mathbb{Z}$$

definiert. Die folgende Charakterisierung von Folgen, die Fourier-Stieltjeskoeffizienten positiver Maße sind, wird mit dem Spektralsatz bewiesen:

Satz 2.2.9 (Bochner) *Eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$ ist genau dann die Koeffizientenfolge der Fourier-Stieltjestransformierten eines positiven endlichen Maßes auf $[0, 2\pi)$, wenn für jede endliche Folge $(a_n)_{|n|<N}$ in $\mathbb{C}$ gilt:*

$$0 \leq \sum_{n,m} a_n \overline{a_m} c_{n-m}. \tag{2.4}$$

Beweis: Für ein positives Maß μ und ein trigonometrisches Polynom $p(t) = \sum_n a_n \mathrm{e}^{-int}$ gilt:

$$0 \leq \int_0^{2\pi} |p|^2 \, d\mu = \sum_{n,m} a_n \overline{a_m} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)t} \, d\mu(t) = \sum_{n,m} a_n \overline{a_m} \hat{\mu}(n-m),$$

also erfüllen die Fourier-Stieltjeskoeffizienten eines positiven Maßes die Bedingung (2.4). Gilt (2.4) für eine Folge (c_n), so betrachten wir den Raum $\mathcal{P}$ aller trigonometrischen Polynome. Für $p(t) = \sum a_n \mathrm{e}^{int}$, $\quad q(t) = \sum b_n \mathrm{e}^{int}$ wird durch $\langle p, q\rangle := \sum a_n \overline{b_m} c_{n-m}$ eine Sesquilinearform definiert, die wegen (2.4) positiv semidefinit ist. Sei $\mathcal{N} := \{p \in \mathcal{P} : \langle p, p\rangle = 0\}$. Wegen

$$0 \leq \langle p + \lambda n, p + \lambda n\rangle = \langle p, p\rangle + 2\mathrm{Re}(\bar{\lambda}\langle p, n\rangle), \quad \lambda \in \mathbb{C},\, n \in \mathcal{N},\, p \in \mathcal{P}$$

folgt $\langle p, n\rangle = 0$ für $p \in \mathcal{P}$, $n \in \mathcal{N}$. Also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf dem Faktorraum $\mathcal{Q} := \mathcal{P}/\mathcal{N}$ wohldefiniert und positiv definit. Sei der Hilbertraum $\mathcal{H}$ die Vervollständigung von $\mathcal{Q}$ bezüglich diesem Skalarprodukt. Für $e_k(t) = \mathrm{e}^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$ und $p, q \in \mathcal{P}$ gilt $\langle p, q\rangle = \langle e_k p, e_k q\rangle$, also ist die Abbildung $p \mapsto e_{-1}p$ eine surjektive Isometrie auf $\mathcal{P}$, die den Unterraum $\mathcal{N}$ in sich abbildet. Sie kann demnach als eine Abbildung auf den Äquivalenzklassen aus $\mathcal{Q}$ erklärt werden. Die stetige Fortsetzung dieser Isometrie auf $\mathcal{H}$ ist dann eine unitäre Abbildung U. Es gilt, wenn $\tilde{e}_n$ die Äquivalenzklasse in $\mathcal{Q}$ des trigonometrischen Monoms $t \mapsto \mathrm{e}^{int}$ bezeichnet:

$$\langle U^{-n}\tilde{e}_0, \tilde{e}_0\rangle = \langle \tilde{e}_n, \tilde{e}_0\rangle = c_n.$$

Andererseits gilt nach dem Spektralsatz:

$$\langle U^{-n}\tilde{e}_0, \tilde{e}_0\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int} \, d\langle E_t\tilde{e}_0, \tilde{e}_0\rangle,$$

wobei die Funktion $t \mapsto \langle E_t\tilde{e}_0, \tilde{e}_0\rangle$ monoton steigend ist und deshalb die Verteilungsfunktion eines positiven endlichen Maßes μ ist. Also gilt $c_n = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int} \, d\mu = \hat{\mu}(n)$ mit dem endlichen positiven Maß μ. □

2.3 Darstellung als Multiplikationsoperator

$x_0 \in \mathcal{H}$ heißt *zyklisch* unter $\mathfrak{C} \subset L(\mathcal{H})$, wenn $\{Sx_0 : S \in \mathfrak{C}\}$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt. Wir zeigen, dass unter der Annahme, dass $\mathcal{H}$ ein unter der von dem normalen Operator T erzeugten

*-Algebra $\mathfrak{C}_T$ zyklisches Element enthält, die Operatoralgebra $\mathfrak{C}_T$ resp. $\mathfrak{W}_T$ als Algebra von Multiplikationsoperatoren mit Funktionen aus $C(\sigma(T))$ resp. $L_\infty(\sigma(T), \mu_0)$ auf $L_2(\sigma(T), \mu_0)$ mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaß μ_0 auf $\sigma(T)$ dargestelt werden kann:

Satz 2.3.1 *Hat $\mathcal{H}$ ein Element das unter der von dem normalen Operator T erzeugten C^*-Algebra $\mathfrak{C}_T$ zyklische ist, so gibt es ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ_0 mit Träger $\sigma(T)$ und eine unitäre Abbildung U von $\mathcal{H}$ auf $L_2(\sigma(T), \mu_0)$, sodass die durch U induzierte Abbildung $\tilde{U}$ von $L(\mathcal{H})$ auf $L(L_2(\sigma(T), \mu_0))$: $\tilde{U}(S) = USU^{-1}$ die W^*-Algebra $\mathfrak{W}_T$ auf den Raum $\mathcal{M}$ aller Multiplikationsoperatoren M_F auf $L_2(\sigma(T), \mu_0)$ mit $F \in L_\infty(\sigma(T), \mu_0)$ abbildet. Für $S \in \mathfrak{C}_T$ gilt $\tilde{U}(S) = M_{\hat{S}}$, d.h. $\tilde{U}$ ist eine Erweiterung der Gelfandtransformation, wenn man die Gelfandtransformierten $\hat{S}$ als Multiplikationsoperatoren $M_{\hat{S}}$ auf $L_2(\sigma(T), \mu_0)$ auffasst. Insbesondere ist $\tilde{U}(T)$ der Multiplikationsoperator M_{Id}: $M_{\mathrm{Id}} f(z) = z f(z)$.*

Beweis: Für den zyklischen normierten Vektor x_0 bezeichne μ_0 das Maß μ_{x_0,x_0}, wie durch (2.1) definiert, also $\int f \, d\mu_{x_0.x_0} = (\phi_0(f)x_0, x_0)$ mit der Inversen Φ_0 der Gelfandtransformation. Wegen

$$\int_{\sigma(T)} |f|^2 \, d\mu_0 = (\Phi_0(f)^* \Phi_0(f) x_0, x_0) = \|\Phi_0(f) x_0\|^2 \geq 0, \quad f \in C(\sigma(T))$$

ist μ_0 ein positives Maß und wegen $\int_{\sigma(T)} 1 \, d\mu_0 = \|x_0\|^2 = 1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(T)$.
Der Träger von μ_0 ist $\sigma(T)$, anderenfalls gäbe es eine nichttriviale stetige Funktion f auf $\sigma(T)$ mit $\int_{\sigma(T)} |f|^2 \, d\mu_0 = \|\Phi_0(f) x_0\|^2 = 0$. Da x_0 zyklisch ist folgt aber aus $0 = S\Phi_0(f)x_0 = \Phi_0(f)Sx_0$ für $S \in \mathfrak{C}_T$, dass der Operator $\Phi_0(f)$ auf der dichten Teilmenge $\{Sx_0 : S \in \mathfrak{C}_T\}$ von $\mathcal{H}$ verschwindet und deshalb 0 ist. Da die Gelfandtransformierte ein Isomorphismus ist, folgt $f = 0$ im Widerspruch zur Annahme.
Wir definieren eine Isometrie U von $\mathcal{H}$ auf $L_2(\sigma(T), \mu_0)$: Für $y = Sx_0$ mit $S \in \mathfrak{C}_T$ sei $Uy = \hat{S}$ damit folgt

$$\|Sx_0\|^2 = (S^* S x_0, x_0) = \int_{\sigma(T)} |\hat{S}|^2 \, d\mu_0,$$

also gilt $\|y\|_{\mathcal{H}} = \|\hat{S}\|_{L_2(\sigma(T),\mu_0)}$. Insbesondere ist U auf $\mathfrak{C}_T x_0$ wohldefiniert, da aus $Sx_0 = 0$ folgt $0 = RSx_0 = SRx_0 \; \forall R \in \mathfrak{C}_T$ und daraus $S = 0$, da x_0 zyklisch ist. Nach dem Satz von Gelfand-Neimark gilt $\{\hat{S} : S \in \mathfrak{C}_T\} = C(\sigma(T))$. Die auf $\sigma(T)$ stetigen Funktionen liegen dicht in $L_2(\sigma(T), \mu_0)$ und da x_0 zyklisch ist, ist $\mathfrak{C}_T x_0$ dicht in $\mathcal{H}$. Damit kann U als Isometrie zwischen dichten Teilmengen der Hilberträume $\mathcal{H}$ und $L_2(\sigma(T), \mu_0)$ stetig zu einer unitären Abbildung von $\mathcal{H}$ auf $L_2(\sigma(T), \mu_0)$ fortgesetzt werden, die wir ebenfalls mit U bezeichnen.
Für $R, S \in \mathfrak{C}_T$ folgt

$$URSx_0 = \widehat{RS} = \hat{R}\hat{S} = \hat{R}USx_0 = M_{\hat{R}} USx_0,$$

also $U^{-1} M_{\hat{R}} U = R$ bzw. $\tilde{M}_{\hat{R}} = URU^{-1}$ wobei $M_{\hat{R}}$ den Multiplikationsoperator $f \mapsto \hat{R}f$ auf $L_2(\sigma(T), \mu_0)$ bezeichnet.

Die unitäre Abbildung U induziert durch $\tilde{U}(R) = URU^{-1}$ eine Isometie $\tilde{U}$ von $L(\mathcal{H})$ auf $L(L_2(\sigma(T), \mu_0)$. Wegen $(Sx, y) = (USx, Uy) = (\tilde{S}Ux, Uy) = (M_{\hat{S}}Ux, Uy)$ ist das Bild unter $\tilde{U}$ von $\mathfrak{W}_T$ genau der Abschluss von $\tilde{U}\mathfrak{C}_T$ unter der schwachen Operatortopologie in $L_2(\sigma(T), \mu_0)$.
Es bleibt also zu zeigen, dass der Raum $\mathcal{M}$ der Multiplikationsoperatoren $\{M_\Psi : \Psi \in L_\infty(\sigma(T), \mu_0)\}$ der Abschluss des Raumes $\mathcal{M}_c := \{M_{\hat{S}} : \hat{S} \in C(\sigma(T))\}$ in $L(L_2(\sigma(T), \mu_0))$ bezüglich der schwachen Operatortopologie ist.
Da die Algebra $C(\sigma(T))$ vermöge $h \mapsto M_h$ isometrisch *-isomorph zu $\mathcal{M}_c$ ist, kann der Gelfandraum von $\mathcal{M}_c$ wegen Beispiel 1.2.5 mit $\sigma(T)$ identifiziert werden und es gilt $\widehat{M_h} = h$. Es folgt für $x, y \in L_2(\sigma(T), \mu_0)$ und $h \in C(\sigma(T))$ und die durch (2.1) definierten Maße $\mu_{x,y}$:

$$\int_{\sigma(T)} hx\bar{y}\, d\mu_0 = (M_h x, y) = \int_{\sigma(T)} \widehat{M_h}\, d\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} h\, d\mu_{x,y},$$

also $x\bar{y}\mu_0 = \mu_{x,y}$. Damit erhalten wir für den gemäß (2.3) definierten Homomorphismus Φ und eine Borelmenge D in $\sigma(T)$:

$$\int_{\sigma(T)} \Phi(\chi_D)x\bar{y}\, d\mu_0 = (\Phi(\chi_D)x, y) = \int_{\sigma(T)} \chi_D\, d\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} \chi_D x\bar{y}\, d\mu_0,$$

also $\Phi(\chi_D) = M_{\chi_D}$. Die Algebra $\mathcal{M}_c$ wird von dem Operator M_{Id} erzeugt. Nach Satz 2.1.2 liegt für jede Borelteilmenge D der Operator $\Phi(\chi_D) = M_{\chi_D}$ in $\mathfrak{W}_{M_{\mathrm{Id}}}$. Der Normabschluss der linearen Hülle der Operatoren M_{χ_D} ist aber genau $\mathcal{M}$. Somit gilt, da der Normabschluß kleiner als der Abschluß in der schwachen Operatortopologie ist $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{W}_{M_{\mathrm{Id}}}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ abgeschlossen in der schwachen Operatortopologie ist.
Da $\mathfrak{W}_{M_{\mathrm{Id}}}$ kommutativ ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ eine maximale abelsche Operatoralgebra ist. Hierfür zeigen wir, dass jeder Operator $S \in L(L_2(\sigma(T), \mu_0))$ der mit allen Operatoren aus $\mathcal{M}$ kommutiert, selbst in $\mathcal{M}$ liegt:
Sei $F := S1 \in L_2(\sigma(T), \mu_0)$. Es folgt für jede Borelmenge D aus $\sigma(T)$

$$S\chi_D = SM_{\chi_D}1 = M_{\chi_D}S1 = \chi_D F.$$

Es gilt $F \in L_\infty(\sigma(T), \mu_0))$ da anderenfalls S nicht beschränkt wäre. Für eine einfache Funktion $f = \sum a_i\chi_{D_i}$ folgt $Sf = M_F f$. Da einfache Funktionen dicht in $L_2(\sigma(T), \mu_0)$ liegen folgt $S = M_F$. Demnach ist jeder Operator aus dem Kommutator von $\mathcal{M}$ selbst in $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}$ somit eine maximale abelsche Operatoralgebra. □

Für die von der Identität Id erzeugte C^*-Unteralgebra $\{\lambda\mathrm{Id} : \lambda \in \mathbb{C}\}$ vom $L(\mathcal{H})$ gibt es kein zyklisches Element. Wegen $\sigma(\mathrm{Id}) = \{1\}$ ist der Raum $L_2(\sigma(\mathrm{Id}), \mu_0)$ eindimensional und es gibt keine unitäre Abbildung von $\mathcal{H}$ auf $L_2(\sigma(T)_{\mathrm{Id}}, \mu_0)$. In Satz 2.3.1 kann man also auf die sehr starke Forderung der Existenz eines zyklischen Elementes nicht verzichten. Man kann allerdings zeigen, dass es zu jeder maximalen abelschen C^*-Algebra in $L(\mathcal{H})$ ein zyklisches

Element in $\mathcal{H}$ gibt. Im Allgemeinen kann man also $\mathcal{H}$ nicht in natürlicher Weise mit $L_2(\sigma(T))$ identifizieren.
Unter der *disjunkten Vereinigung* vom Mengen X_i versteht man die Vereinigung der Mengen (i, X_i), das heißt man unterscheidet in der disjunkten Vereinigung gleiche Elemente aus verschiedenen Mengen. In unserem Zusammenhang betrachten wir die höchstens abzählbare disjunkte Vereinigung von Teilmengen X_i, $i \in \mathbb{N}$ der beschränkten Menge $\sigma(T)$. Diese können anstatt der obigen Vereinigung geordneter Paare auch als gewöhnliche Vereinigung der paarweise disjunkten Mengen $X_i + Mi$ mit einem geeigneten $M \in \mathbb{R}$, das sicherstellt dass $X_i + Mi \cap X_j \cap Mj = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt, geschrieben werden. Es gilt dann:

Satz 2.3.2 *Ist T ein normaler Operator in $L(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ separabel, so gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum (Λ, ν) und eine unitäre Abbildung U von $\mathcal{H}$ auf $L_2(\Lambda, \nu)$, sodass USU^{-1} für alle $S \in \mathfrak{C}_T$ ein Multiplikationsoperator M_{ψ_S} ist. Λ kann als disjunkte Vereinigung von höchstens abzählbar vielen abgeschlossenen Teilmengen von $\sigma(T)$ aufgefasst werden auf denen ψ_S dann mit $\hat{S}$ übereinstimmt.*

Beweis: Ein abgeschlossener T-invarianter Teilraum $\mathcal{H}_i$ von $\mathcal{H}$ heißt *zyklisch*, wenn $\mathcal{H}_i$ ein unter $\mathfrak{C}_T$ zyklisches Element x_i enthält, wenn also $\mathfrak{C}_T x_i$ dicht in $\mathcal{H}_i$ ist.
Wir betrachten die Menge aller Mengen $\mathscr{L} = \{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ paarweise orthogonaler $\mathfrak{C}_T$-invarianter zyklischer Teilräume $\mathcal{H}_i$ von $\mathcal{H}$ und ordnen diese durch Mengeninklusion. Jede Kette $(\mathscr{L}_j)$ hat dann die Menge $\{\mathcal{H}_i : \exists j : \mathcal{H}_i \in \mathscr{L}_j\}$ als obere Schranke. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element $\mathscr{L}_0$.
Angenommen $L_0 := \overline{\oplus_{\mathcal{H}_i \in \mathscr{L}_0} H_i} \neq \mathcal{H}$. Dann gibt es $0 \neq x_0 \in L_0^\perp = \cap H_i^\perp$. Für $S \in \mathfrak{C}_T$ und $y_i \in \mathcal{H}_i$ folgt , da mit y_i auch $S^* y_i$ in $\mathcal{H}_i$ liegt wegen $(Sx_0, y_i) = (x_0, S^* y_i) = 0$, dass $Sx_0 \in \mathcal{H}_i^\perp$ gilt. Damit ist aber $\mathscr{L}_0 \cup \{\overline{\mathfrak{C}_T x_0}\}$ eine Menge paarweise orthogonaler zyklischer Teilräume im Widerspruch zur Maximalität von $\mathscr{L}_0$.
Es gibt also eine Zerlegung von $\mathcal{H} = \oplus_{i \in \mathscr{I}} \mathcal{H}_i$ in paarweise orthogonale unter $\mathfrak{C}_T$ invariante zyklische Teilräume. Da $\mathcal{H}$ separabel ist, können wir $\mathscr{I} = \mathbb{N}$ oder $\mathscr{I} = \{1, \ldots n\}$ wählen. Nach Satz 2.3.1 gibt es für jeden Teilraum $\mathcal{H}_i$ eine unitäre Abbildung auf $L_2(\sigma(T|_{\mathcal{H}_i}), \mu_i)$ mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ_i auf $\sigma(T|_{\mathcal{H}_i})$. Diese induziert eine unitäre Abbildung U_i von $\mathcal{H}_i$ auf $L_2(\sigma(T|_{\mathcal{H}_i}), \alpha_i \mu_i)$ mit $\alpha_i = 2^{-i}$ für $\mathscr{I} = \mathbb{N}$ bzw. $\alpha_i = |\mathscr{I}|^{-1}$ falls $|\mathscr{I}| < \infty$.
Für $M > 2\|T\|$ ist M größer als der Durchmesser von $\sigma(T)$ und damit sind die Mengen $Mi + \sigma(T)$, $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt. Sei auf $\Lambda := \cup_{i \in \mathbb{N}} Mi + \sigma(T|_{\mathcal{H}_i})$ das Wahrscheinlichkeitsmaß ν durch $\nu(B) = \alpha_i \mu_i (B - Mi)$ für Borelteilmengen B von $Mi + \sigma(T|_{\mathcal{H}_i})$ definiert. Dann induziert die unitäre Abbildung $U := \times_{i \in \mathscr{I}} U_i$,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in \mathscr{I}} \mathcal{H}_i \xrightarrow{U} \bigoplus_{i \in \mathscr{I}} L_2(\sigma(T|_{\mathcal{H}_i}), \alpha_i \mu_i) \cong L_2(\Lambda, \nu)$$

eine unitäre Abbildung $\tilde{U}$ von $L(\mathcal{H})$ auf $L(L_2(\Lambda, \nu))$, unter der ein Operator $S = \times_{i \in \mathscr{I}} S|_{\mathcal{H}_i}$ auf

$$\tilde{U}(S) = USU^{-1} = \times_{i \in \mathscr{I}} U_i S|_{\mathcal{H}_i} U_i^{-1} = \times_{i \in \mathscr{I}} M_{\hat{S}|_{\sigma(T|_{\mathcal{H}_i})}} = M_{\psi_S}$$

mit $\psi_S \in C(\Lambda)$ und $\psi_S|_{Mi+\sigma(T|_{\mathcal{H}_i})} = \hat{S}|_{\sigma(T|_{\mathcal{H}_i})} \circ \tau_{-Mi}$, wobei τ_{-Mi} die Translation $t \mapsto t - Mi$ bezeichnet. $\square$

2.4 Von Neumann Algebren

Satz 2.4.1 *Eine konvexe Teilmenge von $L(\mathcal{H})$ ist ganau dann in der schwachen Operatortopologie abgeschlossen, wenn sie in der starken Operatortopologie abgeschlossen ist.*

Beweis: Da die starke Operatortopologie feiner als die schwache Operatortopologie ist, folgt aus schwach operatorabgeschlossen klarerweise stark operatorabgeschlossen.
Sei $\mathscr{S}$ eine konvexe Teilmenge von $L(\mathcal{H})$ und $T \in L(\mathcal{H})$ im schwachen Operatorabschluss von $\mathscr{S}$, d.h. für $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{H},\ \epsilon > 0$ gibt es ein $S \in \mathscr{S}$ mit

$$|(Tx_i, y_i) - (Sx_i, y_i)| < \epsilon \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Wir betrachten den Hilbertraum $\mathcal{H}^{(n)} := \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}$ (n Kopien). Für $T \in L(\mathcal{H})$ wird durch $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (Tx_1, \ldots, Tx_n)$ ein linearer Operator $T^{(n)}$ aus $L(\mathcal{H}^{(n)})$ sowie ein kanonischer isometrischer $*$-Isomorphismus ϕ von $L(\mathcal{H})$ in $L(\mathcal{H}^{(n)})$ definiert.
Für $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n),\ \mathbf{y} := (y_1, \ldots, y_n)$ folgt aus (2.5): Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}^{(n)},\ \epsilon > 0$ gibt es $S^{(n)} \in \phi(\mathscr{S})$ mit $|(T^{(n)}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) - (S^{(n)}(\mathbf{x}), \mathbf{y})| < \sqrt{n}\epsilon$, d.h. $T^{(n)}(\mathbf{x})$ liegt im $\sigma\left(\mathcal{H}^{(n)}, \mathcal{H}^{(n)\prime}\right)$-Abschluss von $\phi(\mathscr{S})$. Mit $\mathscr{S}$ ist auch $\mathscr{S}^{(n)} := \phi(\mathscr{S})$ konvex, aus dem Satz von Hahn-Banach folgt, dass in einem Banachraum X der $\sigma(X, X')$-Abschluss einer konvexen Menge gleich dem Normabschluss ist. Also liegt $T^{(n)}(\mathbf{x})$ im Normabschluss von $\phi(S)(\mathbf{x}),\ S \in \mathscr{S}$, was bedeutet, dass es für $T^{(n)}$ und $\epsilon > 0$ ein $\phi(S) \in \phi(\mathscr{S})$ gibt mit $\|T^{(n)}(\mathbf{x}) - \phi(S)(\mathbf{x})\| < \epsilon$, also $\|T(x_i) - S(x_i)\| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n$. Damit ist T im starken Opertorabschluss von $\mathscr{S}$. $\square$

Korollar 2.4.2 *Eine *-Algebra ist genau dann eine Von Neumann Algebra wenn sie in der starken Operatortopolgie abgeschlossen ist.*

Satz 2.4.3 (Bikommutantensatz) *Eine selbstadjungierte Operatoralgebra $\mathfrak{B}$ mit Identität auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist stark dicht in ihrem Bikommutanten $\mathfrak{B}''$. Sie ist genau dann eine Von Neumann Algebra, wenn sie gleich ihrem Bikommutanten ist.*

Beweis: Eine Subbasis der starken Operatortopologie ist durch die Mengen $S(C, x, \epsilon) := \{B \in L(\mathcal{H}) : \|Bx - Cx\| < \epsilon\}$, $\epsilon > 0$, $x \in \mathcal{H}$ gegeben. Wir zeigen zuerst, dass es für $C \in \mathfrak{B}''$, $x \in \mathcal{H}$ und $\epsilon > 0$ ein $A \in \mathfrak{B}$ in $S(C, x, \epsilon)$ gibt.
Sei $L_x := \{Ax : A \in \mathfrak{B}\}$, $K_x = \overline{L_x}$ und P_x die orthogonale Projektion auf K_x. Für $z = Ax$ mit $A \in \mathfrak{B}$ folgt für $B \in \mathfrak{B}$: $Bz = BAx \in L_x$. $A \in \mathfrak{B}$ bildet also L_x in sich ab. Aus der Stetigkeit von $B \in \mathfrak{B}$ folgt $B(\overline{L_x}) \subseteq \overline{B(L_x)} \subseteq K_x$, also $B(K_x) \subseteq K_x$, d.h. $B \in \mathfrak{B}$ bildet K_x in sich ab. Für $y \in K_x^\perp$ gilt $(Ax, y) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{B}$. Für $B \in \mathfrak{B}$ folgt $(Ax, By) = (B^*Ax, y)$ und da mit $A, B \in \mathfrak{B}$ auch $B^*A \in \mathfrak{B}$ gilt $(Ax, By) = 0$ für $A, B \in \mathfrak{B}$ und $y \in K : x^\perp$,

also bildet $B \in \mathfrak{B}$ $K_x^\perp$ in sich ab. Es folgt für $z = z_1 + z_2$ mit $z_1 \in K_x$ und $z_2 \in K_x^\perp$ sowie $B \in \mathfrak{B}$: $BP_x z = Bz_1 = P_x Bz_1$ und $BP_x z_2 = 0 = P_x Bz_2$, d.h. $P_x \in A'$. Damit vertauscht jedes $C \in \mathfrak{B}''$ mit P_x, woraus folgt $Cz_1 = CP_x z_1 = P_x Cz_1 \in K_x$, also bildet $C \in \mathfrak{B}''$ K_x in sich ab. Wegen $\mathrm{Id} \in \mathfrak{B}$ folgt $x \in K_x$ also gilt $Cx \in K_x$. Aus der Definition von K_x folgt, dass es für $\epsilon > 0$ ein $A \in \mathfrak{B}$ mit $\|Ax - Cx\| < \epsilon$ gibt, d.h. $A \in S(C, x, \epsilon)$.
Für die Behauptung des Satzes haben wir zu zeigen, dass es für $C \in \mathfrak{B}''$, $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ und $\epsilon > 0$ ein $A \in \mathfrak{B}$ mit $\|(S - T)x_i\| \leq \epsilon$, $i = 1, \dots, n$ gibt. Hierfür berachten wir den Hilbertraum $\mathcal{H}^{(n)} := \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}$ (n Kopien). Für $A \in L(\mathcal{H})$ wird durch $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (Ax_1, \dots, Ax_n)$ ein linearer Operator $A^{(n)}$ auf $\mathcal{H}^{(n)}$ definiert. So wird ein kannischer isometrischer $*$-Isomorphismus ϕ der $*$-Algebra mit Eins $\mathfrak{B}$ in $L(\mathcal{H}^{(n)})$ definiert. Ein Operator T aus $L(\mathcal{H}^{(n)})$ kann als $n \times n$ Matrix mit Eintragungen in $T_{i,j} \in L(\mathcal{H})$ dargestellt werden. Operatoren aus $\phi(A)$ haben dann eine Diagonaldarstellung mit Eintragungen A in der Diagonale. Es folgt, dass $T \in \phi(\mathfrak{B})'$ genau dann gilt, wenn $T_{i,j} \in \mathfrak{B}'$ für alle $i, j \leq n$ gilt. Daraus folgt, dass für $C \in \mathfrak{B}''$ $\phi(C) \in \phi(A)''$ gilt, d.h. wir haben $\phi(\mathfrak{B}'') \subseteq \phi(\mathfrak{B})''$ gezeigt. Wenden wir die Aussage des ersten Schrittes dieses Beweises auf $\mathcal{H}^{(n)}$ und $x = (x_1, \dots, x_n)$ an, so folgt, dass es fr̈ $\epsilon > 0$ und $C \in A''$ ein $A \in \mathfrak{B}$ mit $\|\phi(C)x - \phi(A)x\| \leq \epsilon$ gibt, woraus $\|Cx_i - Ax_i\| \leq \epsilon$ für $1 \leq i \leq n$ folgt, d.h. $\mathfrak{B}$ ist dicht in $\mathfrak{B}''$ bezüglich der starken Operatortopologie.
Ist $\mathfrak{B}$ eine Von Neumann Algebra, so ist sie stark operatorabgeschlossen und damit gleich $\mathfrak{B}''$. Für einen Opertor T aus dem starken Abschluss von $\mathfrak{B}''$ gibt es für jedes $x \in \mathcal{H}$ und $S \in \mathfrak{B}''$ eine Folge T_n in $\mathfrak{B}''$ mit $T_n x \to Tx$ und $T_n Sx \to TSx$. Es folgt $TSx - STx = \lim_{n\to\infty}(T_n S - ST_n)(x) = 0$, also ist $\mathfrak{B}''$ immer abgeschlossen in der starken Operatortoplogie. Da $\mathfrak{B}$ dicht in $\mathfrak{B}''$ ist folgt dass $\mathfrak{B}$ genau dann stark operator Fabgeschlossen ist, wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}''$ gilt. $\square$

Kapitel 3

Unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren

Ein linearer Operator T mit Definitionsbereich $\mathscr{D}(T)$ von einem Banachraum X in den Banachraum Y heißt *abgeschlossen*, wenn sein Graph $\Gamma(f) := \{(x, Tx) : x \in \mathscr{D}(T)\}$ abgeschlossen in $X \times Y$ ist, was äquivalent zu der Eigenschaft ist, dass aus der Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{D}(T)$ gegen x_0 und der Konvergenz der Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y folgt $x_0 \in \mathscr{D}(T)$ mit $Tx_0 = y$.
Die in diesem Kapitel betrachteten Operatoren T von einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ in sich haben einen Definitionsbereich $D(T)$, der dicht in $\mathcal{H}$ liegt, sind abgeschlossen aber nicht notwendigerweise stetig.

3.1 Spektrum und Resolvente eines abgeschlossenen Operators

Definition 3.1.1 *Sei X ein Banachraum, $T : D(T) \to X$ ein linearer abgeschlossener Operator. Wir definieren:*

$$\begin{aligned} \rho(T) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \textit{ ist bijektiv von } D(T) \textit{ auf } X\}, \\ \sigma(T) &:= \mathbb{C} \backslash \rho(T). \end{aligned}$$

$\rho(T)$ heißt Resolventenmenge und $\sigma(T)$ heißt Spektrum *von T.*

Für $\lambda \in \rho(T)$ ist $T - \lambda$ invertierbar. Wir bezeichnen diese Inverse mit

$$R_\lambda(T) := (T - \lambda)^{-1}$$

und nennen $T - \lambda$ *invertierbar* und $R_\lambda(T)$ die *Resolvente von T*.

Da mit T auch $T-\lambda$ abgeschlossen ist und damit auch $(T-\lambda)^{-1}$ falls diese Inverse existiert (der Graph von $T-\lambda$ ist der von $(T-\lambda)^{-1}$ nach Vertauschung der Komponenten) ist also nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen R_λ für $\lambda \in \rho(T)$ ein stetiger Operator.
Wegen $T-\lambda = (T-\mu)+(\mu-\lambda)$ gilt für $\lambda, \mu \in \rho(T)$ $I = R_\lambda(T-\mu)+R_\lambda(\mu-\lambda)$ und $R_\mu = R_\lambda + R_\lambda R_\mu(\mu-\lambda)$ und damit die *Resolventengleichung*:

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu.$$

Wir zerlegen das Spektrum $\sigma(T)$ in folgende paarweise disjunkte Mengen:

$$\begin{aligned}
\sigma_p(T) &:= \{\lambda : T-\lambda \text{ nicht injektiv}\},\\
\sigma_c(T) &= \{\lambda : T-\lambda \text{ injektiv mit dichtem aber nicht surjektivem Bild}\},\\
\sigma_r(T) &:= \{\lambda : T-\lambda \text{ injektiv mit nicht dichtem Bild}\}.
\end{aligned}$$

Da mit T auch $T-\lambda$ und für $\lambda \notin \sigma_p(T)$ auch $(T-\lambda)^{-1}$ abgeschlossen sind, folgt nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, dass für $\lambda \in \rho(T)$ eine auf ganz X definierte Inverse von $T-\lambda$ stetig ist. Umgekehrt ist ein dicht definierter stetiger Operator, der auch abgeschlossen ist notwendigerweise überall definiert, wie man unmittelbar aus der Definition eines abgeschlossenen Operators sieht. Deshalb kann für abgeschlosene Operatoren T $\sigma_c(T)$ auch durch

$$\sigma_c := \{\lambda : T-\lambda \text{ injektiv mit dichtem Bild, aber } (T-\lambda)^{-1} \text{ unstetig}\}$$

definiert werden und die Resolventenmenge ist genau die Menge aller λ für die $T-\lambda$ eine stetige Inverse hat.
$\sigma_p(T)$ heißt *Punktspektrum*, $\sigma_c(T)$ *kontinuierliches Spektrum* und $\sigma_r(T)$ *Residualspektrum* von T.
Offensichtlich ist das Spektrum die disjunkte Vereinigung dieser Teilmengen:

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Satz 3.1.2 *Ist T abgeschlossen, so ist $\rho(T)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf der die Abbildung $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ analytisch ist. Für $\mu \in \rho(T)$ und $|\lambda-\mu| < \|R_\mu\|^{-1}$ folgt $\lambda \in \rho(T)$.*

Beweis: Man verifiziert unmitelbar, dass (1.3) auch für unbeschränkte Operatoren gilt, d.h. für $|\lambda-\mu| < \|R_\mu\|^{-1}$ gilt

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\mu)^n R_\mu(T)^{n+1}$$

also ist $\sigma(T)$ abgeschlossen.
Aus dieser Potenzreihendarstellung folgt auch dass R_λ analytisch ist. □

Beispiel 3.1.3 Auf $L_2([a,b])$ ist der Differentialoperator T: $T(f) = f'$ mit Definitionsbereich $D(T)$, der Menge der auf $[a,b]$ absolut stetigen Funktionen mit Ableitung in $L_2([a,b])$ abgeschlossen. Für absolut stetige Funktionen f auf $[a,b]$ gilt: f ist f.ü. differenzierbar und $f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)\,ds$, umgekehrt ist für $g \in L_1([a,b])$ die Funktion $G(t) = \int_a^t g(s)\,ds$ absolut stetig mit $G'(t) = g(t)$ f.ü. (Hauptsatz der Diff. u. Integralrechnung f. Lebesgueintegrale vgl. Maßtheorie).
Weiters folgt aufgrund der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\|f\|_{L_1([a,b])} \leq \|f\|_{L_2([a,b])}\sqrt{b-a},$$

insbesondere also aus der L_2-Konvergenz die L_1-Konvergenz auf $[a,b]$.
Für $(x_n) \in D(T)$, mit $x_n \to x$, $x'_n \to y$ folgt:

$$\begin{aligned} |x_n - x_m|(u) &\geq |x_n - x_m|(a) - \int_a^u |x'_n - x'_m|(s)\,ds & (3.1)\\ &\geq |x_n - x_m|(a) - \|x'_n - x'_m\|_{L_1([a,b])}, & (3.2) \end{aligned}$$

und

$$\|x_n - x_m\|_{L_1([a,b])} + \|x'_n - x'_m\|_{L_1([a,b])}(b-a) \geq |x_n - x_m|(a)(b-a)$$

also konvergiert die Folge $x_n(a)$. Damit konvergiert $x_n(u) = x_n(a) + \int_a^u x'_n(s)\,ds$ gleichmäßig auf $[a,b]$ und damit in $L_2([a,b])$ gegen die Funktion $x:\ x(u) = \lim_{n\to\infty} x_n(a) + \int_a^u y(s)\,ds$. x ist also absolut stetig mit $Tx = y \in L_2([a,b])$.
Da für alle $c \in \mathbb{C}$ die Funktion $t \mapsto c\mathrm{e}^{\lambda t}$ eine klassische (also im Sinn einer überall differenzierbaren) Lösung ist, ist $T - \lambda$ für kein λ injektiv und das Punktspektrum von T somit ganz $\mathbb{C}$.
Schränkt man den Definitionsbereich von T auf $D'(T) := D(T) \cap \{x \in C(a,b) : x(a) = 0\}$ ein, so bleibt T abgeschlossen. $T - \lambda$ ist dann für alle λ injektiv, denn gilt für eine $f \in D'(T)$: $(T-\lambda)f = 0$ fast überall, so folgt $f(t) = \int_0^t f'(s)\,ds = \lambda\int_0^t f(s)\,ds$ und nach dem Hauptsatz der Integralrechnung, dass f differenzierbar ist, also eine klassische Lösung der Gleichung ist. In $D'(T)$ gibt es aber nur die triviale Lösung, also ist dann das Punktspektrum leer.
Die Lösungsformel für klassische Lösungen der Differentialgleichung liefert für $g \in L_2$ die Lösung $f(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-s)} g(s)\,ds$ in $D'(T)$. Also ist $T - \lambda$ für alle λ bijektiv von $D'(T)$ auf $L_2(a,b)$ und $\sigma(T) = \emptyset$.

3.2 Symmetrische u. selbstadjungierte unbeschränkte Operatoren

Definition 3.2.1 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und T ein (unstetiger) linearer Operator mit Definitionsbereich $D(T)$ dicht in $\mathcal{H}$. Sei*

$$D(T^*) := \{y \in \mathcal{H} : x \mapsto (Tx, y) \text{ ist stetig auf } D(T)\}.$$

Für $y \in D(T^*)$ gibt es nach dem Darstellungssatz von Riesz ein $z \in \mathcal{H}$ mit

$$(Tx, y) = (x, z)$$

Wir definieren $T^*y := z$.

Satz 3.2.2 *T^* ist ein abgeschlossener Operator.*

Beweis: Für $\Phi(x, y) := (y, -x)$ gilt nach Übungsbeispiel 27 für den Graphen $\Gamma(T)$ des Operators T:

$$\Gamma(T)^\perp = \Phi(\Gamma(T^*)) \tag{3.3}$$

$\Gamma(T)^\perp$ ist abgeschlossen, also ist wegen der Stetigkeit von Φ auch $\Gamma(T^*)$ abgeschlossen. □

Satz 3.2.3 *$D(T^*)$ ist dicht in $\mathcal{H}$ $\Leftrightarrow$ T ist ein abschließbarer Operator (d. h. T besitzt eine abgeschlossene Erweiterung).*

Beweis:
„$\Rightarrow$“: Mit Satz 3.2.2 ist $(T^*)^* =: T^{**}$ ein abgeschlossener Operator. Weiters ist für $x \in D(T)$ die Abbildung $y \mapsto (x, T^*y) = (Tx, y)$ stetig auf $D(T^*)$, woraus $x \in D(T^{**})$ und $T^{**}x = Tx$ folgt. Also ist T^{**} eine abgeschlossene Erweiterung von T.
„$\Leftarrow$“: Angenommen, $D(T^*)$ ist nicht dicht, so existiert $z_0 \in D(T^*)^\perp$, $z_0 \neq 0$, also

$$(z_0, 0) \in (\Gamma(T^*))^\perp,$$

denn für $x \in D(T^*)$ ist

$$((z_0, 0), (x, T^*x)) = (z_0, x) + (0, T^*x) = 0.$$

Für $\Phi(x, y) := (y, -x)$ folgt aus

$$\begin{aligned} \Phi(\Gamma(A)^\perp) &= \{(a, b) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : (b, -a)(x, Ax) = 0 \,\forall x \in D(A)\} \\ &= \{(a, b) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : (a, b)(Ax, -x) = 0 \,\forall x \in D(A)\} = (\Phi(\Gamma(A))^\perp \end{aligned}$$

mit (3.3)

$$\overline{\Gamma(T)} = (\Gamma(T)^\perp)^\perp = (\Phi(\Gamma(T^*)))^\perp = \Phi(\Gamma(T^*)^\perp) \ni \Phi((z_0, 0)) = (0, -z_0).$$

Da $(0, -z_0)$ für $z_0 \neq 0$ nicht im Graphen eines linearen Operators liegen kann, ist T nicht abschließbar. □

Definition 3.2.4 *Ein Operator T heißt symmetrisch, wenn T^* eine Erweiterung von T ist. T ist selbstadjungiert, wenn $T^* = T$ gilt.*

Satz 3.2.5 *Ist T selbstadjungiert so gilt $D(T) = \mathcal{H}$ genau dann wenn T stetig ist.*

Beweis: Die Definitionsmenge der Adjungierten eines stetigen Operators ist immer $\mathcal{H}$. Also gilt $D(T) = \mathcal{H}$ falls T selbstadjungiert und stetig ist.
T^* ist immer abgeschlossen. Ist T selbstadjungiert so ist T abgeschlossen. Ist T auf ganz $\mathcal{H}$ definiert, so ist T nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig. □

Satz 3.2.6 *Ist T symmetrisch und $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$, so ist $T + \lambda$ injektiv mit stetiger Inverser $(T + \lambda)^{-1}$ auf $\mathcal{R}(T + \lambda)$.*
Es gilt dann $\|(T + \lambda)^{-1}\| \leq |\mathrm{Im}(\lambda)|^{-1}$. Ist T zusätzlich abgeschlossen, so ist $\mathcal{R}(T + \lambda)$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$.

Beweis: Aus der Symmetrie von T folgt für $x \in D(T)$:

$$\begin{aligned} \|Tx + \lambda x\|^2 &= (Tx, Tx) + |\lambda|^2(x, x) + 2\mathrm{Re}(\lambda)(Tx, x) \\ &\geq \|Tx\|^2 + \mathrm{Re}(\lambda)^2\|x\|^2 - 2|\mathrm{Re}(\lambda)|\|Tx\|\|x\| + \mathrm{Im}(\lambda)^2\|x\|^2 \geq \mathrm{Im}(\lambda)^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

Also ist $T + \lambda$ injektiv mit

$$\|(T + \lambda)^{-1}y\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda)|}\|y\| \quad \forall y \in \mathcal{R}(T + \lambda).$$

Damit ist $(T+\lambda)^{-1}$ auf $\mathcal{R}(T+\lambda)$ stetig. Ist T abgeschlossen, so ist auch $T+\lambda$ abgeschlossen und damit auch $(T+\lambda)^{-1}$ (im Graphen sind ja nur die Komponenten zu vertauschen). Wegen der Stetigkeit von $(T + \lambda)^{-1}$ folgt damit, dass $D((T + \lambda)^{-1}) = \mathcal{R}(T + \lambda)$ abgeschlossen ist. (Ein stetiger Operator ist ja genau dann abgeschlossen wenn er auf einem abgeschlossenen Teilraum definiert ist.) □

Satz 3.2.7 *Ist T selbstadjungiert, so ist $\sigma(T)$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit $\sigma_r(T) = \emptyset$.*

Beweis: Ist T s.a., so folgt aus Satz 3.2.6, dass $T - \lambda$ für $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$ injektiv ist mit abgeschlossenem Bild. Also gilt $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subseteq \mathbb{R}$.
Für $\lambda \in \sigma_r(T)$ gibt es $0 \neq x \in \mathcal{H}$ mit $((T - \lambda)y, x) = 0$ für alle $y \in D(T)$. Daraus folgt aber $(y, (T - \bar{\lambda})x) = 0$, also $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T)$. Für $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$ ein Widerspruch, da nach Satz 3.2.6 $\sigma_p(T) \subseteq \mathbb{R}$ gilt und für $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Widerspruch weil σ_p und σ_r immer disjunkt sind. $\sigma_r(T)$ ist also für T s.a. leer.
Für $0 \in \rho(T)$ ist T^{-1} selbstadjungiert, denn es gilt für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$(T^{-1}x, y) = (T^{-1}x, TT^{-1}y) = (TT^{-1}x, T^{-1}y) = (x, T^{-1}y).$$

Gilt $\sigma(T) = \emptyset$, so folgt für alle $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} R_\lambda(T^{-1}) =&(T^{-1} - \lambda)^{-1} = \left(-\lambda T^{-1}\left(T - \frac{1}{\lambda}\right)\right)^{-1} \\ =&-\frac{1}{\lambda}T\left(T - \frac{1}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\left(T - \frac{1}{\lambda}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

also $r(T^{-1}) = 0$ und mit Satz 1.3.2 $T^{-1} = 0$, was offensichtlich unmöglich ist. □

3.3 Defektzahlen

Definition 3.3.1 *Für abgeschlossene lineare Teilräume L_1, L_2 von $\mathcal{H}$ mit zugehörigen orthogonalen Projektoren P_1, P_2 heißt $\Theta(L_1, L_2) := \|P_1 - P_2\|$ die* Öffnung *der Teilräume L_1 und L_2.*

Satz 3.3.2 *Es gilt:*

1. $\Theta(L_1, L_2) \leq 1$;
2. *Gibt es $x_0 \in L_2$, $x_0 \in L_1^\perp$, $x_0 \neq 0$, so folgt* $\Theta(L_1, L_2) = 1$;
3. *Aus* $\Theta(L_1, L_2) < 1$ *folgt* $dim(L_1) = dim(L_2)$;
4. $\Theta(L_1, L_2) = \max\{\sup_{x\in L_2, \|x\|=1} \|(1 - P_1)x\|, \sup_{x\in L_1,\|x\|=1} \|(1 - P_2)x\|\}$.

Beweis:
1. Aus $P_2 - P_1 = P_2(1 - P_1) - (1 - P_2)P_1$ folgt

$$\|(P_2 - P_1)x\|^2 = \|P_2(1 - P_1)x\|^2 + \|(1 - P_2)P_1x\|^2 \leq \|(1 - P_1)x\|^2 + \|P_1x\|^2 = \|x\|^2.$$

2. $(P_2 - P_1)x_0 = P_2x_0 = x_0$, also $\Theta(L_1, L_2) \geq 1$.
3. Für $\dim(L_1) < \dim(L_2)$ gibt es $0 \neq x_0 \in L_2 \cap L_1^\perp$ und die Behauptung folgt aus 2.
4. Einerseits gilt

$$\begin{aligned} \Theta^2(L_1, L_2) \quad &= \sup_{0\neq y\in\mathcal{H}} \frac{\|(P_2 - P_1)y\|^2}{\|y\|^2} \\ &= \sup_{0\neq y\in\mathcal{H}} \frac{\|P_2(1 - P_1)y\|^2 + \|(1 - P_2)P_1y\|^2}{\|y\|^2} \\ &\geq \sup_{0\neq y\in L_1} \frac{\|(1 - P_2)y\|^2}{\|y\|^2}, \end{aligned}$$

und analog

$$\Theta^2(L_1, L_2) \geq \sup_{0 \neq y \in L_2} \frac{\|(1-P_1)y\|^2}{\|y\|^2}.$$

Andererseits hat man

$$\begin{aligned}
\|P_2(1-P_1)x\|^2 = \quad & (P_2(1-P_1)x, (1-P_1)x) = ((1-P_1)P_2(1-P_1)x, (1-P_1)x) \\
\leq \quad & \|(1-P_1)P_2(1-P_1)x\| \|(1-P_1)x\| \\
\leq \quad & \sup_{y \in L_2, \|y\|=1} \|(1-P_1)y\| \|P_2(1-P_1)x\| \|(1-P_1)x\|,
\end{aligned}$$

womit folgt:

$$\|P_2(1-P_1)x\| \leq \sup_{y \in L_2, \|y\|=1} \|(1-P_1)y\| \|(1-P_1)x\|.$$

Man sieht unmittelbar:

$$\|(1-P_2)P_1x\| \leq \sup_{y \in L_1, \|y\|=1} \|(1-P_2)y\| \|P_1x\|,$$

somit erhält man

$$\begin{aligned}
\|(P_2-P_1)x\|^2 &= \|P_2(P_2-P_1)x\|^2 + \|(1-P_2)(P_2-P_1)x\|^2 \\
&= \|P_2(1-P_1)x\|^2 + \|(1-P_2)P_1x\|^2 \\
&\leq \sup_{y \in L_2, \|y\|=1} \|(1-P_1)y\|^2 \|(1-P_1)x\|^2 + \sup_{y \in L_1, \|y\|=1} \|(1-P_2)y\|^2 \|P_1x\|^2 \\
&\leq \max\{\sup_{y \in L_2, \|y\|=1} \|(1-P_1)y\|^2, \sup_{y \in L_1, \|y\|=1} \|(1-P_2)y\|^2\} \|x\|^2.
\end{aligned}$$

□

Definition 3.3.3 *Gibt es für $\lambda \in \mathbb{C}$ eine positive Konstante C_λ mit $\|(T-\lambda)x\| \geq C_\lambda \|x\| \quad \forall x \in D(T)$, so heißt λ ein Punkt* regulären Typs *des Operators T . Die Menge der Punkte regulären Typs heißt das* Regularitätsgebiet *von T. Für einen Punkt regulären Typs heißt* $\dim(\mathcal{R}(T-\lambda)^\perp)$ *die Defektzahl von λ.*

Satz 3.3.4 *Das Regularitätsgebiet ist offen und die Defektzahl eines Operators T ist auf jeder Zusammenhangskomponente des Regularitätsgebietes konstant.*

Beweis: Für einen Punkt regulären Typs z sei P_z der orthogonale Projektor auf $(\mathcal{R}(T-z))^\perp$. Wir zeigen für z_0 im Regularitätsgebiet gibt es ein $\delta > 0$, sodass z für $|z-z_0| < \delta$ im Regularitätsgebiet liegt und $\|P_z - P_{z_0}\| < 1$ gilt (d.h. das Regularitätsgebiet ist offen):
Es gilt $\|(T-z_0)x\| \geq C_{z_0}\|x\|$ für $x \in D(T)$. Damit folgt

$$C_{z_0}\|x\| \leq \|(T-z_0)x\| \leq \|(T-z)x\| + |z-z_0|\|x\|.$$

Für $\delta = 1/3C_{z_0}$ folgt dann $\|(T-z)x\| \geq 2/3C_{z_0}\|x\|$ für $|z-z_0| < \delta$. Für $x_0 \in (R(T-z))^\perp =: L_z, \quad \|x_0\| = 1$ und $|z-z_0| < \delta$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|(1-P_{z_0})x_0\| &= \sup_{y\in D(T)} \frac{|(x_0,(T-z_0)y)|}{\|(T-z_0)y\|} = \sup_{y\in D(T)} \frac{|(x_0,(T-z+z-z_0)y)|}{\|(T-z_0)y\|} \\
&= \sup_{y\in D(T)} \frac{|z-z_0||(x_0,y)|}{\|(T-z_0)y\|} \leq \frac{1}{3}C_{z_0}C_{z_0}^{-1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

und

$$\|(1-P_z)x\| = \sup_{y\in D(T)} \frac{|z-z_0||(x,y)|}{\|(T-z)y\|} \leq \frac{1}{3}C_{z_0}\frac{3}{2}C_{z_0}^{-1} = \frac{1}{2}$$

für $\|x\| = 1$, $x \in (R(T-z_0))^\perp$, also gilt nach 3.3.2.4.: $\Theta(L_z, L_{z_0}) = \|P_z - P_{z_0}\| < 1$ und die Behauptung folgt aus 3.3.2.3. □

Bemerkung: Die Aussage des Satzes gilt noch falls $D(T)$ nicht dicht in $\mathcal{H}$ ist.

Folgerung: Ist A symmetrisch, so ist nach 3.2.6 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ im Regularitätsgebiet von A.

Die Defektzahlen in der oberen resp. unteren Halbebene werden Defektindizes genannt:

Definition 3.3.5 *Die* Defektindizes p_+ *und* p_- *eines symmetrischen Operators* T *sind definiert als*

$$\begin{aligned}
p_+ &:= \dim(\mathcal{R}(T+\mathrm{i})^\perp), \\
p_- &:= \dim(\mathcal{R}(T-\mathrm{i})^\perp).
\end{aligned}$$

3.4 Cayley-Transformierte eines s.a. Operators

Definition 3.4.1 (Cayley–Transformierte) *Ist* T *ein symmetrischer Operator, so heißt der Operator* $\mathcal{R}(T+\mathrm{i}) \mapsto \mathcal{R}(T-\mathrm{i})$,

$$V := (T-\mathrm{i})(T+\mathrm{i})^{-1}$$

die Cayley–Transformierte von T. *(*$T+\mathrm{i}$ *ist nach 3.2.6 injektiv!)*

Satz 3.4.2 *Die Cayley–Transformierte eines symmetrischen Operators* T *ist eine Isometrie von* $\mathcal{R}(T+\mathrm{i})$ *auf* $\mathcal{R}(T-\mathrm{i})$.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 3.2.6 zeigt man

$$\|(T+\mathrm{i})x\| = \|(T-\mathrm{i})x\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|Tx\|^2},$$

und damit folgt für $y = (T+\mathrm{i})x$

$$\|y\| = \|(T-\mathrm{i})(T+\mathrm{i})^{-1}y\| = \|Vy\|.$$

□

Satz 3.4.3 *Für einen linearen Operator T gilt*

$$(\mathcal{R}(T))^{\perp} = \ker(T^*).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} x \in \ker(T^*) \quad &\Leftrightarrow \quad (T^*x, y) = 0 \quad \forall y \in D(T) \\ &\Leftrightarrow \quad (x, Ty) = 0 \quad \forall y \in D(T) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (\mathcal{R}(T))^{\perp}. \end{aligned}$$

□

Satz 3.4.4 *Ein symmetrischer abgeschlossener Operator ist genau dann selbstadjungiert, wenn seine Defektindizes verschwinden.*

Beweis:
„$\Rightarrow$“: Ist T selbstadjungiert, so gilt $\ker(T^* - \mathrm{i}) = \ker(T - \mathrm{i}) = \{0\}$, da i nach Satz 3.2.7 kein Eigenwert von T ist. Aus Satz 3.4.3 folgt somit $\dim(\mathcal{R}(T+\mathrm{i})^{\perp}) = p_+ = 0$. Analog zeigt man $p_- = 0$.
„$\Leftarrow$“: Sei $p_+ = p_- = 0$ und T abgeschlossen. Dann gilt nach Satz 3.2.6

$$\mathcal{R}(T+\mathrm{i}) = \mathcal{H} = \mathcal{R}(T-\mathrm{i}).$$

Ist T^* eine echte Erweiterung von T, so folgt $T^* + \mathrm{i}$ ist nicht injektiv, daher $\ker(T^* + \mathrm{i}) \neq \{0\}$ und mit Satz 3.4.3 $\mathcal{R}(T-\mathrm{i})^{\perp} \neq \{0\}$ im Widerspruch zu $p_- = 0$. □

Satz 3.4.5 *Ist T selbstadjungiert, so ist seine Cayley–Transformierte ein unitärer Operator.*

Beweis: Nach Satz 3.4.2 ist die Cayley–Transformierte U eine Isometrie von $\mathcal{R}(T+\mathrm{i})$ auf $\mathcal{R}(T-\mathrm{i})$. Da T selbstadjungiert ist, ist T abgeschlossen und wegen Satz 3.2.6 und Satz 3.4.4 verschwinden die Defektindizes, also gilt $\mathcal{R}(T \pm \mathrm{i}) = \mathcal{H}$. U ist also eine surjektive Isometrie von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}$ und damit unitär. □

Satz 3.4.6 *Sei T symmetrisch mit Cayley–Transformierter V. Dann ist $1-V$ injektiv, und es gilt*

$$T = \mathrm{i}(1+V)(1-V)^{-1}$$

mit $D(T) = \mathcal{R}(1-V)$.
Für jede isometrische Erweiterung $\tilde{V}$ von V ist der Operator $1-\tilde{V}$ injektiv.

Beweis: Wegen

$$1 - V = 1 - (T-\mathrm{i})(T+\mathrm{i})^{-1} = (T+\mathrm{i}-(T-\mathrm{i}))(T+\mathrm{i})^{-1} = 2\mathrm{i}(T+\mathrm{i})^{-1} \tag{3.4}$$

folgt $\mathcal{R}(1-V) = D(T)$ und $1-V$ ist als Inverse einer Abbildung injektiv.
Gilt $\tilde{V}x = x$ für einen isometrischen Operator $\tilde{V}$ so folgt für $y \in D(\tilde{V})$:

$$((1-\tilde{V})y, x) = (y,x) - (\tilde{V}y, x) = (y,x) - (\tilde{V}y, \tilde{V}x) = (y,x) - (y,x) = 0,$$

also $x \in \mathcal{R}(1-\tilde{V})^{\perp}$. Ist $\tilde{V}$ eine isometrische Erweiterung eines Operators V mit $\mathcal{R}(1-V) = D(T)$ dicht, so hat $1-\tilde{V}$ selbst dichtes Bild, es folgt $x = 0$ und $1-\tilde{V}$ muss daher injektiv sein.
Sei $x \in D(T)$ und $z := Tx + \mathrm{i}x$. Dann gilt

$$Vz = (T-\mathrm{i})(T+\mathrm{i})^{-1}(T+\mathrm{i})x = Tx - \mathrm{i}x,$$

also

$$\begin{aligned}(1-V)z &= 2\mathrm{i}x \\ (1+V)z &= 2Tx.\end{aligned}$$

Daraus folgt mit (3.4)

$$2Tx = (1+V)z = (1+V)(1-V)^{-1}2\mathrm{i}x,$$

also

$$Tx = \mathrm{i}(1+V)(1-V)^{-1}x \quad \forall x \in D(T).$$

□

Für einen gegebenen symmetrischen Operator stellt sich etwa in Hinblick auf den folgenden Spektralsatz, oder bei der Darstellung physikalischer Grössen der Quantenmechanik, die immer durch selbstadjungierte Operatoren beschrieben werden, die Frage, ob es eine selbstadjungierte Erweiterung dieses Operators gibt.

Satz 3.4.7 *Ein symmetrischer Operator besitzt genau dann eine selbstadjungierte Erweiterung, wenn seine Defektindizes gleich sind (insbes. auch für $p_+ = p_- = \infty$).*

Beweis: Wegen Satz 3.4.5 und 3.4.2 muss es eine unitäre Erweiterung der Cayley–Transformierten des symmetrischen Operators T geben, wenn es eine selbstadjungierte Erweiterung von T gibt. Wegen Satz 3.4.2 gibt es eine solche genau dann, wenn $p_+ = p_-$ gilt, denn genau dann gibt es eine Isometrie $\bar{V}$ von $\mathcal{R}(T+\mathrm{i})^\perp$ auf $\mathcal{R}(T-\mathrm{i})^\perp$. Der Operator $U : U(x+y) = V(x) + \bar{V}(y)$ für $x \in \mathcal{R}(T+\mathrm{i})$, $y \in \mathcal{R}(T+\mathrm{i})^\perp$ ist offensichtlich isometrisch und sein Abschluss (d.h. die stetige Fortsetzung auf $\mathcal{H}$) unitär. Damit ist die Bedingung notwendig für die Existenz einer selbstadjungierten Erweiterung.

Andererseits folgt für jede solche unitäre Erweiterung U mit 3.4.6, dass $1-U$ injektiv ist. Für den Operator $\tilde{T} := \mathrm{i}(1+U)(1-U)^{-1}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{R}(1-U)$ verifiziert man unmittelbar die Symmetrie: Für x, y in $D(T) = \mathcal{R}(1-U)$ gibt es u, v mit $x = (1-U)u$, $y = (1-U)v$, sodass gilt

$$(\mathrm{i}(1+U)(1-U)^{-1}x, y) = \mathrm{i}((1+U)u, (1-U)v) = \mathrm{i}(Uu, v) - \mathrm{i}(u, Uv) = (x, \mathrm{i}(1+U)(1-U)^{-1}y).$$

Er ist abgeschlossen, da mit $1-U$ auch $(1-U)^{-1}$ abgeschlossen ist, woraus folgt, dass $\tilde{T} + \mathrm{i} = (\mathrm{i}(1+U) + \mathrm{i}(1-U))(1-U)^{-1} = 2\mathrm{i}(1-U)^{-1}$ und damit auch $\tilde{T}$ abgeschlossen ist. Aus 3.4.4 folgt, dass $\tilde{T}$ selbstadjungiert ist. □

3.5 Der Spektralsatz

Satz 3.5.1 (Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren) *Ist T ein (nicht notwendigerweise beschränkter) selbstadjungierter Operator mit Definitionsbereich $D(T)$, so gibt es eine Zerlegung der Einheit, d. h. eine Familie von Projektoren $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, die 1., 2., 3. und 5. von Satz 2.2.2 erfüllen und auf $D(T)$ mit T kommutieren, und für die gilt:*

$$\begin{aligned}
(Tx, y) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d(E_\lambda x, y) \quad \forall x \in D(T), y \in \mathcal{H}, \\
\|Tx\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \, d(E_\lambda x, x), \\
D(T) &= \left\{ x : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(E_\lambda x, x) < \infty \right\}.
\end{aligned}$$

Beweis: Es sei $\widetilde{E}_t$ die Zerlegung der Einheit der Cayleytransformierten V von T. Für den Projektor $P_\varepsilon := \widetilde{E}_{2\pi-\varepsilon} - \widetilde{E}_\varepsilon$ und eine stetige 2π–periodische Funktion f_ε, die für $t \in (\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)$ die Werte $f_\varepsilon(t) = (1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{-1}$ annimmt, gilt nach dem Spektralsatz für unitäre Operatoren

2.2.8 und dem Funktionalkalkül für $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
((1-V)^n f_\varepsilon^n(V)P_\varepsilon x, y) &= \int_{0-}^{2\pi} (1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n f_\varepsilon^n(t)\, d(\widetilde{E}_t P_\varepsilon x, y) \\
&= \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n f_\varepsilon^n(t)\, d(\widetilde{E}_t P_\varepsilon x, y) \\
&= \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n (1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{-n}\, d(\widetilde{E}_t P_\varepsilon x, y) \\
&= (P_\varepsilon x, y),
\end{aligned}$$

also $P_\varepsilon x \in \mathcal{R}(1-V)^n \subseteq D(T^n)$ und $(1-V)^{-n}P_\varepsilon x = f_\varepsilon^n(V)P_\varepsilon x$, $n = 1, 2$. Hieraus folgt:

$$(T^n P_\varepsilon x, y) = (\mathrm{i}^n(1+V)^n f_\varepsilon^n(V)P_\varepsilon x, y) = \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \mathrm{i}^n \left(\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right)^n d(\widetilde{E}_t x, y).$$

Mit $t = 2\operatorname{arccot}(-\lambda) = -\mathrm{i}\log\frac{-\mathrm{i}\lambda-1}{-\mathrm{i}\lambda+1}$ und $E_t := \widetilde{E}_{2\operatorname{arccot}(-t)}$ folgt:

$$\begin{aligned}
(T^n P_\varepsilon x, y) &= \int_{-\cot\frac{\varepsilon}{2}}^{-\cot(\pi-\frac{\varepsilon}{2})} \mathrm{i}^n \left(\frac{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\operatorname{arccot}(-\lambda)}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\operatorname{arccot}(-\lambda)}}\right)^n d(E_\lambda x, y) \\
&= \int_{-\cot\frac{\varepsilon}{2}}^{-\cot(\pi-\frac{\varepsilon}{2})} \lambda^n\, d(E_\lambda x, y).
\end{aligned}$$

Für diese Zerlegung der Einheit folgt für $x \in D(T)$ wegen $x = (1-V)y$ für ein $y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
E_\lambda T x &= E_\lambda \mathrm{i}(1+V)(1-V)^{-1}(1-V)y \\
&= \mathrm{i}(1+V)(1-V)^{-1}E_\lambda(1-V)y = TE_\lambda x.
\end{aligned}$$

Die anderen geforderten Eigenschaften der Spektralschar $\{E_\lambda\}$ folgen unmittelbar aus denen von $\widetilde{E}_t$.

P_ϵ konvergiert für $\epsilon \to 0$ in der starken Operatortopologie gegen $\tilde{E}_0$. Da $\tilde{E}_0$ der Projektor auf den Eigenraum zum Eigenwert 1 der Cayleytransformierten ist folgt, da $1-V$ nach Satz 3.4.6 injektiv ist $x = 0$.

Für $\int_{\mathbb{R}} \lambda^2\, d(E_\lambda x, x) < \infty$ folgt für $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ wegen

$$\begin{aligned}
\|(TP_{\varepsilon_1} - TP_{\varepsilon_2})x\|^2 &= (T^2(P_{\varepsilon_1} - P_{\varepsilon_2})x, x) \\
&= \int_{-\cot\frac{\varepsilon_1}{2}}^{-\cot\frac{\varepsilon_2}{2}} \lambda^2\, d(E_\lambda x, x) + \int_{-\cot(\pi-\frac{\varepsilon_2}{2})}^{-\cot(\pi-\frac{\varepsilon_1}{2})} \lambda^2\, d(E_\lambda x, x),
\end{aligned}$$

dass $TP_\varepsilon x$ für $\epsilon \to 0$ konvergiert. Da T abgeschlossen ist, folgt $x \in D(T)$, mit $Tx = \lim_{\varepsilon\to 0} TP_\varepsilon x$ und

$$(Tx, y) = \lim_{\varepsilon\to 0}(TP_\epsilon x, y) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\cot\frac{\varepsilon}{2}}^{-\cot(\pi-\frac{\varepsilon}{2})} \lambda\, d(E_\lambda x, y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d(E_\lambda x, y).$$

Andererseits folgt für $x \in D(T)$:

$$\|Tx\|^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \|P_\varepsilon Tx\|^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} (T^2 P_\varepsilon x, x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \, d(E_\lambda x, x) < \infty.$$

□

3.6 Beispiele selbstadjungierter Operatoren

Der Differentialoperator auf $L_2([0,1])$

Im folgenden betrachten wir den Operator $-\mathrm{i}\frac{d}{dt}$ auf einem Funktionenraum über dem Intervall $[0,1]$. Wir wollen den Definitionsbereich dieses Operators geeignet so wählen, dass $-\mathrm{i}\frac{d}{dt}$ selbstadjungiert ist. Schreibt man $T \supseteq \widetilde{T}$, wenn $D(T) \supseteq D(\widetilde{T})$ gilt und die Operatoren auf $D(\widetilde{T})$ übereinstimmen, d.h wenn T eine Erweiterung von $\widetilde{T}$ ist, so erkennt man direkt aus der Definition der Adjungierten, dass

$$T \supseteq \widetilde{T} \Rightarrow T^* \subseteq \widetilde{T}^*.$$

Man sieht, dass für einen zu kleinen Definitionsbereich die Adjungierte eines Operators T eine echte Erweiterung von T werden kann, umgekehrt für zu großes $D(T)$ die Adjungierte T^* auf einem zu kleinen Bereich definiert ist.
Durch partielle Integration kann man den Definitionsbereich so wählen, dass der Operator symmetrisch ist: Wegen

$$-\int_0^1 \mathrm{i}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)\overline{g(t)}\,dt = -\mathrm{i}(f(1)\overline{g(1)} - f(0)\overline{g(0)}) + \int_0^1 f(t)\overline{\mathrm{i}\left(\frac{d}{dt}g(t)\right)}\,dt$$

ist für die Symmetrie des betrachteten Operators hinreichend, dass die ersten beiden Terme der rechten Seite verschwinden.
Sei der Operator $A_1 f(t) := -\mathrm{i}\frac{d}{dt}f(t)$ auf

$$D(A_1) := \{f : f(0) = f(1) = 0, f \text{ ist absolut stetig mit } f' \in L_2([0,1])\}$$

definiert. Es gilt nun $(A_1 x, y) = (x, A_1^* y)$ für $x \in D(A_1), y \in D(A_1^*)$. Wir definieren

$$z(s) := \mathrm{i}\int_0^s (A_1^* y)(t)dt,$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned}
(A_1x, z) &= -\mathrm{i}\int_0^1 \frac{d}{dt}x(t)\overline{z(t)}dt \\
&= -\mathrm{i}(x(1)\overline{z}(1) - x(0)\overline{z}(0)) + \mathrm{i}\int_0^1 x(t)\overline{\frac{d}{dt}z(t)}dt \\
&= \mathrm{i}\int_0^1 x(t)\overline{\mathrm{i}A_1^*y(t)}dt = \int_0^1 x(t)\overline{A_1^*y(t)}dt \\
&= (x, A_1^*y) = (A_1x, y).
\end{aligned}$$

Es folgt also

$$(A_1x, z-y) = 0 \ \forall x \Rightarrow z - y \in \mathcal{R}(A_1)^{\perp},$$

und da offensichtlich $\mathcal{R}(A_1) = \{g : \int_0^1 g(x)dx = 0\}$ (wegen der Voraussetzung $f(0) = f(1)$ für $f \in D(A_1)$), erhält man

$$\mathcal{R}(A_1)^{\perp} = \{c : c \in \mathbb{C}\}.$$

Diese Tatsache ist leicht einzusehen, wenn man sich überlegt, dass der ganze Funktionenraum durch trigonometrische Polynome aufgespannt wird, für die $\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi x}dx = 0,\ n \neq 0$ gilt. Damit bilden Polynome 0-ter Ordnung den Orthogonalraum, denn $\int_0^1 1dx = 1 \neq 0$. Aus diesen Überlegungen folgt $z = y + c$ und daher

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}z(t) &= \mathrm{i}A_1^*y(t) = \frac{d}{dt}y(t) \\
& A_1^*y(t) = -\mathrm{i}\frac{d}{dt}y(t)
\end{aligned}$$

für alle absolut stetigen Funktionen $y(t)$, also ist A_1 symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert, da A_1^* genau auf allen absolut stetigen Funktionen y mit $y' \in L_2([0,1])$ definiert ist.
Wir betrachten nun den Operator A mit $Af(t) := -\mathrm{i}\frac{d}{dt}f(t)$ und

$$D(A) := \{f : f(0) = f(1), f \text{ ist absolut stetig mit } f' \in L_2([0,1])\}.$$

Da A symmetrisch ist, bleibt wegen Satz 3.4.4 nur zu zeigen, dass die Defektindizes verschwinden und dass A abgeschlossen ist. Hierfür genügt es offensichtlich zu zeigen, dass $A \pm \mathrm{i}$ surjektiv auf $\mathcal{H}$ ist, da dann die stetige Inverse (vgl. Satz 3.2.6) auf $\mathcal{H}$ definiert und somit abgeschlossen ist. Dann ist aber auch $A \pm \mathrm{i}$ abgeschlossen, und damit ist A abgeschlossen.
Die klassische Lösung der Differentialgleichung

$$-\mathrm{i}\frac{d}{dt}f + \mathrm{i}f = g$$

(für $f \in C^1([0,1])$ und $g \in C([0,1])$) lautet:

$$f(t) = \left(\mathrm{i} \int_0^t \mathrm{e}^{-x} g(x)\, dx + c \right) \mathrm{e}^t.$$

Für

$$c = \mathrm{i} \frac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} g(x)\, dx$$

ist für jedes $g \in L_2([0,1])$ die so definierte Funktion f eine Funktion in $D(A)$ mit $(A+\mathrm{i})f = g$, somit ist $A + \mathrm{i}$ surjektiv. Der Beweis für $A - \mathrm{i}$ verläuft analog.

Der Differentialoperator auf $L_2(\mathbb{R})$

Satz 3.6.1 *Der Operator T in $L_2(\mathbb{R})$ mit*

$$Tf = -\mathrm{i} \frac{d}{dt} f$$

auf dem Definitionsbereich

$$\begin{aligned} D(T) \ &:= \ \{ f \in L_2(\mathbb{R}) : f \text{ absolut stetig auf kompakten Teilmengen von } \mathbb{R} \\ &\qquad \text{und } f' \in L_2(\mathbb{R}) \} \end{aligned}$$

ist selbstadjungiert.

Anmerkung: Die absolute Stetigkeit von f auf kompakten Mengen besagt, dass f durch

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)\, dt$$

dargestellt werden kann. f' ist also $\forall x$ in $L_1([x_0, x])$, aber nicht notwendigerweise in $L_1(\mathbb{R})$.

Beweis: Wir zeigen:

1. T ist symmetrisch.

2. $T + \mathrm{i}$ und $T - \mathrm{i}$ sind surjektiv, also ist $p_+ = p_- = 0$ und T ist abgeschlossen.

Damit folgt aus Satz 3.4.4, dass T selbstadjungiert ist.

1. Sei $f \in D(T)$, dann gilt

$$\int_0^t f'(s)\overline{f(s)}\, ds = |f|^2\big|_0^t - \int_0^t f(s)\overline{f'(s)}\, ds,$$

also ist
$$\int_0^t f'(s)\overline{f(s)}\,ds + \int_0^t f(s)\overline{f'(s)}\,ds = |f|^2|_0^t = |f(t)|^2 - |f(0)|^2.$$
Wegen $f \in L_2$ folgt, dass auch $f \cdot I_{[0,t]}$ in L_2 liegt und für $t \to \infty$ in der L_2–Norm gegen $f \cdot I_{[0,\infty)}$ konvergiert (I_M bezeichnet die Indikatorfunktion der Menge M).

Damit existieren auch die Produkte $(f', f \cdot I_{[0,t]})$, und ihr Grenzwert für $t \to \infty$, also $(f', f \cdot I_{[0,\infty)})$. Es existiert also der Grenzwert der linken Seite in der obigen Gleichung. Da dann auch für die rechte Seite dieser Grenzübergang definiert ist, gilt $\lim_{t\to\infty} |f(t)|^2 = 0$, da f ja in L_2 liegt. Die gleiche Überlegung gilt auch für $t \to -\infty$, und man erhält für $f, g \in D(A)$

$$\begin{aligned}
(Tf, g) &= \int_{\mathbb{R}} -\mathrm{i}f'(s)\overline{g(s)}\,ds \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t -\mathrm{i}f'(s)\overline{g(s)}\,ds \\
&= -\mathrm{i}\lim_{t\to\infty} f(s)\overline{g(s)}|_{-t}^t + \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^t f(s)\overline{(-\mathrm{i}g'(s))}\,ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(s)\overline{(-\mathrm{i}g'(s))}\,ds \\
&= (f, Tg) \quad \forall f, g \in D(T),
\end{aligned}$$

das heißt T ist symmetrisch.

2. Es wird nur gezeigt, dass $T - \mathrm{i}$ surjektiv ist, der Beweis für $T + \mathrm{i}$ verläuft analog. Man hat also zu beweisen, dass die Differentialgleichung
$$-\mathrm{i}f' - \mathrm{i}f = \widetilde{g}$$
für alle $\widetilde{g} \in L_2$ eine Lösung f in $D(T)$ besitzt. Wegen der klassischen Lösung
$$y(x) = c\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^t g(t)\,dt$$
der Differentialgleichung $y' + y = g$ versuchen wir eine Konstante c so zu bestimmen, dass
$$x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\left(c + \int_0^x \mathrm{e}^t g(t)\,dt\right)$$
in $D(T)$ liegt. Für $x \to -\infty$ kann diese Funktion nur endlich sein, wenn
$$c = \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^t g(t)\,dt$$

gilt. Daraus erhält man als einzige mögliche f.ü.-Lösung in $D(T)$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(c + \int_0^x \mathrm{e}^t g(t)\,dt\right) = \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{t-x} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^s g(s+x)\,ds.$$

Um nun zu zeigen, dass f in L_2 liegt, betrachtet man für beliebiges $h \in L_2$ das Produkt

$$\begin{aligned}
|(f,h)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^s g(s+x)\overline{h(x)}\,ds\,dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^s |g(s+x)||\overline{h(x)}|\,ds\,dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^s \int_{\mathbb{R}} |g(s+x)||\overline{h(x)}|\,dx\,ds \\
&= \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^s (|\tau_s g|, |h|)\,ds \\
&\leq \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^s \|g\|_2 \|h\|_2\,ds = \|g\|_2\|h\|_2.
\end{aligned}$$

In dieser Abschätzung bezeichnet τ_s den unitären Translationsoperator

$$(\tau_s g)(x) = g(x+s).$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge läßt sich durch den Satz von Fubini begründen (der Integrand ist meßbar und nichtnegativ), und die letzte Abschätzung verwendet die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung. Damit ist also die Abbildung $h \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(s)\overline{h(s)}\,ds$ auf L_2 stetig, und mit dem Satz von Riesz–Fischer folgt $f \in L_2$.

$\square$

Satz 3.6.2 *Für den in Satz 3.6.1 definierten Differentialoperator T gilt*

$$\sigma(T) = \sigma_c(T) = \mathbb{R}.$$

Beweis: Zunächst bestimmen wir das Punktspektrum von T. Es gilt

$$(T-\lambda)f = 0 \Leftrightarrow f' - \mathrm{i}\lambda f = 0 \Leftrightarrow f(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x},$$

also ist $\sigma_p(T) = \emptyset$, da $c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$ nur für $c = 0$ in L_2 liegt.
Da das Residualspektrum selbstadjungierter Operatoren leer ist, bleibt noch

$$\lambda \in \rho(T) \Rightarrow \lambda \notin \mathbb{R}$$

zu zeigen: Sei also $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow T - \lambda$ ist invertierbar $\Leftrightarrow -\mathrm{i}f' - \lambda f = g$ hat $\forall g \in L_2$ eine Lösung in L_2. Sei die Funktion h durch

$$h(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} f(x)$$

für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert. Dann folgt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \mathrm{i}\alpha h(x) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} f'(x) \\ -\mathrm{i}h'(x) - \lambda h(x) &= \alpha h(x) - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} f'(x) - \lambda h(x) \\ -\mathrm{i}h'(x) - (\lambda + \alpha) h(x) &= -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} f'(x) - \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} f(x) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}(-\mathrm{i}f'(x) - \lambda f(x)) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} g(x). \end{aligned}$$

Wegen

$$h \in L_2 \Leftrightarrow f \in L_2$$

und

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x} g(x) \in L_2 \Leftrightarrow g(x) \in L_2$$

folgt: Die Gleichung

$$(T - (\lambda + \alpha)) f = g$$

hat genau dann für alle $g \in L_2$ eine Lösung in $D(A)$, wenn die Gleichung $(T - \lambda) f = g$ für alle $g \in L_2$ in $D(A)$ lösbar ist. Für $\lambda \in \rho(T)$ folgt also $\lambda + \alpha \in \rho(T)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Gäbe es also ein $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(T)$, so wäre $\mathbb{R} \subseteq \rho(T)$ und $\sigma(T) = \emptyset$ im Widerspruch zu Satz 3.2.7. $\square$

Kapitel 4

Operatorhalbgruppen

4.1 Stark stetige Halbgruppen

Definition 4.1.1 *Eine Familie $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, stetiger Operatoren auf dem Banachraum X heißt* Halbgruppe, *wenn gilt:*

1. $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0$,
2. $T(0) = I$.

Definition 4.1.2 *Eine Halbgruppe $\{T(t)\}$ heißt* gleichmäßig stetig, *wenn gilt:*

$$\lim_{s \to 0+} \|T(s) - I\| = 0.$$

Definition 4.1.3 *Eine Halbgruppe $\{T(t)\}$ heißt* stark stetig *oder* C_0–Halbgruppe, *wenn gilt:*

$$\lim_{s \to 0+} \|T(s)x - x\| = 0 \quad \forall x \in X.$$

Bemerkung: Analog kann man schwach stetige Halbgruppen (d.h. Halbgruppen f. die die Abbildung $t \mapsto \langle T(t)x, x' \rangle$ für alle $x' \in X'$ stetig ist) definieren. Man kann aber zeigen, dass jede schwach stetige Halbgruppe stark stetig ist.

Beispiele:

1. Auf $L_p(\mathbb{R})$ ist für $1 \leq p < \infty$ die Translationshalbgruppe durch $T(t)f(s) = f(t+s)$ gegeben. Da C_{00} (stetige Funktionen mit kompaktem Träger) dicht in diesen Räumen liegen folgt die starke Stetigkeit.

2. Man betrachtet eine Brown'sche Bewegung und bezeichnet mit $P(t; x, y)$ die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs von x nach y in der Zeit t.

Bezeichnet man die Anfangsdichte mit ρ_0, so gilt für die Dichte ρ_t zum Zeitpunkt t:

$$\int P(t;x,y)\rho_0(x)\,dx = \rho_t(y),$$

und durch $(T(t)\rho_0)(y) := \rho_t(y)$ wird eine Halbgruppe von Operatoren definiert. Die Halbgruppeneigenschaft folgt dabei aus dem Satz von Chapman–Kolmogorov, wonach

$$P(t+s;x,y) = \int P(t;x,z)P(s;z,y)\,dz.$$

Für $L_1(\mathbb{R}^n)$ ist die Gaußsche oder Diffusionshalbgruppe durch

$$T(t)f(s) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|s-r|^2/(4t)} f(r)\,dr$$

gegeben.

3. Ist A ein stetiger Operator auf dem Banachraum X, so kann man die Lösung der Differentialgleichung
$$Ax = \frac{d}{dt}x \quad \forall x \in X$$
über die Operatoren $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$ erklären; die Operatoren e^{tA} erfüllen dabei die Halbgruppeneigenschaft
$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}.$$

   Für unbeschränkte Operatoren A gibt der nachfolgende Satz von Hille-Yoshida notwendige und hinreichende Bedingungen für den Operator A um infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $T(t)$ zu sein, die dann die Lösung obiger Differentialgleichung beschreibt.

Satz 4.1.4 *Ist $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe, so gibt es Konstante $\omega, M \in \mathbb{R}$, sodass gilt:*

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t} \quad \forall t \geq 0.$$

Bem.: Für die Konstante M kann nicht immer 1 gewählt werden, vgl. Übungsbeispiel 35.
Beweis:
Für jede Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $t_i \to 0+$ und jedes $x \in X$ gilt wegen der starken Stetigkeit $(\|T(t_i)x\|)_{i\in\mathbb{N}} \to \|x\|$, also ist nach dem Satz von Banach-Steinhaus die Menge der Abbildungen $T(t_i)$ gleichmäßig beschränkt. Es folgt, dass es Konstante $M \geq 1$ und $\eta > 0$ mit $\|T(t)\| \leq M$ für $t \in [0,\eta]$.
Sei nun t beliebig, dann ist

$$t = k\eta + \delta, \quad k \in \mathbb{N}, \delta < \eta,$$

und somit

$$\begin{aligned}\|T(t)\| &= \|T(k\eta)T(\delta)\| \leq \|T(\eta)\|^k \|T(\delta)\| \\ &\leq M^{1+k} \leq M^{1+\frac{t}{\eta}} = M\mathrm{e}^{\omega t},\end{aligned}$$

wenn man $k = \frac{t-\delta}{\eta} \leq \frac{t}{\eta}$ beachtet und $\omega := \frac{\ln M}{\eta}$ setzt. □

Satz 4.1.5 *Eine stark stetige Halbgruppe ist stark stetig in s $\forall s \geq 0$, d. h. aus der starken Stetigkeit bei 0 folgt die starke Stetigkeit $\forall s \geq 0$.*

Beweis: Die Rechtsstetigkeit folgt aus der Halbgruppeneigenschaft. Aus

$$\|T(s-h)x - T(s)x\| \leq \|T(s-h)\| \|x - T(h)x\| \leq M\mathrm{e}^{(s-h)\omega} \|T(h)x - x\|$$

folgt die Linksstetigkeit in der starken Operatortopologie. □

Definition 4.1.6 *Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe und*

$$D(A) := \left\{ x \in X : \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(T(h) - I)x \text{ existiert in } X \right\},$$

so sei der infinitesimale Erzeuger *A der Halbgruppe auf $D(A)$ definiert als*

$$Ax := \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(T(h) - I)x.$$

Ähnlich wie aus der Rechtsstetigkeit bei 0 die Stetigkeit auf $\mathbb{R}_+$ folgt, zeigen wir, dass aus der Existenz der rechtsseitigen Ableitung der Funktion $t \mapsto T(t)x$ bei 0 die Differenzierbarkeit dieser Funktion auf $\mathbb{R}_+$ folgt. Insbesondere bilden alle Operatoren $T(t)$ den Definitionsbereich des infinitesimalen Erzeugers in sich ab.

Satz 4.1.7 *Ist $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger A, dann gilt*

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x \quad \forall x \in X;$
2. $\displaystyle\int_0^{\rho} T(t)x\, dt \in D(A) \quad \forall x \in X, \rho > 0$ *und* $A \int_0^{\rho} T(t)x\, dt = T(\rho)x - x;$
3. $x \in D(A) \Rightarrow T(t)x \in D(A)$ $\forall t \geq 0$, *und für* $t > 0$, $x \in X$ *ist* $T(t)x$ *differenzierbar mit:*

$$AT(t)x = T(t)Ax = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T(t+h) - T(t))x;$$

4. $T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(r)Ax\,dr = \int_s^t AT(r)x\,dr \quad \textit{für } x \in D(A).$

Beweis:

1. Folgt sofort aus der starken Stetigkeit.

2. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(T(h)-I)\int_0^\rho T(t)x\,dt &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\left[\int_h^{\rho+h} T(t)x\,dt - \int_0^\rho T(t)x\,dt\right] \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\left[\int_\rho^{\rho+h} T(t)x\,dt - \int_0^h T(t)x\,dt\right] \\
&= T(\rho)x - x
\end{aligned}$$

womit dieser Grenzwert wohldefiniert ist.

3. Aus der Halbgruppeneigenschaft folgt:

$$\begin{aligned}
AT(t)x &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(T(h)-I)T(t)x = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(T(h+t)-T(t))x \\
&= T(t)\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(T(h)-I)x = T(t)Ax.
\end{aligned}$$

Also ist $T(t)x$ rechtsseitig differenzierbar. Die linksseitige Differenzierbarkeit folgt aus

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(T(t)-T(t-h))x &= \lim_{h\to 0+} T(t-h)Ax + T(t-h)\left(\frac{1}{h}(T(h)-I)-A\right)x \\
&= T(t)Ax
\end{aligned}$$

4. Es gilt

$$\int_s^t AT(r)x\,dr = \int_s^t T(r)Ax\,dr$$

wegen 3. Da $T(r)\frac{1}{h}(T(h)-I)x$ für $h \to 0$ wegen der Beschränktheit von $\|T(r)\|$, $r \in [s,t]$ gleichmäßig in $r \in [s,t]$ gegen $T(r)Ax$ konvergiert, folgt:

$$\begin{aligned}
\int_s^t T(r)Ax\,dr &= \int_s^t \lim_{h\to 0} T(r)\frac{1}{h}(T(h)-I)x\,dr \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(r)x\,dr - \int_s^{s+h} T(r)x\,dr\right) = (T(t)-T(s))x
\end{aligned}$$

mit 1.

□

Satz 4.1.8 *Ist A der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $\{T(t)\}$, so ist A dicht definiert und abgeschlossen.*

Beweis: $\frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(t)x\,dt \in D(A)$ und konvergiert gegen x für $\rho \to 0$ nach Satz 4.1.7. Damit existiert für jedes $x \in X$ eine Folge in $D(A)$, die gegen x konvergiert, also ist A dicht definiert. Für die Abgeschlossenheit ist noch zu zeigen, dass für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(A)$

$$\left.\begin{array}{r} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{array}\right\} \Rightarrow x \in D(A) \text{ und } Ax = y.$$

gilt. Es ist wegen Satz 4.1.7 und der Stetigkeit von $x \mapsto \int_0^h T(r)x\,dr$

$$(T(h)-I)x = \lim_{n\to\infty}(T(h)-I)x_n = \lim_{n\to\infty}\int_0^h T(r)Ax_n\,dr = \int_0^h T(r)y\,dr$$

und damit

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(T(h)-I)x = \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h T(r)y\,dr = y.$$

Somit gilt $x \in D(A)$ und $Ax = y$. □

Satz 4.1.9 *Der infinitesimale Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe ist genau dann stetig wenn die Halbgruppe gleichmäßig stetig ist.*

Beweis:
Sei der Erzeuger A der Halbgruppe $\{T(t)\}$ stetig. Dann ist A als abgeschlossener stetiger Operator überall definiert.
Es folgt mit Satz 4.1.7 und 4.1.4

$$\|(T(h)-I)x\| = \left\|\int_0^h T(r)Ax\,dr\right\| \le M\int_0^h \mathrm{e}^{r\omega}\,dr\|A\|\|x\| = \frac{M}{\omega}\left(e^{h\omega}-1\right)\|A\|\|x\|,$$

also die Konvergenz von $T(h)$ gegen I in der Operatornorm.
Ist die Halbgruppe gleichmäßig stetig, so existiert ein ρ mit

$$\|T(t)-I\| < \frac{1}{2} \quad \forall t \in [0,\rho] \text{ und } \left\|\int_0^\rho T(t)\,dt - \rho I\right\| < \frac{\rho}{2}.$$

Wegen $\|(-\rho I)^{-1}\|^{-1} = \rho$ ist $\int_0^\rho T(t)\,dt$ damit durch die von Neumann-Reihe (1.1) invertierbar.
Nach Satz 4.1.7 gilt

$$A\int_0^\rho T(t)\,dt = T(\rho) - I,$$

somit ist A als Produkt der stetiger Operatoren $(T(\rho) - I)$ und $\left(\int_0^\rho T(t)\,dt\right)^{-1}$ ebenfalls stetig. $\square$

Satz 4.1.10 *Sind $\{T(t)\}$ und $\{S(t)\}$ zwei stark stetige Halbgruppen mit demselben infinitesimalen Erzeuger A, dann gilt $T(t) = S(t)$ $\forall t \geq 0$.*

Beweis: Da die Operatoren der Halbgruppen $S(t)$ und $T(t)$ stetig sind, reicht es die Übereinstimmung auf einer dichten Teilmenge zu zeigen. Für $x \in D(A)$ zeigen wir, dass die Ableitung der Abbildung

$$f : [0,t] \to X,\; s \mapsto T(t-s)S(s)x$$

verschwindet. Im Wesentlichen zeigt die folgende Rechnung die Gültigkeit der Produktregel für stark stetige Halbgruppen.
Mit Satz 4.1.7 und 4.1.5 erhalten wir für $x \in D(A)$:

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T(t-s-h)S(s+h)x - T(t-s)S(s)x) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T(t-s-h)S(s)x - T(t-s)S(s)x + \\
&\qquad +(T(t-s-h)S(s+h)x - T(t-s-h)S(s)x) \\
&= -AT(t-s)S(s)x + \lim_{h\to 0} T(t-s-h)ASx + \\
&\qquad + \lim_{h\to 0} T(t-s-h)\left(\frac{1}{h}(S(s+h)x - S(s)x) - S(s)Ax\right) \\
&= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x \\
&= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0 \quad \forall s \in [0,t].
\end{aligned}$$

Folglich ist für jedes $x' \in X'$ die komplexwertige Abbildung $s \mapsto x'(f(s))$ konstant. Da die Elemente des Dualraumes von X punktetrennend auf X operieren folgt, dass auch die Abbildung $s \mapsto f(s)$ konstant ist, womit

$$\begin{aligned}
f(0) &= f(t) \\
T(t)S(0)x &= T(0)S(t)x \\
T(t)x &= S(t)x
\end{aligned}$$

gilt. $\square$

Korollar 4.1.11 *Hat eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ einen stetigen infinitesimalen Erzeuger A, so gilt*

$$T(t) = \mathrm{e}^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

4.2 Der Satz von Hille–Yoshida

Da die Halbgruppe $\{T(t)x_0\}$ mit infinitesimalem Erzeuger A die Lösung der banachraumwertigen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x = Ax, \qquad x(0) = x_0$$

in X ist, stellt sich umgekehrt die Frage, wann man bei gegebenem Operator A eine Lösung dieser Differentialgleichung, d. h. eine Halbgruppe finden kann, die A als infinitesimalen Erzeuger hat. Ist A ein selbstadjungierter beschränkter Operator, dann gilt nach dem Funktionalkalkül

$$\left\| \int_{\sigma(A)} \mathrm{e}^{\lambda t} \, dE_\lambda \right\| \leq \mathrm{e}^{\omega t} \Leftrightarrow \sigma(A) \subset (-\infty, \omega].$$

Der folgende Satz ist die entsprechende Charakterisierung für infinitesimale Erzeuger stark stetiger Halbgruppen:

Satz 4.2.1 (Hille-Yoshida) *Ein Operator A ist genau dann infinitesimaler Erzeuger einer C_0–Halbgruppe $\{T(t)\}$, die*

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$$

erfüllt, wenn gilt:

1. *A ist abgeschlossen und dicht definiert.*

2. $$\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\} \subseteq \rho(A),$$

   und die Resolvente $R_\lambda(A)$ von A erfüllt:

   $$\|(R_\lambda(A))^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad \forall \lambda > \omega, \ n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Durch eine geeignete Integraldarstellung der Resolvente von A kann man die Notwendigkeit der Bedingungen relativ leicht überprüfen. Nur für stetige Operatoren A kann man aber die erzeugte Halbgruppe durch die Reihendarstellung

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

definieren. Für unbeschränkte Operatoren A definiert man eine Familie A_λ von stetigen Operatoren, die A in der starken Operatortopologie approximieren und rechnet nach, dass die gesuchte Halbgruppe genau der Grenzwert der Halbgruppen mit Erzeuger A_λ ist:
Bedingung 1 ist notwendig nach Satz 4.1.8.

Die folgenden Integrale existieren wegen $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$ und der starken Stetigkeit der Halbgruppe als uneigentliche banachraumwertige Riemann–Integrale:
Definiert man über die Laplacetransformation von T stetige Operatoren

$$R(\lambda)x := -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x\,dt \quad \forall \lambda > \omega,$$

so folgt wegen der Stetigkeit von $R(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
AR(\lambda)x &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(T(h)-I)R(\lambda)x \\
&= -\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}(T(t+h)-T(t))x\,dt \\
&= -\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_h^\infty \mathrm{e}^{-(t-h)\lambda}T(t)x\,dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\,dt \\
&= -\lim_{h\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{h\lambda}-1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\,dt + \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{h}\int_0^h \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\,dt \\
&= \lambda R(\lambda)x + x,
\end{aligned}$$

also gilt $R(\lambda)x \in D(A)$ $\forall x \in X$ und

$$(A-\lambda)R(\lambda) = I.$$

Da andererseits $T(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ eine C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\mathrm{e}^{-\lambda h}T(h)-I) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T(h)-I) + \frac{1}{h}(\mathrm{e}^{-\lambda h}-1)T(h) = A-\lambda$$

ist, folgt aus 4.1.7 -4 für die Halbgruppe $(T(t)\mathrm{e}^{-\lambda t})$ und $x \in D(A)$:

$$R(\lambda)Ax = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)(A-\lambda)x\,dt - \lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\,dt = x + \lambda R(\lambda)x,$$

also $R(\lambda)(A-\lambda)x = x$ $\forall x \in D(A)$. Damit ist $R(\lambda)$ für $\lambda > \omega$ die Resolvente $R_\lambda(A)$ von A. Es folgt für $\lambda > \omega$:

$$(R_\lambda(A))^n x = (-1)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t_1}\ldots \mathrm{e}^{-\lambda t_n} T(t_1)\ldots T(t_n)x\,dt_1\ldots dt_n$$

also

$$\|(R_\lambda(A))^n\| \leq \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda(t_1+\ldots+t_n)} M \mathrm{e}^{\omega t_1}\ldots \mathrm{e}^{\omega t_n}\,dt_1\ldots dt_n = M(\lambda-\omega)^{-n}.$$

Damit ist auch die Notwendigkeit der 2. Bedingung gezeigt.

Für $x \in D(A)$ gilt:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|-\lambda R_\lambda(A)x - x\| = \lim_{\lambda\to\infty} \|R_\lambda(A)Ax\| \le \lim_{\lambda\to\infty} \frac{M}{\lambda-\omega}\|Ax\| = 0,$$

und da $D(A)$ dicht in X ist, folgt wegen $\|\lambda R_\lambda(A)\| \le M\frac{\lambda}{\lambda-\omega}$

$$\lim_{\lambda\to\infty} -\lambda R_\lambda(A)x = x \qquad \forall x \in X.$$

Dies erlaubt uns nun eine stetige Approximation für A zu definieren, mit deren Hilfe man dann die gesuchte Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger A definiert:
Für alle $\lambda > \omega$ heißt der stetige Operator

$$A_\lambda := -\lambda A R_\lambda(A) = -\lambda^2 R_\lambda(A) - \lambda I$$

die *Yoshida–Approximation* von A.
Wegen $\lim_{\lambda\to\infty} -\lambda R_\lambda x = x$ und $R_\lambda(A)A = AR_\lambda(A)$ gilt für $x \in D(A)$

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} -\lambda R_\lambda A x = Ax.$$

(A_λ) ist also eine Familie von stetigen Operatoren, die A auf $D(A)$ in der starken Operatortopologie approximieren. A_λ ist als stetiger Operator der infinitesimale Erzeuger der gleichmäßig stetigen Halbgruppe

$$e^{tA_\lambda} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A_\lambda^n.$$

Aus der Reihendarstellung folgt $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$ für $AB = BA$ und $\mathrm{e}^{\lambda I} = \mathrm{e}^\lambda I$, woraus für $\|R_\lambda(A)^n\| \le \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$ folgt:

$$\begin{aligned} \|\mathrm{e}^{tA_\lambda}\| &= \mathrm{e}^{-t\lambda}\|\mathrm{e}^{-t\lambda^2 R_\lambda(A)}\| \\ &\le \mathrm{e}^{-t\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^n \|R_\lambda(A)^n\|}{n!} \\ &\le \mathrm{e}^{-t\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^n M(\lambda-\omega)^{-n}}{n!} \\ &= M\mathrm{e}^{-t\lambda + \frac{t\lambda^2}{\lambda-\omega}} = M\mathrm{e}^{\frac{t\lambda\omega}{\lambda-\omega}}. \end{aligned}$$

Da $R_\lambda(A)$ wegen der Resolventengleichung mit $R_\mu(A)$ kommutiert, kommutieren auch $\mathrm{e}^{tA_\lambda}, \mathrm{e}^{tA_\mu}, A_\lambda, A_\mu$, wie man aus den Reihendarstellungen von e^{tA_λ} und e^{tA_μ} herleiten kann.

Somit gilt für $x \in D(A)$ und $\lambda < \mu$ mit 4.1.7-4

$$\begin{aligned}
\left\| \mathrm{e}^{tA_\lambda}x - \mathrm{e}^{tA_\mu}x \right\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}\mathrm{e}^{tsA_\lambda}\mathrm{e}^{t(1-s)A_\mu}x\,ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 t\left\| \mathrm{e}^{tsA_\lambda}\mathrm{e}^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x) \right\| ds \\
&\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| M^2 \mathrm{e}^{\frac{t\lambda\omega}{\lambda-\omega}} \\
&\leq (t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|Ax - A_\mu x\|) M^2 \mathrm{e}^{\frac{t\lambda\omega}{\lambda-\omega}}.
\end{aligned}$$

Wegen $t\mathrm{e}^{\frac{t\lambda\omega}{\lambda-\omega}} \leq a\mathrm{e}^{\frac{t\lambda_0\omega}{\lambda_0-\omega}}$ für $t \leq a$ und $\lambda \geq \lambda_o > \omega$ folgt für $x \in X$ die Konvergenz von $\mathrm{e}^{tA_\lambda}x$ gegen ein Element $T(t)x$ gleichmäßig für $t \in [0, a]$.
Wegen $\|\mathrm{e}^{tA_\lambda}\| \leq M\mathrm{e}^{\frac{t\lambda\omega}{\lambda-\omega}}$ folgt daraus die auf beschränkten Intervallen ($t \in [0, a]$) gleichmäßige Konvergenz von $\mathrm{e}^{tA_\lambda}x$ für $\lambda \to \infty$ gegen ein Element $T(t)x$ für alle $x \in X$.
Es gilt also:

$$T(0) = I \text{ und } \|T(t)\| \leq \lim_{\lambda\to\infty} M\mathrm{e}^{\frac{t\lambda\omega}{\lambda-\omega}} = M\mathrm{e}^{\omega t}$$

und $t \mapsto T(t)x$ ist als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Operatoren stetig.
Die Halbgruppeneigenschaft folgt ebenfalls aus der von e^{tA_λ}:

$$\begin{aligned}
T(s+t)x &= \lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda}\mathrm{e}^{sA_\lambda}x \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \left(\mathrm{e}^{tA_\lambda}T(s) + \mathrm{e}^{tA_\lambda}(\mathrm{e}^{sA_\lambda} - T(s)\right) x \\
&= T(t)T(s)x
\end{aligned}$$

wegen $\|e^{tA_\lambda}\| \leq Me^{\frac{t\lambda\omega}{\lambda-\omega}} \to Me^{\omega t}$ und $\|(T(s) - e^{sA_\lambda})x\| \to 0$ für $\lambda \to \infty$.
Somit ist $T(t)$ eine stark stetige Halbgruppe, die der Wachstumsbedingung $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ genügt, und es bleibt nur noch zu zeigen dass A tatsächlich der infinitesimale Erzeuger von $T(t)$ ist.
Sei $x \in D(A)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
T(t)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty} (\mathrm{e}^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{sA_\lambda}A_\lambda x\,ds \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{sA_\lambda}Ax\,ds + \int_0^t \mathrm{e}^{sA_\lambda}(A_\lambda - A)x\,ds \\
&= \int_0^t T(s)Ax\,ds,
\end{aligned}$$

woraus $\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(T(t)x - x) = Ax \quad \forall x \in D(A)$ folgt.
Für $\lambda > \omega$ gilt $\lambda \in \rho(A)$ nach Voraussetzung, also ist $A - \lambda$ surjektiv. Somit ist für jede echte Erweiterung $\tilde{A}$ von A der Operator $\tilde{A} - \lambda$ nicht injektiv, also $\lambda \notin \rho(\tilde{A})$. Für den infinitesimalen

Erzeuger einer C_0-Halbgruppe wurde aber im ersten Teil des Beweises gezeigt, dass λ für $\lambda > \omega$ in der Resolventenmenge liegt, also $a - \lambda$ injektiv ist. A muss also der infinitesimale Erzeuger der Halbgruppe sein. □

Im Allgemeinen ist es schwierig die Normen $\|R_\lambda(A)^n\|$ abzuschätzen. Für die folgende Klasse von Halbgruppen ist dies auch nur für $\|R_\lambda(A)\|$ notwendig:

Definition 4.2.2 *Eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ heißt* Kontraktionshalbgruppe, *wenn gilt*

$$\|T(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Satz 4.2.3 *A ist genau dann infinitesimaler Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe, wenn gilt:*

1. *A ist abgeschlossen und dicht definiert;*
2. *$\rho(A) \supseteq \mathbb{R}_+$ und $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.*

Beweis: Für Kontraktionshalbgruppen vereinfachen sich die Bedingungen $\|R_\lambda(A)^n\| \leq \frac{1}{\lambda^n}$ offensichtlich zu $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$. □

Korollar 4.2.4 *A ist genau dann infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $\{T(t)\}$ mit $\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{\omega t}$ wenn gilt:*

1. *A ist abgeschlossen und dicht definiert;*
2. *$\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\}$ und $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$ für $\lambda > 0$.*

Beweis: Wegen $\|R_\lambda^n\| \leq \|R_\lambda\|^n$ folgt $\|R_\lambda^n\| \leq \frac{1}{(\lambda-\omega)^n}$ aus $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda-\omega}$. □

In der Quantenmechanik treten Gruppen unitärer Operatoren bei der zeitabhängiger Schrödingergleichungen auf (z.B. $\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ für ein freies Teilchen). Der folgende Satz charakterisiert im wesentlichen Gleichungen deren Lösungen energieerhaltend sind (isometrisch in $L_2(\mathbb{R}^3)$.

Satz 4.2.5 (Stone) *Ein Operator A in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist genau dann infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Gruppe unitärer Operatoren, wenn $\mathrm{i}A$ selbstadjungiert ist.*

Beweis: Sei $T(t)$ eine stark stetige Gruppe unitärer Operatoren mit Erzeuger A. Dann gilt für $x, y \in D(A)$

$$\left(\frac{1}{t}(T(t) - I)x, y\right) = \left(x, \frac{1}{t}(T(-t) - I)y\right) = \left(T(t)x, -\frac{1}{t}(T(t) - I)y\right)$$

und durch Bildung des Grenzwertes für $t \to 0$ sieht man, dass $(Ax, y) = -(x, Ay)$ gilt und die Halbgruppe $T(-t)$ Erzeuger $-A$ hat. Somit ist $\mathrm{i}A$ symmetrisch. Für jede Kontraktionshalbgruppe liegt 1 nach Satz 4.2.3 in der Resolventenmenge des Erzeugers. Also ist $\pm A + 1$ und damit auch $\mathrm{i}A \pm \mathrm{i}$ surjektiv, d.h. die Defektindizes $p_\pm$ von $\mathrm{i}A$ sind 0. Als Erzeuger ist A und damit auch $\mathrm{i}A$ dicht definiert und abgeschlossen. Nach Satz 3.4.4 ist $\mathrm{i}A$ somit selbstadjungiert.
Ist $\mathrm{i}A$ selbstadjungiert, so ist $\pm A$ dicht definiert und abgeschlossen mit $\sigma(\pm A) \subseteq \mathrm{i}\mathbb{R}$. Nach Satz 3.2.6 gilt für $\lambda > 0$: $\|R_{\mathrm{i}\lambda}(\pm \mathrm{i}A)\| \leq \lambda^{-1}$ und damit $\|R_\lambda(\pm A)\| \leq \lambda^{-1}$. $\pm A$ sind also infinitesimale Erzeuger von Kontraktionshalbgruppen. Sei $T(t)$ die von A und $S(t)$ die von $-A$ erzeugte Kontraktionshalbgruppe. Ähnlich dem Beweis von Satz 4.1.10 ergibt sich für $x \in D(A) = D(-A)$:

$$\frac{d}{dt} S(t)T(t)x = -AS(t)T(t)x + S(t)T(t)Ax = 0$$

und $S(t)T(t)x$ ist konstant. Wegen $S(0)T(0)x = x$ folgt $S(t)T(t)x = x$ zunächst für $x \in D(A)$ und wegen der Stetigkeit für $x \in \mathcal{H}$. Definiert man für $t < 0$, $T(t) := S(-t)$, so ist wie man unmittelbar durch Fallunterscheidungen verifiziert $T(t)$ eine Gruppe. Diese ist stark stetig wegen der starken Stetigkeit von $T(t)$ und $S(t)$ und hat infinitesimalen Erzeuger A.
Die Operatoren $T(t)$ sind wegen $T(t)T(-t)x = x$ surjektiv und wegen

$$\frac{d}{dt}\|T(t)x\|^2 = (AT(t)x, T(t)x) + (T(t)x, AT(t)x) = 0$$

isometrisch, also unitär. □

Die explizite Darstellung der Resolvente ist jedoch häufig nicht möglich, weshalb die folgende Charakterisierung von infinitesimalen Erzeugern von Kontraktionshalbgruppen von großer Bedeutung ist.

Definition 4.2.6 *Ein Operator A in einem Banachraum X mit Dualraum X' heißt* dissipativ, *wenn es für alle $x \in D(A)$ ein $x' \in X'$ mit*

$$\|x'\| = \|x\|, \quad x'(x) = \|x\|^2, \quad \mathrm{Re}(x'(Ax)) \leq 0 \textit{ gibt.}$$

Satz 4.2.7 *Ein Operator A ist genau dann dissipativ, wenn*

$$\|(A - \lambda)x\| \geq \lambda\|x\|$$

für alle $x \in D(A)$ und alle $\lambda > 0$ gilt.

Beweis: Ist A dissipativ, so folgt für $\lambda > 0$, $x \in D(A)$ und $x' \in X'$ wie oben

$$\|x'\|\|(A - \lambda)x\| \geq |\mathrm{Re}(x'((A - \lambda)x))| = -\mathrm{Re}(x'(Ax)) + \lambda\|x\|^2 \geq \lambda\|x\|^2,$$

also $\|(A-\lambda)x\| \geq \lambda\|x\|$.
Gilt $\|(A-\lambda)x\| \geq \lambda\|x\|$ für alle $x \in D(A)$ und alle $\lambda > 0$, so folgt für x mit $\|x\| = 1$ dass die offene Einheitskugel B_1 und die Menge $S_x := \{x - \frac{1}{\lambda}Ax : \ \lambda > 0\}$ konvexe disjunkte Mengen sind. Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach gibt es also ein $x' \in X'$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Re}(x'(y)) < \gamma$ für $y \in B_1$ und $\mathrm{Re}(x'(z)) \geq \gamma, \quad z \in S_x$. Aus $0 \in B_1$ folgt $\gamma \neq 0$ und wir können x' so wählen, dass $\gamma = 1$ gilt. Da die Einheitskugel kreisförmig ist, ist $\mathrm{Re}(x'(y)) < 1$ für $y \in B_1$ äquivalent zu $|x'(y)| < 1$ für $y \in B_1$, also zu $\|x'\| \leq 1$. Andererseits folgt aus $\mathrm{Re}(x'(x)) = \lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{Re}(x'(x - \frac{1}{\lambda}Ax)) \geq 1$, woraus sich $x'(x) = \mathrm{Re}(x'(x)) = 1$ und $\|x'\| = 1$ ergibt. Damit erhalten wir $x'(x - \frac{1}{\lambda}Ax) = 1 - \frac{1}{\lambda}\mathrm{Re}(x'(Ax)) \geq 1$ und das Funktional x' erfüllt für $\|x\| = 1$ die geforderte Abschätzung $\mathrm{Re}(x'(Ax)) \leq 0$ mit $x'(x) = \|x'\| = 1$.
Die Gültigkeit dieser Bedingung für $x \in D(A)$ mit $\|x\| = 1$ ist offensichtlich äquivalent zur Gültigkeit für alle $x \in D(A)$. □

Satz 4.2.8 (Lumer-Phillips) *Der Operator A ist genau dann infinitesimaler Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe, wenn er dissipativ und $A - \lambda_0$ für ein $\lambda_0 > 0$ surjektiv ist.*

Beweis: Nach Satz 4.2.3 und Satz 4.2.7 sind infinitesimale Erzeuger von Kontraktionshalbgruppen dissipativ und $A - \lambda$ ist surjektiv für alle $\lambda > 0$.
Ist umgekehrt $A - \lambda_0$ für ein $\lambda_0 > 0$ surjektiv und A dissipativ, so folgt mit Satz 4.2.7, dass $A - \lambda_0$ eine auf dem ganzen Raum definierte stetige Inverse hat. Diese ist dann abgeschlossen, damit ist auch $A - \lambda_0$ und somit A abgeschlossen. Somit ist auch $\lambda_0 \in \rho(A)$ mit $\|R_{\lambda_0}\| \leq \lambda_0^{-1}$. Aus Satz 3.1.2 folgt, dass λ für $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$ in $\rho(A)$ liegt, also folgt für $\lambda_0 \in \rho(A)$, dass das Intervall $(0, 2\lambda_0)$ in $\rho(A)$ liegt, also $(0, \infty) \in \rho(A)$. Also sind die Bedingungen von Satz 4.2.3 erfüllt. □

Beispiel 4.2.9 Die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)$$

mit den Randbedingungen $\frac{\partial}{\partial x} f(0,t) = \frac{\partial}{\partial x} f(1,t) = 0$ (isolierte Ränder) und der Anfangsbedingung $f(x,0) = f_0(x)$, $f_0 \in C([0,1])$ hat eine Lösung in $C([0,1] \times [0,\infty))$.
Offensichtlich genügt es zu zeigen, dass der Operator $Af = f''$, $D(A) = \{f \in C^2([0,1]) : f'(0) = f'(1) = 0\}$ infinitesimaler Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe ist. Mit der Methode der Variation der Konstanten sieht man, dass die Differentialgleichung

$$f'' - \lambda f = g, \quad f'(0) = f'(1) = 0$$

für alle $g \in C([0,1])$ und $\lambda > 0$ genau eine Lösung in $D(A)$ hat, somit ist $A - \lambda$ für $\lambda > 0$ surjektiv.
Sei das Maximum von $|f(s)|$ gleich $|f(s_0)|$ mit $s_0 \in [0,1]$, so erfüllt das Funktional $\Phi := \bar{f}(s_0)\delta_{s_0}$ die Bedingungen $\|\Phi\| = \|f\|$ und $\Phi(f) = \|f\|^2$. Damit ist $\mathrm{Re}(\Phi(f(s)) =$

$\mathrm{Re}(\bar{f}(s_0)f(s))$ maximal für $s = s_0$. Für $s_0 \in (0,1)$ folgt $\mathrm{Re}(\bar{f}(s_0)f(s_0)'') \leq 0$. Für Randextrema $s_0 \in \{0,1\}$ folgt diese Abschätzung wegen der Randbedingungen $f'(0) = f'(1) = 0$. Es gilt also $\mathrm{Re}(\Phi(Af)) \leq 0$ und A ist dissipativ und infinitesimaler Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe nach Satz 4.2.8.

Beispiel 4.2.10 Wir zeigen, dass für ein endliches Maß μ und eine stetige Funktion f auf $[-1,0]$ die verzögerte Differentialgleichung

$$u'(t) = \int_{-1}^{0} u(t+s)\,d\mu(s), \quad t > 0; \qquad u(s) = f(s), \quad -1 \leq s \leq 0$$

eine stetige Lösung u auf $[-1,\infty)$ besitzt.
Diese Differentialgleichung ist eine Verallgemeinerung der klassischen Evolutionsgleichung $u' = \lambda u$, bei der das Wachstum von u zum Zeitpunkt t von den bez. des Maßes μ gewichteten Werten von u im Intervall $[t-1,t]$ abhängt.
Wir zeigen zunächst, dass der Operator $D(A) = \left\{ f \in C^1([-1,0]) : f'(0) = \int_{-1}^{0} f(s)\,d\mu(s) \right\}$, $Af = f'$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ auf $C([-1,0])$ ist:
Der Operator $A - \|\mu\| I$ ist dissipativ: Für $|f(x_0)| = \max_{x\in[-1,0]} |f(x)|$ und $\Phi := \bar{f}(x_0)\delta_{x_0}$ folgt zunächst für $x_0 \in (-1,0)$ unmittelbar, dass $(|f|^2)' = 2\mathrm{Re}(\bar{f}(x_0)f'(x_0)) = 0$ und somit $\mathrm{Re}(\Phi((A - \|\mu\|I)f)) = \mathrm{Re}(\bar{f}(x_0)f'(x_0)) - \|\mu\||f|^2(x_0) \leq 0$ gilt. Für $x_0 = -1$ folgt diese Abschätzung wegen $(|f|^2)'(-1) \leq 0$. Für $x_0 = 0$ gilt $|f(0)| \geq |f(s)|$, also

$$\mathrm{Re}(\bar{f}(0)f'(0) - \bar{f}(0)\|\mu\|f(0)) = \mathrm{Re}\left(\bar{f}(0)\int_{-1}^{0} f(s)\,d\mu(s)\right) - |f|^2(0)\|\mu\| \leq 0.$$

Somit ist $A - \|\mu\|I$ dissipativ.
Für $\lambda > 0$ hat die Differentialgleichung $f' - (\|\mu\| + \lambda)f = g$ immer eine Lösung in $D(A)$, also ist $A - (\|\mu\| + \lambda)I$ für $\lambda > 0$ surjektiv. Es folgt, dass $A - \|\mu\|I$ infinitesimaler Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe $(\tilde{T}(t))$ ist und man sieht, dass A infinitesimaler Erzeuger der Halbgruppe $(T(t))$, $T(t) = \tilde{T}(t)e^{\|\mu\|t}$ ist.
Für $f \in D(A)$ folgt aus

$$\frac{d}{d\alpha}T(t+\alpha)f(s-\alpha) = T(t+\alpha)Af(s-\alpha) - T(t+\alpha)f'(s-\alpha) = 0,$$

dass $T(t)f(s) = T(t+\alpha)f(s-\alpha)$ für $-1+\alpha \leq s \leq 0$ gilt, dass also durch $u(t+s) := T(t)f(s)$, $-1 \leq s \leq 0$, $0 \leq t$ eine stetige Funktion u definiert wird.
Weiters gilt mit Satz 4.1.7-3

$$u'(t) = \frac{d}{dt}(T(t)f)(0) = AT(t)f(0) = \int_{-1}^{0} T(t)f(s)\,d\mu(s) = \int_{-1}^{0} u(t+s)\,d\mu(s)$$

also ist u die gesuchte Lösung für $f \in D(A)$.

Für $f \notin D(A)$ betrachten wir eine Folge (f_n) in $D(A)$, die in $C([-1,0])$ gegen f konvergiert. Mit Satz 4.1.4 folgt die gleichmäßige Konvergenz von $T(t)f_n$ für t aus einem kompakten Intervall und damit die gleichmäßige Konvergenz der Lösungen u_n auf kompakten Intervallen. Wegen

$$(T(t)f_n)'(0) = u_n'(t) = \int_{-1}^{0} u_n(t+s)\, d\mu(s)$$

konvergiert auch u_n' gleichmäßig auf kompakten Intervallen. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von (u_n) und (u_n') auf kompakten Intervallen folgt, dass $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ in $(0,\infty)$ differenzierbar und somit die gesuchte Lösung ist.

Kapitel 5

Distributionen

In der theoretischen Physik erwies sich das formale Differenzieren von Funktionen, die im klassischen Sinn nicht differenzierbar sind, schon als sehr hilfreich lange bevor dieser Kalkül mathematisch gerechtfertigt werden konnte. So ist in der Mechanik die Kraft, die auf einen Körper wirkt proportional zur Beschleunigung. Betrachtet man aber den idealisierten (und anschaulichen) Fall eines Stoßes, bei dem der Körper für $t < 0$ Geschwindigkeit 0 und für $t > 0$ Geschwindigkeit 1 hat (Heavisidefunktion), so kann die Kraft offensichtlich nicht als Ableitung dieser unstetigen Funktion beschrieben werden. Um die durch Differentialgleichungen beschriebenen Gesetze der Mechanik auf diesen Fall anwenden zu können, wäre es wünschenswert auch unstetige Funktionen differenzieren zu können. Es zeigte sich ein formal-intuitiver Kalkül mit der Differentiation von unstetigen Funktionen insbesondere auch bei der Herleitung physikalischer Formeln bei denen höhere Ableitungen auftreten als sehr hilfreich, lange bevor dieser mathematisch verstanden wurde (Sergei Sobolev 1935, Laurent Schwartz 1944). So leitete Dirac Formeln aus der relativistischen Quantentheorie mit einem damals mathematisch nicht zu rechtfertigenden Kalkül her.
Eine weitere Motivation für die Ausdehnung des Differentiationsbegriffs auf möglichst alle stetigen Funktionen liegt auch in der Theorie der Differentialgleichungen. So ist eine befriedigende Lösungstheorie gewisser Differentialgleichungen nur dann möglich, wenn man vom klassischen Begriff der Ableitung abgeht und *schwache Lösungen*, also Lösungen im Sinn von Distributionen betrachtet. Als Beispiel betrachten wir die Wellengleichung $u_{x,x} - u_{y,y} = 0$. Durch die Substitution $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ erhält sie die Form $u_{\xi,\eta} = 0$, die offensichtlich genau jene Funktionen aus $C^{(2)}(\mathbb{R}^2)$ als Lösung hat, die von der Form $u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$ sind. Eine Funktion f auf $\mathbb{R}^2$ ist also genau dann eine klassische Lösung der Wellengleichung wenn sie 2 mal differenzierbar und von der Form $f(x, y) = f_1(x+y)+f_2(x-y)$ ist. Die Differenzierbarkeitsforderung ist dabei nur wegen der Beschreibung dieser Funktionen durch eine Differentialgleichung gegeben. Es wäre also wünschenswert den Begriff der Differentiation so auszudehnen, dass alle Funktionen f mit $f(x, y) = f_1(x + y) + f_2(x - y)$ als verallgemeinerte Lösung der Wellengleichung auftreten.
Ist f differenzierbar, so stellt $\phi \mapsto \int \phi(x)f'(x)\,dx$ ein lineares Funktional auf dem Raum $\mathscr{D}$

der $C^\infty(\mathbb{R})$ Funktionen mit kompaktem Träger dar. Dieses kann durch partielle Integration auch als $-\int \phi'(x)f(x)\,dx$ dargestellt werde. Dieser Ausdruck gibt aber nicht nur für differenzierbares f Sinn, sondern für jede integrierbare Funktion f. Versieht man den Raum $\mathscr{D}$ mit einer Topologie unter der sowohl die Bildung der Ableitung $\phi \mapsto \phi'$ als auch die Integration mit f stetig ist, so kann man durch wiederholte Anwendung der partiellen Integration sogar Ableitungen beliebiger Ordnung der Funktion f als stetige lineare Funktionale auf $\mathscr{D}$ durch $f^{(n)}(\phi) = (-1)^n \int \phi^{(n)}(x)f(x)\,dx$ erklären. Dabei ist der kompakte Träger der Funktionen aus $\mathscr{D}$ sowohl für das Verschwinden der Randterme bei der partiellen Integration, als auch für die Existenz der Integrale notwendig.

5.1 Die Räume $\mathscr{D}'_K$ und $\mathscr{D}'(\Omega)$

Der einfachste Raum von Distributionen läßt sich wie folgt definieren: Es sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und K eine kompakte Teilmenge von Ω. Der Raum der *Testfunktionen* $\mathscr{D}_K$ sei der Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ aller Funktionen mit Träger in K.
Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, so bezeichnen wir mit D^α die partielle Ableitung $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}x_1\ldots\partial^{\alpha_n}x_n}$ der Ordnung $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet $|x|$ die euklidische Norm $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. D^α ist somit stetig von $\mathscr{D}_K$ versehen mit der von der Seminorm p_α :

$$p_\alpha(\phi) = \sup\{|D^\alpha(\phi)(x)| : x \in K\} \tag{5.1}$$

nach $\mathscr{D}_K$ versehen mit der Supremumsnorm. Um partielle Ableitungen sämtlicher Ordnungen stetig zu machen betrachten wir demzufolge die von der Familie p_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ von Seminormen erzeugte lokalkonvexe Topologie τ_K auf $\mathscr{D}_K$. (Da für $\phi \in \mathscr{D}_K$ aus $\frac{\partial}{\partial x_i}\phi = 0$ $\phi = 0$ folgt, sieht man leicht durch Induktion, dass diese Seminormen sogar Normen sind.)
Häufig ist es vorteilhaft die Folge von Normen $\|\cdot\|_N$ auf $\mathscr{D}_K$, die durch

$$\|\phi\|_N = \max_{|\alpha|\le N} p_\alpha(\phi) = \max_{|\alpha|\le N} \|D^\alpha\phi\|_\infty \tag{5.2}$$

gegeben ist, statt der Seminormen p_α zu betrachten. Offensichtlich wird τ_K auch durch diese Folge von Normen induziert und es gilt

$$\max_{x\in K} |\phi(x)| = \|\phi\|_0 \le \ldots \le \|\phi\|_N \le \|\phi\|_{N+1} \le \ldots . \tag{5.3}$$

Wir bezeichnen den Raum $\mathscr{D}'_K$ der stetigen linearen Funktionale auf $(\mathscr{D}_K, \tau_K)$ als den Raum der *Distributionen*. Für $\Lambda \in \mathscr{D}'_K$, $\phi \in \mathscr{D}_K$ schreiben wir $\Lambda\phi$ für $\Lambda(\phi)$.

Beispiel 5.1.1 Jede auf K integrierbare Funktion, bzw. jedes endliche Maß auf K kann wegen $|\int \phi\,d\mu| \le \|\phi\|_0\|\mu\|$ als Distribution aufgefasst werden.

Für $\Lambda \in \mathscr{D}'_K$ bezeichnen wir das auf $(\mathscr{D}_K, \tau_K)$ stetige lineare Funktional $\phi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha \phi)$ als die Ableitung $D^\alpha\Lambda$ der Distribution Λ. Durch $|\alpha|$-fache partielle Differentiation verifiziert man unmittelbar, dass für $f \in C^{(|\alpha|)}(\mathbb{R}^n)$ die Distribution

$$\Lambda_f : \Lambda_f\phi = \int_{\mathbb{R}^n} f\phi \, dx$$

gilt $D^\alpha\Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f}$, wodurch diese Bezeichnung gerechtfertigt ist.
Ein *Fréchetraum* ist ein topologischer Vektorraum X dessen Topologie durch eine Metrik induziert wird unter der X vollständig ist.

Satz 5.1.2 *$(\mathscr{D}_K, \tau_K)$ ist ein Fréchetraum.*

Beweis: Wir definieren $d(0, \phi) = \sum_{n=0}^\infty 2^{-n} \arctan(\|\phi\|_n)$ und $d(\phi_1, \phi_2) = d(\phi_2, \phi_1) = d(0, \phi_1 - \phi_2)$. Die Reihe ist offensichtlich konvergent und wegen $\arctan x + \arctan y \geq \arctan(x + y)$ für $x, y \geq 0$ folgt

$$d(\phi_1, \phi_2) + d(\phi_2, \phi_3) = d(0, \phi_1 - \phi_2) + d(0, \phi_2 - \phi_3) \geq d(0, \phi_1 - \phi_3) = d(\phi_1, \phi_3).$$

d erfüllt also die Dreiecksungleichung und definiert somit eine Metrik auf $\mathscr{D}_K$. Wegen (5.3) gilt

$$2^{-n} \arctan(\|\phi\|_n) \leq d(0, \phi) \leq (2 - 2^{-n}) \arctan(\|\phi\|_n) + 2^{-n}\frac{\pi}{2} \leq 2(\arctan(\|\phi\|_n) + 2^{-n}).$$

Es folgt

$$\{\phi : d(\phi, 0) < \epsilon\} \subseteq \{\phi : \|\phi\|_n < \tan 2^n\epsilon\} \quad \text{für } n \geq 0$$

und

$$\{\phi : d(\phi, 0) < \epsilon\} \supseteq \left\{\phi : \|\phi\|_{n_0} < \tan\frac{\epsilon}{4}\right\} \quad \text{für } n_0 \geq \frac{\log\frac{4}{\epsilon}}{\log 2},$$

woraus man sieht, dass die von der Metrik d induzierte Topologie gleich der von den Normen $\|\cdot\|_n$ induzierten Topologie ist.
Für die Vollständigkeit zeigen wir zuerst, dass der Differentialoperator D auf dem Banachraum $C([a, b])$ abgeschlossen ist, d.h. aus $\phi_n \to \phi_0$ und $\phi'_n \to \psi$ gleichmäßig in $[a, b]$, $\phi_0, \psi \in C([a, b])$ für eine Folge (ϕ_n) stetig differenzierbarer Funktionen auf $[a, b]$ folgt ϕ_0 ist stetig differnzierbar mit $\phi'_0 = \psi$. Dies folgt aber unmittelbar aus dem Hauptsatz der Integralrechnung und

$$\phi_0(x) = \lim_n \phi_n(x) = \lim_n \left(\phi_n(a) + \int_a^x \phi'_n(s)\, ds\right) = \phi_0(a) + \int_a^x \psi(s)\, ds.$$

Es gilt also: Konvergiert (ϕ_n) gleichmäßig gegen ϕ_0 und $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_n\right)$ gleichmäßig gegen ψ, so ist ϕ_0 stetig partiell nach x_i differenzierbar mit $\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_n \to \frac{\partial}{\partial x_i}\phi_0$ gleichmäßig.

Jede Cauchyfolge (ϕ_n) in $(\mathscr{D}_K, d)$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion ϕ_0. Es bleibt also zu zeigen, dass $\phi_0 \in \mathscr{D}_K$ gilt und sogar Konvergenz der Folge (ϕ_n) gegen ϕ_0 bezüglich d oder äquivalent dazu dass für jeden Multiindex α gleichmäßige Konvergenz der Folge $(D^\alpha \phi_n)$ gegen $D^\alpha \phi_0$ vorliegt. Dies folgt nun unmittelbar durch wiederholtes Anwenden obiger Aussage auf die Folgen $D^{\alpha_j}\phi_n$ für eine monotone Folge α_j mit $|\alpha_{j+1}| = 1 + |\alpha_j|$ (sukzessives partielles Differenzieren). $\square$

Es war unser Ziel die Topologie auf $\mathscr{D}_K$ so zu wählen, dass $\mathscr{D}'_K$ alle stetigen Funktionen und deren Ableitungen im distributionellen Sinn enthält. Je feiner die Topologie auf $\mathscr{D}_K$ ist, desto mehr Elemente im topologischen Dualraum $\mathscr{D}'_K$ gibt es. Wählt man die Topologie zu fein, so muss man erwarten, dass $\mathscr{D}'_K$ auch Elemente enthält, die nicht als Verallgemeinerung der Ableitungen von Funktionen interpretiert werden können und weniger Eigenschaften mit Funktionen bzw. deren Ableitungen teilen. Der folgende Satz zeigt, dass wir die Topologie auf $\mathscr{D}_K$ unter diesem Gesichtspunkt richtig gewählt haben und jede Distribution als verallgemeinerte Ableitung einer stetigen Funktion aufgefasst werden kann:

Lemma 5.1.3 *Jedes endliche Borelmaß μ auf K ist die Ableitung einer stetigen Funktion f auf K im distributionellen Sinn, d.h. $\int \phi \, d\mu = D^\alpha \Lambda_f \phi \ \forall \phi \in \mathscr{D}_K$.*

Beweis: Sei $\alpha_\mathbf{1}$ der Multiindex $(1, \ldots, 1)$, $\alpha_\mathbf{2}$ der Multiindex $(2, \ldots, 2)$. Dann gilt, wenn wir annehmen $K \subset \times_{i=1}^n [a_i, \infty)$ nach dem Hauptsatz: $\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\times_i [a_i, x_i]}(y) D^{\alpha_\mathbf{1}} \phi(y) \, dy$. Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\times [a_i, x_i]}(y) \, d\mu(x) D^{\alpha_\mathbf{1}} \phi(y) \, dy = \int F(y) D^{\alpha_\mathbf{1}} \phi(y) \, dy$$

mit einer messbaren beschränkten Funktion F. Dieselbe Überlegung nochmals für das Maß $F(y)\,dy$ liefert $\int \phi \, d\mu = \int f(z) D^{\alpha_\mathbf{2}} \phi(z) \, dz$ mit der stetigen Funktion f: $f(z) = \int \chi_{\prod_i [a_i, z_i]}(y) F(y) \, dy$. Also gilt $D^{\alpha_\mathbf{2}} f = \mu$ im distributionellen Sinn. $\square$

Satz 5.1.4 *Für $\Lambda \in \mathscr{D}'_K$ gibt es einen Multiindex α und eine Funktion $f \in C(K)$ mit $\Lambda = D^\alpha \Lambda_f$, also $\Lambda \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \phi(x) \, dx \ \forall \phi \in \mathscr{D}_K$.*

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt für $1 \le i \le n$: $|\phi(x)| \le M_K \max_{x \in K} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) \right|$, wenn M_K den Durchmesser von K bezeichnet. Mit Induktion erhalten wir für $N \ge |\alpha|$

$$|\phi(x)| \le M_K^{|\alpha|} \max_{x \in K} |D^\alpha \phi(x)| \ \text{ und } |D^\alpha \phi(x)| \le M_K^{nN - |\alpha|} \max_{x \in K} |D^{\alpha_\mathbf{N}} \phi(x)| \,, \tag{5.4}$$

wobei $\alpha_\mathbf{N}$ den Multiindex $(N, \ldots, N)$ bezeichnet.
Es folgt für die in (5.2) definierte Norm: $\|\phi\|_N \le C_{N,K} \max_{x \in K} |D^{\alpha_\mathbf{N}} \phi(x)|$.
Wegen der Stetigkeit der Distribution Λ gibt es, da die Topologie auf $\mathscr{D}_K$ auch durch die Normen $\| \cdot \|_N$ erzeugt wird wegen (5.2) und (5.3) ein $N \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}_+$ mit $|\Lambda \phi| \le c \|\phi\|_N$.
Mit der Abschätzung (5.4) folgt

$$|\Lambda \phi| \le c \|\phi\|_N \le \tilde{c} \max_{x \in K} |D^{\alpha_\mathbf{N}} \phi(x)|. \tag{5.5}$$

Die Abbildung $\phi \mapsto D^{\alpha_\mathbf{N}}\phi$ ist injektiv auf $\mathscr{D}_K$, also ist die Abbildung $D^{\alpha_\mathbf{N}}\phi \mapsto \Lambda\phi$ wohldefiniert und wegen (5.5) stetig auf dem Teilraum $D^{\alpha_\mathbf{N}}(\mathscr{D}_K)$ von $C(K)$ bezüglich der Supremumsnorm. Nach dem Satz von Hahn-Banach kann dieses auf $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ normerhaltend fortgesetzt werden. Nach dem Satz von Riesz entspricht dieses Funktional der Integration nach einem Maß μ. Also gilt für $\phi \in \mathscr{D}_K$ nach Lemma 5.1.3:

$$\Lambda\phi = \int D^{\alpha_\mathbf{N}}\phi \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha_\mathbf{N}}\phi(x) D^\beta f(x) \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha_\mathbf{N}+\beta}\phi(x) f(x) \, dx,$$

also $\Lambda = (-1)^{nN} D^{\alpha_\mathbf{N}+\beta}\Lambda_f$. □

Für zahlreiche Anwendungen der Theorie der Distributionen ist die zuvor getroffene Annahme, dass alle Testfunktionen einen Träger in K haben zu restriktiv. Deshalb betrachten wir den Raum $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\Omega)$ aller C^∞-Funktionen in einer offenen Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger. Diesen versehen wir mit der lokalkonvexen Vektorraumtopologie τ, die durch die Familie aller Seminormen p auf $\mathscr{D}$, für die $p \circ \iota_K$ für alle kompakten Teilmengen K von Ω τ_k-stetig ist induziert wird. ι_K bezeichnet die Inklusionsabbildung von $\mathscr{D}_K$ in $\mathscr{D}$. Da insbesondere Punktauswertungen solche Seminormen darstellen, ist $(\mathscr{D}, \tau)$ ein Hausdorffraum. τ ist nicht notwendigerweise die durch die Inklusionen ι_K induzierte Finaltopologie, da diese nicht lokalkonvex sein muss. Der folgende Satz zeigt, dass die Stetigkeit linearer Abbildungen auf $(\mathscr{D}, \tau)$ ähnlich der Stetigkeit von Räumen die mit einer Finaltopologie versehen sind beschrieben werden kann:

Satz 5.1.5 *i) τ ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf $\mathscr{D}$ für die alle Inklusionsabbildungen ι_K τ_K-stetig sind.*
ii) Eine lineare Abbildung f von $(\mathscr{D}, \tau)$ in einen lokalkonvexen Vektorraum (X, τ') ist genau dann stetig, wenn für jede kompakte Teilmengen K von Ω die Abbildung $f \circ \iota_K, \quad (\mathscr{D}_K, \tau_K) \to (X, \tau')$ stetig ist.
iii) Für alle kompakten Teilmengen K von Ω ist τ_K die Relativtopologie von τ auf $\mathscr{D}_K$.

Beweis: i) Sei $\tilde{\tau}$ eine lokalkonvexe Vektorraumtopologie auf $\mathscr{D}$ bezüglich der alle Inklusionsabbildungen $\iota_K, \quad K \subset \Omega$ kompakt stetig sind. Jede lokalkonvexe Vektorraumtopologie wird durch die Familie aller bezüglich dieser Topoloie stetigen Seminormen induziert, d.h. sie ist die Initialtopologie der Abbildungen $p \circ tr_x$, wobei p eine $\tilde{\tau}$-stetige Seminorm und tr_x die Translation $y \mapsto x + y$ ist.
ι_K bildet also genau dann stetig nach $(\mathscr{D}, \tilde{\tau})$ ab, wenn alle Abbildungen $p \circ tr_x \circ \iota_K$ stetig sind. Da in jedem lokalkonvexen Vektorraum Translationen Homöomorphismen sind, ist dies genau dann der Fall wenn die Abbildungen $p \circ \iota_K$ stetig sind. Damit ist aber p eine τ-stetige Seminorm und es folgt, dass $\tilde{\tau}$ gröber als τ ist.
ii) Ist f stetig, so ist $f \circ \iota_K$ als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig.
Sind umgekehrt alle Abbildungen $f \circ \iota_K$ für alle kompakten $K \subset \Omega$ stetig, so sind auch die Abbildungen $p \circ f \circ \iota_K$ für jede stetige Seminorm p auf (X, τ') stetig. Da f linear ist, ist $p \circ f$ eine Seminorm auf $\mathscr{D}$, die aufgrund der Definition von τ τ-stetig ist.

Die Mengen $p^{-1}((-\epsilon,\epsilon))$ bilden eine Umgebungsbasis der 0 in (X,τ'), wenn p die τ'-stetigen Seminormen durchläuft. Damit ist f in 0 stetig. Eine lineare Abbildung zwischen topologischen Vektorräumen ist aber genau dann stetig, wenn sie in 0 stetig ist.
iii) Wegen der Stetigkeit der Inklusionsabbildung ι_K ist τ_K feiner als die Relativtopologie. Für jeden Multiindex α ist durch $\hat{p}_\alpha(\phi) := \max\{|D^\alpha\phi(x)| : x \in \Omega\}$ eine Seminorm auf $\mathscr{D}$ erklṙt. Da die Seminormen $\hat{p}_\alpha \circ \iota_K$ genau die Seminormen p_α auf $\mathscr{D}_K$ von (5.2) sind, welche die Topologie τ_K induzieren ist diese Seminorm τ-stetig. Damit ist die Seminorm $p_\alpha = \hat{p}_\alpha \circ \iota_K$ auf $\mathscr{D}_K$ sogar stetig bezüglich der durch ι_K induzierten Relativtopologie und da diese Seminormen p_α die Topologie τ_K induzieren ist die Relativtopologie feiner als τ_K. τ_K ist also gleich der Relativtopologie. □

Auf $(\mathscr{D},\tau)$ kann die Konvergenz von Folgen durch folgendes Kriterium beschrieben werden:

Satz 5.1.6 *In $(\mathscr{D},\tau)$ konvergiert eine Folge (ϕ_i) genau dann gegen 0, wenn es eine kompakte Menge K gibt mit $\operatorname{supp}(\phi_i) \subseteq K$ $\forall i$ und für jeden Multiindex α die Folge $(D^\alpha\phi_i)$ gleichmäßig auf K gegen 0 konvergiert.*

Beweis: Es gelte $\operatorname{supp}(\phi_i) \subseteq K$ $\forall i$ und für alle α $D^\alpha\phi_i \to 0$ gleichmäßig auf K. Für jede Umgebung U der 0 in $\mathscr{D}$ folgt wegen der Stetigkeit von ι_K, dass $\iota_K^{-1}(U)$ eine Umgebung der 0 in $\mathscr{D}_K$ ist. Da $D^\alpha\phi_i \to 0$ gleichmäßig in K für alle α aber äquivalent zur Konvergenz in $\mathscr{D}_K$ ist, folgt $\iota_K^{-1}(\phi_i) \in \iota_K^{-1}(U)$ für $i \geq i_0$, also $\phi_i \in U$ für $i \geq i_0$. Somit konvergiert (ϕ_i) in $(\mathscr{D},\tau)$ gegen 0.
Sei (ϕ_i) eine Nullfolge in $\mathscr{D}$. Wir zeigen, dass es eine kompakte Teilmenge von Ω gibt, die $\cup_i \operatorname{supp}(\phi_i)$ umfasst: Sei $A_i := \phi_i^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ und $A := \cup_i A_i$. Dann sind A_i und A offen und A_i relativ kompakt. Wenn A nicht relativ kompakt in Ω ist, gibt es eine Folge (x_j) in A, die keinen Häufungspunkt in Ω hat. Da für alle i $\bar{A}_i = \operatorname{supp}(\phi_i)$ kompakt ist, sind für alle i nur endlich viele Glieder der Folge (x_j) in A_i. Wir können deshalb gegebenenfalls nach Übergang zu einer Teilfolge von (ϕ_i) annehmen, dass die Folge (x_j) $\phi_i(x_j) = 0$ für $i < j$ und $\phi_i(x_i) \neq 0$ erfüllt. Damit können wir rekursiv eine Folge reeller Zahlen (c_i) durch $\sum_{i=1}^{j} c_i\phi_j(x_i) = 1$ definieren. Da für jede kompakte Teimenge K von Ω die Folge (x_i) keinen Häufungspunkt in K hat liegen nur endlich viele Elemente der Folge (x_i) in K. $F := \sum_{i=1}^{\infty} c_i\delta_{x_i}$ ist also als endliche Summe von stetigen Auswertungsfunktionalen $c_i\delta_{x_i}$, $x_i \in K$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{D}_K$. Mit Satz 5.1.5 ii) ist $\sum_{i=1}^{\infty} c_i\delta_{x_i}$ damit stetig auf $\mathscr{D}$. Es müsste also wegen $\phi_i \to 0$ auch $\lim_{j\to\infty} F(\phi_j) = 0$ gelten. Wegen $x_j \notin A_i$ für $j > i$ gilt aber $F(\phi_j) = \sum_{i=1}^{j} c_i\phi_j(x_i) = 1$. Dieser Widerspruch zeigt, dass A relativ kompakt in Ω ist.
Für jeden Multiindex α definiert die Abbildung $\hat{p}_\alpha : \phi \mapsto \max(|D^\alpha\phi|)$ nach 5.1.5 i) eine stetige Seminorm. Damit impliziert $(\phi_i) \to 0$ $\hat{p}_\alpha(\phi_i) \to 0$, also $D^\alpha\phi_i \to 0$ gleichmäßig auf der in Ω kompakten Menge $\bar{A}$. □

Den linearen Raum der stetigen linearen Funktionale auf dem Raum der *Testfunktionen* $(\mathscr{D}(\Omega),\tau)$ bezeichnen wir als Raum der *Distributionen* $\mathscr{D}'(\Omega)$.
Der folgende Satz zeigt, dass obwohl $(\mathscr{D},\tau)$ nicht metrisierbar ist (vgl. Übungsbeispiel 47), die Stetigkeit von Funktionalen über Konvergenz von Folgen anstatt der Konvergenz von

Netzen beschrieben werden kann:

Satz 5.1.7 *Äquivalent sind:*
i) Die Linearform Λ auf $\mathscr{D}(\Omega)$ ist stetig;
ii) Für jede kompakte Teilmenge K von Ω ist $\Lambda \circ \iota_K$ auf $(\mathscr{D}_K, \tau_K)$ stetig;
iii) Für jede Folge (ϕ_i) von Testfunktionen, die in $(\mathscr{D}, \tau)$ gegen 0 konvergiert, konvergiert die Folge $(\Lambda\phi_i)$ gegen 0.

$(\mathscr{D}, \tau)$ ist ein nicht metrisierbarer topologischer Raum. Auf nicht metrisierbaren topologischen Räumen folgt aus der Folgenstetigkeit (d.h. $(x_n \to x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to f(x_0))$) im Allgemeinen nicht die Stetigkeit der Funktion f. *iii)* $\Rightarrow$ *i)* ist also nicht trivial!
Beweis: iii) $\Rightarrow$ ii): Wegen Satz 5.1.5 ii) genügt es zu zeigen, dass $\Lambda \circ \iota_K$ für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ stetig auf $(\mathscr{D}_K, \tau_K)$ ist, d.h. die Restriktion von Λ auf $\mathscr{D}_K$ muss τ_K-stetig sein. Da $(\mathscr{D}_K, \tau_K)$ aber nach Satz 5.1.2 metrisierbar ist, genügt es zu zeigen, dass für jede Folge (ϕ_i) in $\mathscr{D}_K$, die gegen 0 konvergiert die Folge $\Lambda(\phi_i)$ gegen 0 konvergiert. Nach Satz 5.1.6 ist für eine solche Folge aber $(\iota_K(\phi_i))$ eine Folge die in $(\mathscr{D}, \tau)$ gegen 0 konvergiert und es folgt die Konvergenz von $(\Lambda\phi_i)$ gegen 0 aus der Voraussetzung.
i) $\Rightarrow$ iii): Aus Stetigkeit folgt immer Folgenstetigkeit.
Die Äquivalenz von i) und ii) folgt aus Satz 5.1.5 ii). $\square$

Im Gegensatz zu $\mathscr{D}'_K$ können die Elemente von $\mathscr{D}'$ i.A. nicht als distributionelle Ableitungen stetiger Funktionen aufgefasst werden: Wählt man eine Folge (x_i) in Ω, die keinen Häufungspunkt hat, so definiert für jede Folge (α_i) von Multiindizes $\sum_{i=1}^{\infty} D^{\alpha_i}\delta_{x_i}$ eine Distribution, da jede kompakte Menge nur endlich viele Folgenglieder enthält. Für $|\alpha_i| \to \infty$ ist diese Distribution offensichtlich nicht durch $D^\alpha f$ darstellbar. Da aber jede Distribution in $\mathscr{D}'$ eingeschränkt auf $\mathscr{D}_K$ ein Element von $\mathscr{D}'_K$ ist, ist dies lokal, also auf jeder kompakten Teilmenge von Ω, möglich.
Das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für das für alle kompakten Teilmengen K ein $c_K \in \mathbb{R}$ mit $|\Lambda\phi| < c_K \|\phi\|_n$ für $\phi \in \mathscr{D}_K$ existiert, nennt man die *Ordnung* der Distribution Λ. Gibt es kein solches n, so sagt man Λ hat unendliche Ordnung.
Für jede lokal (d.h. auf kompakten Teilmengen) integrierbare Funktion f ist Λ_f: $\Lambda_f(\phi) = \int f(x)\phi(x)\,dx$ in $\mathscr{D}'$. Distributionen die sich so darstellen lassen heißen *regulär*.

5.2 Temperierte Distributionen

Zur Definition von Distributionen haben wir Testfunktionen betrachtet, die kompakten Träger haben. Dies war einerseits notwendig um das Verschwinden von Randtermen bei der Definition der Ableitung durch partielle Integration zu erzwingen, andererseits wird so sichergestellt, dass es keine Distributionen gibt, die "im Unendlichen leben", also auf allen glatten Funktionen mit kompaktem Träger verschwinden.

Auf $\mathbb{R}^n$ kann diese Bedingung abgeschwächt werden, indem man den *Schwartz-Raum* $\mathscr{S}$ aller "rasch abklingenden Funktionen" als Raum von Testfunktionen betrachtet. Genauer sind das jene $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktionen ϕ, für die für jeden Multiindex α und jedes $l \in \mathbb{N}$

$$p_{\alpha,l}(\phi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^l|D^\alpha\phi(x)| \tag{5.6}$$

endlich ist. $p_{\alpha,l}$ ist demnach eine Seminorm auf $\mathscr{S}$.
Wir versehen $\mathscr{S}$ mit der von dieser Familie von Seminormen $p_{\alpha,l}$ induzierten lokalkonvexen Topologie $\tau_{\mathscr{S}}$.

Satz 5.2.1 *$(\mathscr{S}, \tau_{\mathscr{S}})$ ist ein Fréchetraum.*

Beweis: In jedem lokal konvexen Vektorraum, dessen Topologie von einer abzählbaren Familie von Seminormen induziert wird, kann man wie im Beweis von Satz 5.1.2 eine Metrik d definieren, die dieselbe Topologie induziert sodass jede Cauchyfolge (ϕ_i) in $(\mathscr{S}, d)$ gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen eine differenzierbare Funktion ϕ_0 konvergiert. Es gilt sogar $D^\alpha\phi_i \to D^\alpha\phi_0$ für jeden Multiindex α gleichmäßig auf kompakten Mengen. Also ist $\phi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und da (ϕ_i) auch bezüglich der Seminormen $p_{\alpha,l}$ konvergiert, folgt $\phi_0 \in \mathscr{S}$. □

Satz 5.2.2 *$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ist ein dichter Teilraum von $\mathscr{S}$. Die Einbettung von $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathscr{S}$ ist stetig.*

Beweis: Nach Satz 5.1.5 ii) ist für die Stetigkeit der Einbettung von $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathscr{S}$ zu zeigen, dass die Einbettungen $\iota_K : \mathscr{D}_K \hookrightarrow \mathscr{S}$ für alle kompakten Teilmengen K stetig sind. Für die durch (5.1) und (5.6) definierten Seminormen gilt aber

$$p_{\alpha,m}(\iota_K(\phi)) \le (\max\{(1+|x|^2)^m : x\in K\})p_{\alpha,0}(\iota_K(\phi)) = (\max\{(1+|x|^2)^m : x\in K\})p_\alpha(\phi),$$

womit die Einbettungen $\mathscr{D}_K \hookrightarrow \mathscr{S}$ stetig sind.
Sei $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f_1(x) = 1$ für $|x| \le 1$ und $f_1(x) = 0$ für $|x| \ge 2$. (Eine solche Funktion erhält man durch Integration einer ungeraden geeignet normierten Funktion aus $\mathscr{D}_{[-2,-1]\cup[1,2]}$). Dann ist für $r > 0$ die Funktion $f_r(x) := f_1(|x|/r)$ in $\mathscr{D}$ mit $f_r(x) = 1$ für $|x| \le r$ und $f_r(x) = 0$ für $|x| \ge 2r$.
Es gilt

$$D^\alpha(\phi(1-f_r)) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} C_{\alpha_1,\alpha_2} D^{\alpha_1}\phi D^{\alpha_2}(1-f_r).$$

Für $r > 1$ und $|\alpha_2| \le |\alpha|$ ist $D^{\alpha_2}(1-f_r)$ wegen $D^{\alpha_2}f_r(x) = \frac{1}{r^{|\alpha_2|}}D^{\alpha_2}f_1(r^{-1}x)$ durch $M_{f,|\alpha|}r^{-|\alpha_2|}$ beschränkt mit $M_{f,|\alpha|}$ konstant.
Für $\phi \in \mathscr{S}$ folgt aber $\lim_{|x|\to\infty}(1+|x|^2)^m D^{\alpha_1}\phi = 0$, somit wird für r hinreichend groß $(1+|x|^2)^m \max\{|D^{\alpha_1}\phi(x)D^{\alpha_2}(1-f_r)(x)|\}$ beliebig klein. Es folgt $p_{\alpha,m}(\phi(1-f_r)) < \epsilon$ für hinreichend großes r. Wegen $\phi f_r \in \mathscr{D}$ liegt also $\mathscr{D}$ dicht in $\mathscr{S}$. □

Der topologische Dualraum $\mathscr{S}'$ von $\mathscr{S}$ wird Raum der *temperierten Distributionen* genannt. Wegen Satz 5.2.2 ist jede temperierte Distribution eingeschränkt auf $\mathscr{D}$ ein Element von $\mathscr{D}'$ und $\mathscr{S}'$ kann mit jenen Elementen aus $\mathscr{D}'$ identifiziert werden, die stetig von $\mathscr{D}$ auf $\mathscr{S}$ fortgesetzt werden können.
Wie auf $\mathscr{D}$ definiert man die Ableitung der temperierten Distribution Λ durch

$$(D^\alpha \Lambda)\phi = (-1)^{|\alpha|}\Lambda D^\alpha \phi \quad \forall \phi \in \mathscr{S}. \tag{5.7}$$

In allen betrachteten Räumen von Testfunktionen wird durch Multiplikation mit einer festen Testfunktion ϕ_0 eine stetige Abbildung auf dem Raum der Testfunktionen definiert. Damit kann über die Konjugierte eine Distribution $\phi_0\Lambda :\ (\phi_0\Lambda)\phi := \Lambda(\phi_0\phi)$ erklärt werden. Für diese verifiziert man unmittelbar die Gültigkeit der Produktregel

$$\frac{\partial \phi_0 \Lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi_0}{\partial x_i}\Lambda + \phi_0 \frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda.$$

Ähnlich sieht man, dass für jedes Polynom p in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und jede Testfunktion ϕ auch $p\phi$ eine Testfunktion ist. (In $\mathscr{D}$ bzw. $\mathscr{D}_K$ gilt dies sogar für jede C^∞-Funktion.) Durch die Abbildung

$$\mathscr{S}' \to \mathscr{S}', \quad \Lambda \to p\Lambda : \quad (p\Lambda)\phi = \Lambda(p\phi) \tag{5.8}$$

wird also eine stetige Multiplikation von Distributionen mit Polynomen erklärt.

5.3 Fouriertransformation

Definition 5.3.1 *Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ sind die Fouriertransformation $f \mapsto f^\wedge$ und die Fourierkotransformation $f \mapsto f^\vee$ von f durch*

$$f^\wedge(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x} f(x)\, dx \qquad \text{bzw. } f^\vee(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x} f(\xi)\, d\xi$$

definiert.

Lemma 5.3.2 (Riemann-Lebesgue Lemma) *Die Fouriertransformation ist eine stetige lineare Abbildung von $L_1(\mathbb{R}^n)$ nach $C_0(\mathbb{R}^n)$ mit Norm $\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$.*

Beweis: Unmittelbar klar ist, dass $|f^\wedge(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\|f\|_1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt, also ist die Operatornorm der Fouriertransformation durch $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$ beschränkt.
Es gilt

$$|f^\wedge(\xi_0) - f^\wedge(\xi_0 + \xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} |f(x)||1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}|dx.$$

Für $|\xi| \to 0$ konvergiert $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}$ punktweise gegen 0. Nach dem Satz von Lebesgue folgt die Stetigkeit von $f^\wedge$.

Da $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ (stetige Funktionen mit kompaktem Träger) dicht in $L_1(\mathbb{R}^n)$ liegt, folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von Funktionen in $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ mit der Dreiecksungleichung unmittelbar, dass für jedes $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ die Translation $s \mapsto \tau_s f$, $\tau_s f(x) = f(x+s)$ stetig von $\mathbb{R}^n$ nach $L_1(\mathbb{R}^n)$ ist.
Wählt man u_0 so, dass $\|\tau_s f - f\|_1 < (2\pi)^{\frac{n}{2}}\epsilon$ für $|s| < u_0$ gilt, so folgt für $|s| < u_0$

$$|f^\wedge(\xi) - (\tau_s f)^\wedge(\xi)| \leq \epsilon \quad \text{und damit} \quad \left| f^\wedge(\xi) - \frac{1}{2u_0}\int_{-u_0}^{u_0} (\tau_s f)^\wedge(\xi)\, d\xi \right| \leq \epsilon.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
|f^\wedge(\xi)| &\leq \epsilon + \frac{1}{2u_0}\left| \int_{-u_0}^{u_0} (\tau_{\frac{u}{|\xi|}\xi} f)^\wedge(\xi)\, du \right| \\
&= \epsilon + \frac{1}{2u_0}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left| \int_{-u_0}^{u_0}\int_{\mathbb{R}^n} f\left(x + \frac{u}{|\xi|}\xi\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\, dx\, du \right| \\
&= \epsilon + \frac{1}{2u_0}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{-u_0}^{u_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot(x - \frac{u}{|\xi|}\xi)}\, du\, dx \right| \\
&\leq \epsilon + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\|f\|_1 \frac{|\sin(|\xi|u_0)|}{|\xi|u_0}. \qquad u_0 = u_0(\epsilon)!
\end{aligned}$$

Da ϵ beliebig war folgt $f^\wedge(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$. $\square$

Für einen Multiindex α bezeichnen wir mit x^α das Monom $m_\alpha(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$.

Lemma 5.3.3 *Ist die Funktion $m_\alpha f$ für jeden Multiindex α mit $0 \leq |\alpha| \leq n_0$ integrierbar, so folgt $f^\wedge \in C_0^{(n_0)}(\mathbb{R}^n)$ und für $|\alpha| \leq n_0$ gilt*

$$D^\alpha(f^\wedge) = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}(m_\alpha f)^\wedge.$$

Aus $f \in C^{(n_0)}(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \leq n_0$ folgt

$$(D^\alpha f)^\wedge = \mathrm{i}^{|\alpha|} m_\alpha f^\wedge \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

für $|\alpha| \leq n_0$.

Beweis: Es gilt

$$\left| f(x)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi\cdot x + hx_j)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}}{h} \right| = |f(x)|\frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}hx_j} - 1|}{|h|} = |f(x)x_j|\frac{1}{h}\left| \int_0^h \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx_j}\, ds \right| \leq |f(x)x_j|.$$

Ist die Funktion $x \mapsto f(x)x_j$ integrierbar, so darf Differentiation mit Integration nach Lebesgue vertauscht werden:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} f^\wedge(\xi) = \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)x_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\, dx.$$

Durch Induktion nach $|\alpha|$ folgt $D^\alpha(f^\wedge) = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}(m_\alpha f)^\wedge$ und mit dem Riemann-Lebesgue Lemma 5.3.2 $D^\alpha(f^\wedge) \in C_0$.
Da die L_1-Norm der Ableitung von f genau die Variationsnorm von f ist, sieht man dass für eine L_1-Funktion, deren Ableitung ebenfalls integrierbar ist, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ gilt. Durch partielle Integration folgt damit unter der Voraussetzung der zweiten Behauptung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)^\wedge (\xi) = \mathrm{i}\xi_j f^\wedge(\xi).$$

Durch Induktion folgt die Aussage für Ableitungen höherer Ordnung. $\square$

Satz 5.3.4 *Für $f, f^\wedge \in L_1(\mathbb{R}^n)$ gilt t–fast überall die Umkehrformel:*

$$f(t) = (f^\wedge)^\vee(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot t} f^\wedge(\xi)\, d\xi.$$

Beweis: Man erhält bei formaler Vertauschung der Integrationsreihenfolge das Integral

$$(f^\wedge)^\vee(s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot(s-t)}\, d\xi f(t)\, dt,$$

das offensichtlich nicht existiert. Man betrachtet daher, um Integrierbarkeit des Integranden zu erzwingen, statt f eine durch Faltung mit der Funktion

$$h_\lambda(x) := \frac{\lambda^n}{\pi^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\lambda^2 + x_j^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\lambda \sum_{j=1}^n |t_j|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot x}\, dt, \qquad \lambda > 0$$

geglättete Funktion

$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) h_\lambda(x-y)\, dy.$$

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$(f * h_\lambda)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot(x-y) - \lambda \sum_{j=1}^n |t_j|}\, dt\, dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot x - \lambda \sum_{j=1}^n |t_j|} f^\wedge(t)\, dt.$$

Der Integrand ist betragsmäßig durch $|f^\wedge(t)|$ beschränkt, wegen $\mathrm{e}^{-\lambda|t_j|} \uparrow 1$ für $\lambda \downarrow 0$ gilt nach dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} f * h_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot x} f^\wedge(t)\, dt.$$

Andererseits konvergiert für $\lambda \downarrow 0$ $f * h_\lambda$ in der L_1-Norm gegen f (siehe Übungsbeispiel 36). Also konvergiert $f * h_\lambda$ punktweise gegen $(f^\wedge)^\vee$ und in der L_1-Norm gegen f. Da jede in der L_1-Norm konvergent Folge von Funktionen eine Teilfolge besitzt, die punktweise f.ü. konvergiert, folgt $(f^\wedge)^\vee = f$ fast überall. $\square$

Korollar 5.3.5 *Die Fouriertransformation auf L_1 ist injektiv.*

Die Definition der Fouriertransformation legt die Vermutung nahe, dass $L_1(\mathbb{R}^n)$ der natürliche Rahmen ist, um die Fouriertransformation zu betrachten, da die Integraltransformation genau für integrierbare Funktionen erklärt ist. Es stellt sich aber heraus, dass auch die Einschränkung der Fouriertransformation auf $\mathscr{S}$ insbesondere in Hinblick auf die Umkehrabbildung und die Darstellung der Differentialoperatoren D^α sehr zweckmäßig ist. So kann auch die Fouriertransformation zu einem unitären Operator auf L_2 ausgedehnt werden.
Es sei wieder $m_\beta(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}$.

Lemma 5.3.6 *Die Abbildungen $f \mapsto D^\alpha f$ und $f \mapsto m_\alpha f$ sind stetig von $(\mathscr{S}, \tau_{\mathscr{S}})$ in sich.*

Beweis: D^α ist als lineare Abbildung genau dann stetig, wenn sie in 0 stetig ist. Da die Urbilder der Einheitskugel in $\mathbb{R}$ unter den $\tau_{\mathscr{S}}$-stetigen Seminormen eine Umgebungsbasis der 0 bilden ist D^α in 0 genau dann stetig, wenn $p_{\beta,l} \circ D^\alpha$ für alle β, l stetig ist. Dies ist aber wegen $p_{\beta,l} \circ D^\alpha = p_{\beta+\alpha,l}$ offensichtlich.
Wegen

$$|m_\gamma(x)|^2 = \prod_i x_i^{2\gamma_i} \leq (1 + |x|^2)^{|\gamma|}$$

folgt $|D^\gamma m_\alpha(x)| \leq c_{\gamma,\alpha}(1 + |x|^2)^{|\alpha|}$ und mit

$$|(1 + |x|^2)^l D^\beta(m_\alpha f)| \leq (1 + |x|^2)^l \sum_\gamma k_\gamma |(D^\gamma m_\alpha)(D^{\beta-\gamma} f)| \leq (1 + |x|^2)^{l+|\alpha|} \sum_\gamma \tilde{k}_\gamma |D^{\beta-\gamma} f|$$

aus $p_{\beta,l}(m_\alpha f) \leq \sum_\gamma \tilde{k}_\gamma p_{\beta-\gamma,l+|\alpha|}(f)$ die Stetigkeit aller Seminormen $f \mapsto p_{\beta,l} m_\alpha f$ und daraus die Stetigkeit von $f \mapsto m_\alpha f$. $\square$

Satz 5.3.7 *Die Einschränkung der Fouriertransformation auf $(\mathscr{S}, \tau_{\mathscr{S}})$ ist ein topologischer Automorphismus mit der Fourierkotransformation als Inverser.*

Beweis: Es ist zu zeigen, dass für alle (α, l) die Abbildung $f \mapsto p_{\alpha,l}(f^\wedge)$ stetig auf $\mathscr{S}$ ist. Es gilt, wenn Δ den Laplaceoperator $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ bezeichnet mit Lemma 5.3.3

$$p_{\alpha,l}(f^\wedge) = \max_\omega |(1 + |\omega|^2)^l D^\alpha(f^\wedge)(\omega)| = \left| \left((1 + \Delta)^l m_\alpha f\right)^\wedge \right|.$$

Wegen Lemma 5.3.6 genügt es also die Stetigkeit der Abbildung $f \to \max_\omega |f^\wedge(\omega)|$ nachzuweisen:
Sei $\psi(x) := (1 + |x|^2)^{-n}$, dann ist $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt nach Lemma 5.3.3 für $f \in \mathscr{S}$:

$$\begin{aligned} |(f^\wedge)(\xi)| &\leq (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \|f\|_{L_1} = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \left\|\psi^{-1}\psi f\right\|_{L_1} \\ &\leq (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \|\psi\|_{L_1} \max\{|(1 + |x|^2)^n f(x)|\} = C p_{0,n}(f), \end{aligned}$$

woraus die Stetigkeit folgt.
Die Stetigkeit von $f \mapsto f^\wedge$ folgt, da $\tau_{\mathscr{S}}$ die von den Seminormen $p_{\alpha,l}$ induzierte Topologie trägt (vgl. Bewis von Lemma 5.3.6).
Aus der Umkehrformel Satz 5.3.4 folgt, dass die Fouriertransformation auf $\mathscr{S}$ injektiv und die Kotransformation surjektiv ist. Wegen $f^\vee = \overline{(\bar{f})^\wedge}$ ist die Fourier(ko)transformation somit bijektiv und stetig.
Wegen der Umkehrformel Satz 5.3.4 ist auf $\mathscr{S}$ die Inverse fast überall die Fourierkotransformation. Da alle Funktionen in $\mathscr{S}$ stetig sind gilt dies auf $\mathscr{S}$ überall. □

Satz 5.3.7 erlaubt uns für jede Distribution Λ eine Distribution $\mathscr{F}\Lambda : \quad \phi \mapsto \Lambda(\phi^\wedge)$ als Zusammensetzung stetiger linearer Abbildungen zu definieren.
Für eine Distribution Λ_f, die der Integration mit einer L_1-Funktion f entspricht, erhalten wir mit dem Satz von Fubini

$$\mathscr{F}\Lambda_f\phi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi^\wedge(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-\mathrm{i}x\cdot t}\phi(t)\,dtdx = \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(\xi)\phi(\xi)\,d\xi = \Lambda_{f^\wedge}\phi,$$

weshalb wir $\mathscr{F}\Lambda$ als die *Fouriertransformierte der Distribution* Λ bezeichnen. Die Bezeichnung $f^\wedge$ verwenden wir auch im Folgenden nur für die durch Definition 5.3.1 erklärte Integraltransformation auf L_1.

Lemma 5.3.8 *Bezeichnen D^α und m_α die in (5.7) und (5.8) erklärten Differentiations bzw. Multiplikationsoperatoren auf $\mathscr{S}'$, so gilt:*

$$\begin{aligned}\mathscr{F}D^\alpha &= \mathrm{i}^{|\alpha|}m_\alpha\mathscr{F}\\ D^\alpha\mathscr{F} &= (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\mathscr{F}m_\alpha.\end{aligned}$$

Beweis: Aus Lemma 5.3.3 folgt

$$\begin{aligned}\langle\mathscr{F}D^\alpha\Lambda,\phi\rangle &= \langle D^\alpha\Lambda,\phi^\wedge\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle\Lambda, D^\alpha(\phi^\wedge)\rangle\\ &= \mathrm{i}^{|\alpha|}\langle\Lambda,(m_\alpha\phi)^\wedge\rangle = \mathrm{i}^{|\alpha|}\langle\mathscr{F}\Lambda, m_\alpha\phi\rangle\\ &= \mathrm{i}^{|\alpha|}\langle m_\alpha\mathscr{F}\Lambda,\phi\rangle,\end{aligned}$$

also $\mathscr{F}D^\alpha = \mathrm{i}^{|\alpha|}m_\alpha\mathscr{F}$.
Ebenso folgt

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha\mathscr{F}\Lambda,\phi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle\Lambda,(D^\alpha\phi)^\wedge\rangle\\ &= (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\langle\Lambda, m_\alpha\phi^\wedge\rangle = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\langle\mathscr{F}(m_\alpha\Lambda),\phi\rangle,\end{aligned}$$

also $D^\alpha\mathscr{F} = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\mathscr{F}m_\alpha$. □

Für hinreichend glatte Funktionen ist demnach der Differentialoperator D^α gleich $\mathrm{i}^{|\alpha|}\mathscr{F}^{-1}m_\alpha\mathscr{F}$. Operatoren der Art $\mathscr{F}^{-1}m_\alpha\mathscr{F}$ sind also eine Erweiterung von klassischen Differentialoperatoren und heißen *Pseudodifferentialoperatoren*.
Satz 5.3.7 ermöglicht auch die Darstellung der Fouriertransformation auf $L_2(\mathbb{R}^n)$:

Proposition 5.3.9 *$\mathscr{S}$ ist ein dichter Teilraum von L_2 mit stetiger Einbettung. Für jedes $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ ist die Abbildung $\Lambda_f : \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x)\, dx$ eine temperierte Distribution.*

Beweis: Da C_{00}^∞ (C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger) dicht in L_2 sind, ist auch $\mathscr{S}$ dicht in L_2. Für $\phi \in \mathscr{S}$ und $\psi(x) := (1 + |x|^2)^{-n}$ gilt $|\phi(x)| \leq p_{0,n}(\phi)\psi(x)$ und

$$\|\phi\|_2^2 = \int |\phi|^2\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\psi(x) p_{0,n}(\phi))^2 \, dx = p_{0,n}^2(\phi)\|\psi\|_2^2,$$

also $\|\phi\|_2 \leq p_{0,n}(\phi)\|\psi\|_2$ und die Einbettung ist stetig.
Λ_f ist als Zusammensetzung der stetiger Einbettung von $\mathscr{S}$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ und des stetigen Funktionals $\phi \mapsto (\phi, \bar{f})$ stetig. □

Satz 5.3.10 *Die Fouriertransformation (resp. Fourierkotransformation) auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ kann stetig zu einem unitären Operator $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}^{-1}$) auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden.*

$\mathscr{F}$ wird *Fourier-Plancherel Operator* genannt.
Beweis: Für $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt bezüglich dem Skalarprodukt von $L_2(\mathbb{R}^n)$ mit dem Satz von Fubini und der Umkehrformel 5.3.4:

$$\begin{aligned}(f^\wedge, g^\wedge) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x) \overline{g^\wedge(\xi)}\, dx\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} g^\wedge(\xi)}\, d\xi\, dx = (f, g^{\wedge\vee}) = (f, g).\end{aligned}$$

Demnach ist die Fouriertransformation eine Isometrie auf dem dichten Teilraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ von $L_2(\mathbb{R}^n)$ auf sich (Satz 5.3.7). Die stetige Fortsetzung dieser Isometrie auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist eine surjektive Isometrie, also ein unitärer Operator $\mathscr{F}$. □

Satz 5.3.11 *Die Abbildung $f \mapsto (2\pi)^{\frac{n}{2}} f^\wedge$ ist ein Isomorphismus der Faltungsalgebra $(L_1(\mathbb{R}^n), *)$ in eine Unteralgebra $A(\mathbb{R}^n)$ von $C_0(\mathbb{R}^n)$ mit punktweiser Multiplikation. Es gilt*

$$(f * g)^\wedge = (2\pi)^{\frac{n}{2}} f^\wedge g^\wedge \text{ für } f, g \in L_1(\mathbb{R}^n) \text{ und } u^\wedge * v^\wedge = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (uv)^\wedge \text{ für } u, v \in \mathscr{S}.$$

Beweis: Wegen dem Riemann-Lebesgue Lemma 5.3.2 bildet die Fouriertransformation $L_1(\mathbb{R}^n)$ in $C_0(\mathbb{R}^n)$ ab. Es gilt für $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}(f * g)^\wedge(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(z) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot z}\, dz \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(z - y) g(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot(z-y)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot y}\, dy\, dz \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} f^\wedge(\xi) g^\wedge(\xi).\end{aligned}$$

Für $u, v \in \mathscr{S}$ folgt damit wegen $h^\vee = \widetilde{h^\wedge}$ und $u^{\wedge\wedge} = \tilde{u}$ mit $\tilde{u}(x) = u(-x)$

$$\begin{aligned} (u^\wedge * v^\wedge)^\wedge &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \tilde{u}\tilde{v} \\ (u^\wedge * v^\wedge)^\vee &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} uv \\ u^\wedge * v^\wedge &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} (uv)^\wedge. \end{aligned}$$

□

Die Faltung kann nicht als Operation auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ erklärt werden, aber es gilt:

Lemma 5.3.12 *Für $\phi \in \mathscr{S}$ und $f \in L_2$ gilt*

$$\mathscr{F}(\phi f)(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi^\wedge(z-s) \mathscr{F} f(s)\, ds =: \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (\phi^\wedge * \mathscr{F} f)(z)$$

Beweis: Sei f_k eine bezüglich der L_2-Norm gegen f konvergente Folge in $\mathscr{S}$. Dann konvergiert ϕf_k gegen ϕf und wegen Satz 5.3.10 $\mathscr{F}(\phi f_k)$ gegen $\mathscr{F}(\phi f)$. Es folgt mit Satz 5.3.11 und der Stetigkeit des Skalarproduktes unter Verwendung der unitären Operatoren $\widetilde{\phi^\wedge}(s) := \phi^\wedge(-s)$ und $\tau_{-z}\widetilde{\phi^\wedge}(t) := \widetilde{\phi^\wedge}(t-z)$:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(\phi f)(z) &= \lim_{k\to\infty} \mathscr{F}(\phi f_k)(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{k\to\infty} (\phi^\wedge * f_k^\wedge)(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi^\wedge(z-t) f_k^\wedge(t)\, dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{k\to\infty} (\tau_{-z}\widetilde{\phi^\wedge}, \overline{f_k^\wedge}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (\tau_{-z}\widetilde{\phi^\wedge}, \overline{\mathscr{F} f}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (\phi^\wedge * \mathscr{F} f)(z). \end{aligned}$$

□

Wegen $\bar{\phi}^\vee = \overline{\phi^\wedge}$ gilt

$$\Lambda_{\mathscr{F} f}\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F} f(x)\phi(x)\, dx = (\mathscr{F} f, \bar{\phi}) = (f, \mathcal{F}^{-1}\bar{\phi}) = (f, \bar{\phi}^\vee) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\phi^\wedge(\xi)\, d\xi = \mathscr{F}\Lambda_f \phi,$$

also $\Lambda_{\mathscr{F} f} = \mathscr{F}\Lambda_f$, dh. die Fouriertransformierte von f aufgefasst als Distribution entspricht der von f aufgefasst als Element von $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Satz 5.3.13 *Auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist die Fouriertransformation respektive die Fourierkotransformation durch*

$$\mathscr{F} f(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i} t_j s_j} - 1}{-\mathrm{i} s_j} f(s)\, ds \quad \textit{resp.}$$

$$\mathscr{F}^{-1} f(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i} t_j s_j} - 1}{\mathrm{i} s_j} f(s)\, ds$$

gegeben.

Beweis: Im Folgenden verwenden wir wiederholt, dass für $f \in L_2(\mathbb{R})$ auch f lokal in L_1 gilt, d.h. dass f über jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ integrierbar ist und damit

$$f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(s)\, ds$$

t–fast überall gilt.
Sei (f_k) eine Folge in $\mathscr{S}$, die in der L_2-Norm gegen f konvergiert. Da $\mathscr{F}$ nach Satz 5.3.10 stetig ist, konvergiert dann die Folge $(\mathscr{F} f_k)$ gegen $\mathscr{F} f$. Die Funktion $\Upsilon_t :\ s \mapsto \frac{e^{-it\cdot s}-1}{-is}$ ist in $L_2(\mathbb{R})$. Es bezeichne D den Differentialoperator $D := \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n}$. Für $f \in L_2$ gilt nach dem Satz von Fubini und der Stetigkeit des Skalarproduktes

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} f(t) = \lim_{k\to\infty} \mathscr{F} f_k(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} D \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_n} \lim_{k\to\infty} f_k^\wedge(r)\, dr_n \dots dr_1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} D \left(\lim_{k\to\infty} f_k^\wedge, \chi_{[0,t]} \right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} D \lim_{k\to\infty} \left(f_k^\wedge, \chi_{[0,t]} \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} D \lim_{k\to\infty} \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_n} f_k^\wedge(r)\, dr_n \dots dr_1 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} D \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_n} e^{-ir\cdot s} f_k(s)\, dr_n \dots dr_1\, ds \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} D \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \frac{e^{-it_j s_j} - 1}{-is_j} f_k(s)\, ds \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} D \lim_{k\to\infty} (\Upsilon_t, f_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} D\, (\Upsilon_t, f) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \frac{e^{-it_j s_j} - 1}{-is_j} f(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man die Darstellung der Fourierkotransformation. □

Der Differentialoperator auf $\mathbb{R}$

Die nichttrivialen Lösungen $f = c\, e^{i\lambda x}$ der Differentialgleichung $(T - \lambda)f = 0$ liegen nicht in $L_2(\mathbb{R})$, eine Zerlegung von $L_2(\mathbb{R})$ in Eigenräume dieses Differentialoperators ist also im Gegensatz zur Zerlegung von $L_2([0, \pi])$ (vgl. Bsp. 32) nicht möglich. Die Fouriertransformation, die formal wie eine Entwicklung nach den Funktionen $e^{i\lambda x}$ aussieht, ermöglicht jedoch die Berechnung der Zerlegung der Einheit von T.
Der folgende Satz zeigt, dass der Differentialoperator T durch eine unitäre Transformation als Multiplikationsoperator dargestellt werden kann.

Satz 5.3.14 *Sei M der Multiplikationsoperator*

$$Mf(t) = tf(t)$$

mit dem Definitionsbereich

$$D(M) = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : Mf \in L_2(\mathbb{R})\}$$

und T der Differentialoperator $-\mathrm{i}\frac{d}{dt}$ wie in Beispiel 3.6.1. Dann gilt auf $D(T)$:

$$T = \mathscr{F}^{-1}M\mathscr{F}.$$

Beweis: Für $f \in D(T)$ gilt $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, sodass durch partielle Integration folgt:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}T(f)(t) &= \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}-1}{-\mathrm{i}s} f'(s)\,ds \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{-\mathrm{i}ts\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}+1}{s^2} f(s)\,ds \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}t\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}-1}{\mathrm{i}s} f(s)\,ds + \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}+1-\mathrm{i}st}{s^2} f(s)\,ds \\
&= t(\mathscr{F}f)(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}-1}{\mathrm{i}s} f(s)\,ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{i}s(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}-1)}{s^2} f(s)\,ds \\
&= t(\mathscr{F}f)(t).
\end{aligned}$$

Somit gilt $\mathscr{F}D(T) \subset D(M)$ und $\mathscr{F}T = M\mathscr{F}$ auf $D(T)$.
Die dabei vorgenommene Vertauschung von Integration und Differentiation kann nach dem Satz von Fubini gerechtfertigt werden, da die Funktion

$$(s,t) \mapsto \frac{\mathrm{i}s(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}rs}-1)}{s^2} f(s)$$

in $L_1(\mathbb{R}\times[0,t])$ liegt. □

Dies erlaubt uns eine Integraldarstellung für die Projektoren der Spektralschar von T anzugeben: Es sei $\widetilde{E}_\lambda$ die Spektralschar von M, dann gilt

$$\begin{aligned}
(Tx,y) &= (\mathscr{F}^{-1}M\mathscr{F}x,y) = (M\mathscr{F}x,\mathscr{F}y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d(\widetilde{E}_\lambda\mathscr{F}x,\mathscr{F}y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d(\mathscr{F}^{-1}\widetilde{E}_\lambda\mathscr{F}x,y).
\end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass $E_\lambda = \mathscr{F}^{-1}\widetilde{E}_\lambda\mathscr{F}$ eine Familie orthogonaler Projektoren ist, die den Forderungen des Spektralsatzes genügen, woraus folgt, dass dies die Spektralschar des Operators T ist. Da der Projektor $\widetilde{E}_\lambda$ die Multiplikation mit der Funktion $1_{(-\infty,\lambda]}$ ist, folgt mit Satz 5.3.14:

Satz 5.3.15 *Für die Spektralschar E_λ von T gilt:*

$$E_\lambda f(t) = (\mathscr{F}^{-1}\widetilde{E}_\lambda\mathscr{F})f(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ts}-1}{-\mathrm{i}s}\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}rs}-1}{-\mathrm{i}r} f(r)\,dr\,ds.$$

5.4 Soboleverräume

Für die Betrachtung von Differentialoperatoren ist es zielführend diese als stetige Abbildung zwischen geeignet definierten Hilberträumen aufzufassen. Versieht man einen Unterraum X differenzierbarer Funktionen von $L_2(\Omega)$, Ω offen in $\mathbb{R}^n$, mit der Norm

$$\|u\|_{W^k}^2 := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_2^2, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{5.9}$$

so sind alle Differentialoperatoren der Ordnung $|\alpha| \leq k$ stetige Abbildungen von X nach $L_2(\Omega)$. Damit kann D^α durch stetige Fortsetzung auch als stetiger Operator auf der Vervollständigung X^- von X erklärt werden. Allerdings können die Elemente von X^- im Allgemeinen nicht als im klassischen Sinn differenzierbare Funktionen aufgefasst werden.
Gilt jedoch für eine Folge hinreichend oft differenzierbarer Funktionen (u_n) in $L_2(\Omega)$, dass sowohl (u_n) als auch $(D^\alpha u_n)$ Cauchyfolgen in $L_2(\Omega)$ sind, die gegen u_0 respektive v_0 konvergieren, so folgt für die regulären Distributionen Λ_u und Λ_v und $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\Lambda_{v_0}\phi &= \int_\Omega v_0(x)\phi(x)\,dx = \lim_n \int_\Omega D^\alpha u_n(x)\phi(x)\,dx = \\ &= (-1)^{|\alpha|}\lim_n (u_n, D^\alpha\phi) = (-1)^{|\alpha|}(u_0, D^\alpha\phi) = D^\alpha\Lambda_{u_0}\phi,\end{aligned} \tag{5.10}$$

also $\Lambda_{v_0} = D^\alpha\Lambda_{u_0}$. Deshalb ist die folgende Definition eine Verallgemeinerung der klassischen Ableitung:

Definition 5.4.1 *Gibt es für ein $f \in L_2(\Omega)$ und einen Multiindex α ein $g \in L_2(\Omega)$ mit*

$$(g, \varphi) = (f, (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi) \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

so heißt g die schwache oder verallgemeinerte Ableitung von f,

Definition 5.4.2 *Der Hilbertraum W^k ist der Teilraum allen Funktionen $f \in L_2(\Omega)$, für die sämtliche schwachen Ableitungen $D^\alpha f$ der Ordnung $|\alpha| \leq k$ existieren mit dem Skalarprodukt*

$$(u, v)_{W^k} := \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v). \tag{5.11}$$

Die Vollständigkeit von W^k folgt aus der von $L_2(\Omega)$ und 5.10.
Für $1 \leq q \leq \infty$ gilt für die L_q-Norm einer Funktion $\phi \in \mathscr{S}$ mit den Seminormen $p_{\alpha,l}$ aus (5.6):

$$\|\phi\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq p_{0,l}(\phi)\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-lq}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = p_{0,l}(\phi)C_{lq}$$

mit $C_{lq} < \infty$ für $l > n/2q$. Mit der Hölderschen Ungleichung folgt für eine Funktion $f \in L_p(\Omega)$:

$$\left|\int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx\right| \leq \|f\|_p\|\phi\|_q \leq \|f\|_p C_{lq} p_{0,l}(\phi),$$

also ist die Linearform Λ_f stetig auf $\mathscr{S}$, d.h. wenn wir f mit Λ_f identifizieren ist f eine temperierte Distribution. Insbesondere ist jedes Element von $W^k(\Omega)$ eine temperierte Distribution und es ist für die Definition des Raumes $W^k(\Omega)$ irrelevant ob wir $D^\alpha f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ oder $D^\alpha f \in \mathscr{S}'$ für $|\alpha| \leq k$ fordern:

Definition 5.4.3 *Für eine offene Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^n$ ist der Sobolevraum $W^k(\Omega)$ der Raum aller Funktionen $f \in L_2(\Omega)$ für die die schwache Ableitung $D^\alpha f$ für $|\alpha| \leq k$ in $L_2(\Omega)$ existiert.*

Mit dem Skalarprodukt

$$(f,g)_{W^k} = \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L_2}$$

ist $W^k(\Omega)$ ein Hilbertraum.
Aufgrund von Lemma 5.3.3 und Satz 5.3.10 gilt für hinreichend oft differenzierbare Funktionen u in L_2 (etwa $L_2(\Omega) \cap C^{(\infty)}(\Omega)$:

$$\|D^\alpha u\|_2^2 = \|\mathscr{F} D^\alpha u\|_2^2 = \|m_\alpha \mathscr{F} u\|_2^2,$$

also

$$\|u\|_{W^k}^2 = \sum_{|\alpha|\leq k} \|m_\alpha \mathscr{F} u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2 |\mathscr{F} u(x)|^2\,dx \tag{5.12}$$

mit $m_\alpha(x) = x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$. Für $|\alpha| \leq k$ gilt

$$|x^\alpha| = \prod_{i=1}^n |x_i|^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^n |x|^{\alpha_i} \leq (1+|x|^2)^{\alpha/2} \leq (1+|x|^2)^{k/2} \tag{5.13}$$

und

$$(1+|x|^2)^k = (1+|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2)^k = \sum_{|\alpha|\leq k} C_{k,\alpha} \prod_{i=1}^n |x_i|^{2\alpha_i} \leq \sum_{|\alpha|\leq k} C_{k,\alpha}|x|^{2|\alpha|} \leq C_k \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2.$$

Also gilt für geeignete Konstante $B_k, C_k > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$B_k \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2 \leq (1+|x|^2)^k \leq C_k \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2.$$

$$\|u\|_{H_k}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |\mathscr{F} u(x)|^2\,dx \tag{5.14}$$

definiert also wegen (5.12) auf W^k eine zu $\|u\|_{W^k}$ äquivalente Norm .
Für $s \in \mathbb{R}$ sei $L_{2,s}$ der Raum aller Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die bezüglich der Gewichtsfunktion $x \mapsto (1+|x|^2)^s$ quadratisch integrierbar sind. $L_{2,s}$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{2,s} := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^s u(x)\bar{v}(x)\, dx,$$

der für $s \geq 0$ ein dichter Unterraum von $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist.
Wir definieren in Verallgemeinerung von (5.14) für $s \geq 0$ Normen

$$\|u\|_{H_s}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^s |\mathscr{F} u(x)|^2\, dx.$$

und bezeichnen mit H_s den Raum aller Funktionen u für die $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^s |\mathscr{F} u(x)|^2\, dx < \infty$ gilt. Wegen $\|u\|_{2,s} = \|\mathscr{F}^{-1} u\|_{H_s}$ ist H_s das isometrische Bild von $L_{2,s}$ unter $\mathscr{F}^{-1}$.
Insbesondere gilt

$$H_0 = L_2 \supseteq H_t \supseteq H_s \text{ für } 0 \leq t \leq s. \tag{5.15}$$

Jede Funktion $u \in L_{2,s}$, $s \in \mathbb{R}$ kann auch als reguläre temperierte Distribution aufgefasst werden: Mit den in (5.6) definierten Seminormen $p_{0,l}$ gilt für $\phi \in \mathscr{S}$ nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung:

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)u(x)\, dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)u(x)|\, dx \leq p_{0,l}(\phi) \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-l} |u(x)|\, dx \\ &= p_{0,l}(\phi) \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^s (1 + |x|^2)^{-l-s} |u(x)|\, dx \\ &\leq C_{l,s} p_{0,l}(\phi) \|u\|_{2,s},\end{aligned}$$

wobei $C_{l,s}$ die $\|\cdot\|_{2,s}$-Norm der Funktion $x \mapsto (1 + |x|^2)^{-l-s}$ ist, also

$$C_{l,s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^s (1 + |x|^2)^{-2l-2s}\, dx = \mathrm{Vol}_{n-1}(\partial B_1) \int_0^\infty (1 + r^2)^{-2l-s} r^{n-1}\, dr.$$

Hieraus sieht man, dass $C_{l,s} < \infty$ für $l > \frac{n-s}{2}$ gilt und damit die Abbildung $\mathscr{S} \to \mathbb{R}$, $\phi \mapsto \int \phi(x)u(x)\, dx$ stetig ist und somit eine temperierte Distribution Λ_u darstellt. Damit können wir $\mathscr{F}^{-1} u$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $u \in L_{2,s}$ als temperierte Distribution auffassen.

Definition 5.4.4 *Für $s \in \mathbb{R}$ ist H_s der Hilbertraum aller temperierten Distributionen Λ für die $\mathscr{F}\Lambda$ in $L_{2,s}(\mathbb{R}^n)$ liegt mit dem Skalarprodukt $(\Lambda_1, \Lambda_2)_{H_2} = (\mathscr{F}\Lambda_1, \mathscr{F}\Lambda_2)_{2,s}$.*

Es gilt wegen $L_{2,s} \supseteq L_{2,t}$ für $s \leq t$ offensichtlich $H_s \supseteq H_t$ für $s \leq t$.
Als Hilbertraum kann H_s in kanonischer Weise mit seinem Dualraum identifiziert werden.
Die folgende Darstellung des Dualraumes von H_s ist jedoch häufig vorteilhafter:

Satz 5.4.5 *Der Dualraum des Hilbertraumes H_s ist vermöge der Abbildung $H_{-s} \to H_s'$: $h \mapsto \zeta_h$ mit $\zeta_h : H_s \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F} f(x) \overline{\mathscr{F} h(x)}\, dx$, $h \in H_{-s}$ isometrisch isomorph zu H_{-s}.*

Beweis: Nach dem Satz von Riesz kann jedes stetige Funktional auf H_s durch $f \mapsto (f, g)_{H_s}$ mit einem $g \in H_s$ dargestellt werden. Die Abbildung M_s: $M_s f(x) = (1 + |x|^2)^s f(x)$ ist wie man unmittelbar sieht für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Isometrie von $L_{2,t}$ auf $L_{2,t-2s}$. Damit ist $\mathscr{F}^{-1} M_s \mathscr{F}$ eine Isometrie von H_t auf H_{t-2s}. Es folgt

$$\begin{aligned}(f, g)_{H_s} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^s \mathscr{F} f(x) \overline{\mathscr{F} g(x)}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F} f(x) \overline{\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1} M_s \mathscr{F} g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F} f(x) \overline{\mathscr{F} h(x)}\, dx\end{aligned}$$

mit einem eindeutigen $h \in H_{-s}$.
Wegen $\|g\|_{H_s} = \|h\|_{H_{-s}}$ ist $\|h\|_{H_{-s}}$ zugleich die Norm von h als Funktional auf H_s. $\square$

Lemma 5.4.6 *Für $\phi \in \mathscr{S}$ und $s \geq 0$ ist der Multiplikationsoperator M_ϕ in $L(H_s)$.*

Beweis: Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass $\|\phi^\wedge\|_{L_1} = 1$ gilt. Wegen $\phi^\wedge \in \mathscr{S}$ gibt es eine Konstante $K_{\phi,s}$ mit $|\phi^\wedge(y)| \leq \frac{K_{\phi,s}}{(1+|y|^2)^{s+n}}$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Wegen

$$|z|^2 \leq (|y| + |z - y|)^2 \leq 2(|y|^2 + |z - y|^2)$$

gilt

$$1 + |z|^2 \leq 1 + 2(|y|^2 + |z - y|^2) \leq 2(1 + |y|^2)(1 + |z - y|^2),$$

also

$$\frac{1}{1 + |y|^2} \leq 2 \frac{1 + |z - y|^2}{1 + |z|^2}, \tag{5.16}$$

und

$$|\phi^\wedge(y)| \leq \frac{C_{\phi,s}(1 + |z - y|^2)^s}{(1 + |z|^2)^s (1 + |y|^2)^n}. \tag{5.17}$$

Es folgt mit Lemma 5.3.12, der Jensen'schen Ungleichung

$$F\left(\int g\, d\lambda\right) \leq \int F(g)\, d\lambda \quad \text{für } F \text{ konvex und } \int d\lambda = 1,$$

(5.17) und dem Satz von Fubini:

$$
\begin{aligned}
\|\phi f\|_{H_s}^2 = \|\mathscr{F}(\phi f)\|_{L_{2,s}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|z|^2)^s \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi^\wedge(y) \mathscr{F} f(z-y)\, dy \right|^2 dz \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|z|^2)^s \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi^\wedge(y) \mathscr{F} f(z-y)|\, dy \right)^2 dz \\
\text{(Jensen)} \quad &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|z|^2)^s \int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F} f(z-y)|^2 |\phi^\wedge(y)|\, dy\, dz \\
&\leq C_{\phi,s} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|z-y|^2)^s |\mathscr{F} f(z-y)|^2\, dz \frac{1}{(1+|y|^2)^n}\, dy \\
&= C_{\phi,s} \|f\|_{H_s}^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|^2)^n}\, dy = \tilde{C}_{\phi,s} \|f\|_{H_s}^2
\end{aligned}
$$

□

Satz 5.4.7 (Einbettungssätze) *i) Für $s \in \mathbb{R}$ und einen Multiindex α ist D^α eine Kontraktion von H_s nach $H_{s-|\alpha|}$.*
ii) Für $l \in \mathbb{N}_0$ und $s > l + \frac{n}{2}$ gilt $H_s(\mathbb{R}^n) \subseteq C^{(l)}(\mathbb{R}^n)$ und die Einbettung ist stetig;
iii) Für $s > t$, $s, t \in \mathbb{R}$ und $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ist der Multiplikationsoperator M_ϕ ein kompakter Operator von H_s nach H_t.

Beweis: Nach Lemma 5.3.8 gilt $\mathscr{F} D^\alpha f = \mathrm{i}^{|\alpha|} m_\alpha \mathscr{F} f$. Wegen $|x^\alpha|^2 \leq |x|^{2|\alpha|} \leq (1+|x|^2)^{|\alpha|}$ folgt

$$
\|D^\alpha f\|_{H_{s-|\alpha|}}^2 = \|\mathscr{F} D^\alpha f\|_{L_{2,s-|\alpha|}}^2 = \|m_\alpha \mathscr{F} f\|_{L_{2,s-|\alpha|}}^2 \leq \|\mathscr{F} f\|_{L_{2,s}}^2 = \|f\|_{H_s}^2.
$$

ii) Wegen $s > 0$ gilt $H_s \subseteq L_2$. Sei $f \in H_s(\mathbb{R}^n)$. Es folgt $\mathscr{F} f \in L_{2,s}$ und mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und (5.13)

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| |\mathscr{F} f(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^s |x^\alpha| (1+|x|^2)^{-s} |\mathscr{F} f(x)|\, dx \\
&\leq \|f\|_{H_s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^s |x|^{2|\alpha|} (1+|x|^2)^{-2s}\, dx \right)^{1/2} \\
&= \|f\|_{H_s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-s} |x|^{2|\alpha|}\, dx \right)^{1/2} \\
&= C_s \|f\|_{H_s}
\end{aligned}
$$

mit $C_s < \infty$ für $n - 1 + 2|\alpha| - 2s < -1$, also ist $m_\alpha \mathscr{F} f$ für $|\alpha| < s - \frac{n}{2}$ integrierbar.
Es folgt mit Lemma 5.3.3:

$$
\|D^\alpha (\mathscr{F} f)^\wedge\|_{C_0(\mathbb{R}^n)} = \|(m_\alpha \mathscr{F} f)^\wedge\|_{C_0(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} C_2 \|f\|_{H_s}. \tag{5.18}
$$

Für $f \in \mathscr{S}$ folgt aus der Umkehrformel 5.3.4 und Satz 5.3.7, dass $f^{\wedge\wedge}(x) = f^{\wedge\vee}(-x) = f(-x)$ gilt. Da $\mathscr{S}$ dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$ liegt und die Operatoren $\mathscr{F}, \mathscr{F}^{-1}$ stetig sind gilt $\mathscr{F}\mathscr{F}f = \tilde{f}$ mit $f(-x) = \tilde{f}(x)$ f.ü.
Es folgt für $|\alpha| < l$ aus (5.18) für $f \in H_s$, da insbesondere auch $\mathscr{F}f$ integrierbar ist:

$$\|D^\alpha f\|_{C_0(\mathbb{R}^n)} = \|D^\alpha \tilde{f}\|_{C_0(\mathbb{R}^n)} = \|D^\alpha \mathscr{F}\mathscr{F}f\|_{C_0(\mathbb{R}^n)} = \|D^\alpha (\mathscr{F}f)^\wedge\|_{C_0(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} C_2 \|f\|_{H_s}.$$

iii) Es genügt offenbar die Fälle $s > t \geq 0$ und $0 \geq s > t$ zu betrachten.
Sei $s > t \geq 0$, $K := \operatorname{supp}(\phi)$, $M := \max\{|x| : x \in K\}$ und $\int_K dx =: V_K$ und B_1 die Einheitskugel in H_s. Nach Lemma 5.4.6 ist $M_\phi(B_1)$ eine in H_s beschränkte Familie von Funktionen mit Träger in K. Quadratisch integrierbare Funktionen mit kompaktem Träger sind integrierbar, also ist $M_\phi(B_1)$ wegen $H_s \subseteq L_2$ für $s \geq 0$ zugleich eine Teilmenge von $L_1(\mathbb{R}^n)$. Es folgt wegen $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi_2}\right| \leq |x||\xi_1 - \xi_2| \leq M|\xi_1 - \xi_2|$ für $x \in K$ und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung:

$$|f^\wedge(\xi_1) - f^\wedge(\xi_2)| \leq \frac{M|\xi_1 - \xi_2|}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_K |f(x)|\, dx \leq \frac{MV_K^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} |\xi_1 - \xi_2| \|f\|_{L_2} \leq \frac{MV_K^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} |\xi_1 - \xi_2| \|f\|_{H_s}.$$

Wegen $\|\cdot\|_{H_s} \geq \|\cdot\|_{L_2}$ sind also die Fouriertransformierten $f^\wedge$ von Funktionen f in $M_\phi(B_1)$ gleichmäßig stetig. Bezeichnet $\mathscr{B}_1 := \mathscr{F}M_\phi(B_1)$ die Menge der Fouriertransformierten von Funktionen aus $M_\phi(B_1)$, so gilt für $u \in \mathscr{B}_1$: $|u(\xi_1) - u(\xi_2)| \leq \frac{MV_K^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} |\xi_1 - \xi_2|$.
Wir zeigen, dass Funktionen in $\mathscr{B}_1$ gleichmäßig beschränkt sind:
Sei $u \in \mathscr{B}_1$, $|u(x)| > \alpha > 0$. Dann gilt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von u für y mit $|x - y| < \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\alpha}{2MV_K^{\frac{1}{2}}} =: C_\alpha$ die Abschätzung $|u(y)| > \frac{\alpha}{2}$ und damit, wenn $B(x, C_\alpha)$ die Menge $\{y : |x - y| < C_\alpha\}$ bezeichnet:

$$\|u\|_{L_{2,s}}^2 \geq \int_{B(y,C_\alpha)} |u(z)|^2 (1 + |z|^2)^s \, dz \geq \int_{B(y,C_\alpha)} dz \frac{\alpha^2}{4} = \operatorname{Vol}(B(y, C_\alpha)) \frac{\alpha^2}{4}.$$

Da $M_\phi B_1$ nach Lemma 5.4.6 eine in H_s beschränkte Menge und $\mathscr{F}$ eine unitäre Abbildung von H_s auf $L_{2,s}$ ist folgt, dass $\mathscr{B}_1$ eine Familie bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L_{2,s}}$ gleichmäßig beschränkter Funktionen ist.
Wegen

$$\|u\|_{L_{2,s}}^2 \geq \int_{|z|>R} (1 + |z|^2)^s |u(z)|^2 \, dz \geq (1 + R^2)^{s-t} \int_{|z|>R} (1 + |z|^2)^t |u(z)|^2 \, dz$$

gibt es für $\epsilon > 0$ ein R_ϵ, sodass

$$\left(\int_{|z|>R_\epsilon} (1 + |z|^2)^t |u(z)|^2 \, dz \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\epsilon}{4} \tag{5.19}$$

für alle $u \in \mathscr{B}_1$ gilt.
Da die Funktionen aus $\mathscr{B}_1$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind, sind sie nach dem Satz von Ascoli auf der kompakten Menge $B_{R_\epsilon} := \{z : |z| \leq R_\epsilon\}$ totalbeschränkt bezüglich der Maximumsnorm. Es gibt also für $\delta > 0$ eine endliche Überdeckung der Einschränkung der Funktionen aus $\mathcal{B}_1$ auf B_{R_ϵ} durch δ-Kugeln bezüglich der Maximumsnorm. Für stetige Funktionen v auf B_{R_ϵ} gilt

$$\left(\int_{|z|<R_\epsilon} (1+|z|^2)^t |u(z)|^2 \, dz\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{|z|<R_\epsilon} (1+|z|^2)^t \, dz\right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{C(B_{R_\epsilon})}.$$

Wählt man

$$\delta = \frac{\epsilon}{2}\left(\int_{|z|<R_\epsilon} (1+|z|^2)^t \, dz\right)^{\frac{-1}{2}}$$

so erhält man mit(5.19) eine endliche Überdeckung von $\mathscr{B}_1$ durch ϵ-Kugeln bezüglich der $L_{2,t}$-Norm. $\mathscr{B}_1$ ist also totalbeschränkt und damit relativ kompakt in $L_{2,t}(\mathbb{R}^n)$.
Für $0 \geq s > t$ sehen wir zunächst wegen der Definition 5.3.1 $\phi^\wedge(z) = \overline{\bar{\phi}^\wedge(-z)}$ und mit Lemma 5.3.12 für $u \in H_s$, $v \in H_{-t}$:

$$\begin{aligned}
\langle \phi u, v\rangle_t &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}(\phi u)(x)\overline{\mathscr{F}v(x)}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi^\wedge(x-y)\mathscr{F}u(y)\overline{\mathscr{F}v(x)}\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}u(y)\overline{\bar{\phi}^\wedge(y-x)\mathscr{F}v(x)}\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}u(y)\overline{\mathscr{F}(\bar{\phi}v)(y)}\, dy \\
&= \langle u, \bar{\phi}v\rangle_s
\end{aligned}$$

Wegen (5.16) gilt

$$\begin{aligned}
\|\tau_z f\|_{L_{2,s}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|r|^2)^s |f(r+z)|^2 \, dr = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|r-z|^2)^s |f(r)|^2 \, dr \\
&\leq 2^s(1+|r|^2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|r|^2)^s |f(r)|^2 \, dr = 2^s(1+|z|^2)^s \|f\|_{L_{2,s}}^2.
\end{aligned}$$

Damit ist $(x,y) \mapsto \phi^\wedge(x-y)\mathscr{F}u(y)\overline{\mathscr{F}v(x)}$ in $L_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und die Vertauschung der Integrationsreihenfolge damit nach Fubini gerechtfertigt.
Die Adjungierte des Multiplikationsoperators $M_\phi \in L(H_s, H_t)$ ist also der Multiplikationsoperator $M_{\bar{\phi}} \in L(H_{-t}, H_{-s})$. Da die Adjungierte eines Operators T genau dann kompakt ist, wenn T kompakt ist und $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \bar{\phi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt, folgt dass der Multiplikationsoperator mit einer Distribution aus $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ auch für $0 \geq s > t$ ein kompakter Operator von H_s nach H_t ist. $\square$

Kapitel 6

Übungsbeispiele

1. Zeigen sie, dass für jeden Banachraum X der Raum $X \times \mathbb{C}$ zu einer Banachalgebra mit Einselement wird, wenn man auf $X \times \mathbb{C}$ eine geeignete Norm definiert und das Produkt durch $(x, \mu)(y, \nu) = (\nu x + \mu y, \mu\nu)$ erklärt. Bestimmen Sie die maximalen Ideale und multiplikativen Funtionale auf $X \times \mathbb{C}$ und $\sigma((x, \mu))$.

2. Für Elemente x, y einer Banachalgebra gilt:

$$\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}.$$

   Hinweis: Man leite aus den Reihendarstellungen von $(xy - \lambda e)^{-1}$ und $(yx - \lambda e)^{-1}$ für hinreichend grosse λ eine Beziehung zwischen diesen Elementen her und verifiziere dann deren Gültigkeit für $\lambda \neq 0$.

3. Man zeige, dass durch punktweise Multiplikation auf dem Raum $H(D^n)$ aller stetigen Funktionen f auf $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$, die eine Potenzreihenentwicklung

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(l_1,\ldots,l_n)\in\mathbb{N}_0^n} a_{l_1,\ldots,l_n} \mathrm{e}^{i\sum l_k x_k} \quad \text{mit} \sum_{(l_1,\ldots,l_n)\in\mathbb{N}_0^n} |a_{l_1,\ldots,l_n}| = \|f\| < \infty$$

   erlauben $H(D^n)$ zu einer Banachalgebra wird und berechne den Gelfandraum.

4. Zeigen sie, dass $\ell_\infty(\mathbb{N})$ mit punktweiser Multiplikation eine kommutative Banachalgebra ist und für jedes multiplikative Funktional m und $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt $m(\chi_A) \in \{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass für $m \in \Delta$ das Mengensystem $\mathcal{F}_m := \{A \subseteq \mathbb{N} : m(\chi_A) = 1\}$ ein Ultrafilter ist. (Verwenden sie die Charakterisierung von Ultrafilter durch die Eigenschaft, dass ein Filter $\mathcal{F}$ genau dann ein Ultrafilter ist, wenn für alle $A \subseteq \mathbb{N}$ entweder A oder $A^\complement$ in $\mathcal{F}$ liegt.)

5. Zeigen Sie, dass für einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{N}$ durch $m_\mathcal{F}(\chi_A) = 1$ für $A \in \mathcal{F}$, 0 sonst eine Funktion auf den charakteristischen Funktionen erklärt wird, die $m_\mathcal{F}(\chi_A)m_\mathcal{F}(\chi_B) =$

$m_{\mathcal{F}}(\chi_A\chi_B)$ erfüllt und $m_{\mathcal{F}}$ eindeutig ein multiplikatives lineares Funktional auf $\ell_\infty(\mathbb{N})$ definiert.

6. Sei $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra $\mathfrak{B}'$ der Dualraum und $\mathfrak{B}''$ der Bidualraum von $\mathfrak{B}$. Wir definieren Abbildungen ($x, y \in \mathfrak{B}$, $x' \in \mathfrak{B}'$, $x'', y'' \in \mathfrak{B}''$ $\langle x', x\rangle = x'(x)$ u.s.w.):

   i) (Rechtsmultiplikation eines Elementes aus $\mathfrak{B}'$ mit einem Element aus $\mathfrak{B}$)
   $$\mathfrak{B}' \to \mathfrak{B}' \quad x' \mapsto x'x : \quad \langle x'x, y\rangle = \langle x', xy\rangle$$

   ii) (Linksmultiplikation eines Elementes aus $\mathfrak{B}'$ mit einem Element aus $\mathfrak{B}''$)
   $$\mathfrak{B}' \to \mathfrak{B}' \quad x' \mapsto x''x' : \quad \langle x''x', x\rangle = \langle x'', x'y\rangle$$

   iii) (*Erstes Arensprodukt* zweier Elemente aus $\mathfrak{B}''$)
   $$\mathfrak{B}'' \times \mathfrak{B}'' \to \mathfrak{B}'' \quad y'' \mapsto y''x'' : \quad \langle y''x'', x'\rangle = \langle y'', x''x'\rangle$$

   Zeigen Sie: Die so erklärten Abbildungen sind stetig. Es gilt $x'(xy) = (x'x)y$ (d.h. $\mathfrak{B}'$ ist ein *rechter Banach* $\mathfrak{B}$*-Modul*), $(x''x')x = x''(x'x)$ und $(x''y'')x' = x''(y''x')$ (d.h. $\mathfrak{B}'$ ist ein *linker Banach* $\mathfrak{B}''$*-Modul*) und das Arensprodukt ist assoziativ. $\mathfrak{B}''$ ist unter der Arensmultiplikation eine Banachalgebra, in der die Banachalgebra $\mathfrak{B}$ vermöge der kanonischen Inklusion
   $$\iota : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'', \ \langle \iota(x), x'\rangle = \langle x', x\rangle$$
   isometrisch isomorph eingebettet ist.

7. Sei Φ ein algebraischer Homomorphismus von einer kommutativen Banachalgebra in eine *halbeinfache* Banachalgebra (d.h. eine Banachalgebra in der die Gelfandtransformation injektiv ist). Zeigen Sie, dass Φ ein abgeschlossener Operator ist, indem Sie zeigen, dass mit jedem $m \in \Delta$ auch $m \circ \Phi \in \Delta$ gilt und somit $m \circ \Phi$ stetig ist. Schließen Sie daraus, dass Φ stetig ist.

   Zeigen sie, dass jede Involution in einer kommutativen halbeinfachen Banachalgebra stetig ist.

8. Zeigen sie in jeder C^*-Algebra gilt $\|x\| = \|x^*\|$ und $\|x^*x\| = \|xx^*\|$.

9. Zeigen sie, dass $A(\mathbb{T})$ wie in Beispiel 1.0.3 definiert eine Banachalgebra mit Einselement, aber mit komplexer Konjugation als Involution keine C^*-Algebra ist.

10. Ein Element x einer Teilmenge S eines linearen Raumes heißt *extremal* in S, wenn es nicht als nichttriviale Konvexkombination zweier Elemente aus S darstellbar ist (d.h. $x = \lambda u + (1-\lambda)v$ gilt für $\lambda \in (0,1)$ und u, v in S nur für $u = v$).

Zeigen Sie in einer Banachalgebra $\mathfrak{B}$ ist jedes multiplikative Funktional extremal im Gelfandraum und in jeder C^*-Algebra sind multiplikative Funktionale extremal in der Einheitskugel von $\mathfrak{B}'$.

Hinw.: Zeigen Sie dass es für $u \neq v$ in der abg. Einheitskugel von $\mathfrak{B}'$ ein selbstadjungiertes Element x in $\mathfrak{B}$ gibt mit $u(x) \neq v(x)$. Betrachten Sie dann die von x erzeugte kommutative C^*-Algebra und begründen Sie dass Punktmaße extremal in der Einheitskugel von $M(\Delta$ sind.

11. Zeigen Sie dass jeder isometrische Isomorphismus Θ der Banachalgebra $C(K)$ vermöge $\Theta f = f \circ \theta$ aus einem Homöomorphismus θ von K hervorgeht.

12. Zeigen Sie, dass ein Projektor auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn er orthogonal ist (d.h. wenn $\mathcal{H} = \ker P \oplus \mathrm{Ran} P$ gilt).

13. Zeigen Sie, dass die Adjungiertenbildung stetig bezüglich der schwachen aber unstetig bez. der starken Operatortopologie ist.

    Hinw.: Shiftoperator

14. Zeigen Sie dass die Multiplikation von Operatoren aus $L(\mathcal{H})$ nicht stetig bezüglich der schwachen Operatortopologie ist, dass die Multiplikation aber koordinatenweise stetig in der schwachen Operatortopologie ist..

    Hinw.: Betrachten sie geeignete eindimensionale Störungen $x \mapsto (x, x_0)y_0$ des 0-Operators.

15. Zeigen Sie, dass der Abschluss einer kommutativen Banachalgebra in $L(\mathcal{H})$ bezüglich der schwachen Operatortopologie eine kommutative Banachalgebra ist.

16. Zeigen Sie, dass die Multiplikation von Operatoren aus $L(\mathcal{H})$ nicht stetig bezüglich der starken Operatortopologie ist, dass sie aber stetig auf der Einheitskugel versehen mit der Spurtopologie der starken Operatortopologie ist.

    Hinweis: Seien $S_{n,k}$ und $T_{n,k}$ in $L(\ell^2)$ durch $S_{n,k}\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{n}}(0, 0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots)$ und $T_{n,k}\mathbf{x} = n(0, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)$ definiert, wobei jeweils die ersten k Folgeglieder 0 sind.

    Zeigen Sie für jede Umgebungen U_1 von 0 in der starken Operatortopologie und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es k mit $T_{n,k} \in U_1$ und für jede st. Op. Umgebungen U_2 von 0 ist $S_{n,k} \in U_2$ für alle k und hinreichend große n. Berechnen sie $T_{n,k}S_{n,k}$ und begründen Sie so die Unstetigkeit (oder machen Sie die Paare (U, n) zu einer gerichteten Menge und argumentieren sie mit Netzkonvergenz.

17. Zeigen Sie dass jede in der starken Operatortopologie konvergente Folge von Operatoren bezüglich der Operatornorm beschränkt ist und obwohl die Produktbildung nicht

stetig ist mit Bsp. 16 aus $S_n \to S$ und $T_n \to T$ die Konvergenz $S_nT_n \to ST$ in der starken Operatortopologie folgt.

18. Sei für den normalen Operator $T \in L(\mathcal{H})$ durch den Funktionalkalkül $\exp T$ definiert. Zeigen sie: $\exp(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n$.

19. Zeigen Sie mit dem Funktionalkalkül, dass t_0 genau dann im Punktspektrum des normalen Operators T liegt (d.h. $\ker(T - t_0)$ ist nichttrivial), wenn $E_{\{t_0\}} \neq 0$ gilt, wobei $E_{\{t_0\}}$ der Projektor bez. der zu T gehörenden Zerlegung der Einheit zur Borelmenge $\{t_0\}$ ist.

20. Zeigen Sie für f stetig und T normal gilt: $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$ (Spektralabbildungssatz).

21. Zeigen Sie dass für einen selbstadjungierten Operator $T \in L(\mathcal{H})$ der Operator $\exp(\mathrm{i}T)$ unitär (isometrisch und surjektiv) ist.

22. Zeigen Sie, dass für jede Borel-Teilmenge D aus dem Spektrum eines normalen Operators T mit zugehöriger Zerlegung der Einheit E_A gilt $E_D \neq 0$ falls D nichtleeres Inneres hat.

23. Es sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator und B_i, $i \in I$ eine irreduzible Familie beschränkter Operatoren auf $\mathcal{H}$, (d.h. gilt für einen abg. Teilraum L von $\mathcal{H}$ $B_i(L) \subset L\ \forall i \in I$, so folgt $L = \mathcal{H}$ oder $L = \{0\}$). Wenn A mit $B_i\ \forall i \in I$ kommutiert, so gilt $A = \lambda I$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ (Lemma von Schur).

    Hinweis: Nehmen Sie an, A sei nicht konstant, dann gibt es einen nichttrivialen Projektor E_μ aus der Spektralschar von A. Verwenden Sie Bsp. 14 und Satz 2.1.2 um zu zeigen, dass E_μ auf einen unter den Operatoren B_i invarianten Teilraum abbildet.

24. Sei K ein kompakter Operator auf $\mathcal{H}$. Dann ist der Operator $(K^*K)^{1/2}$ kompakt.

    Hinweis: Verwenden Sie, dass der Raum der kompakten Operatoren abgeschlossen in $L(\mathcal{H})$ ist und KB für $B \in L(\mathcal{H})$ kompakt ist.

25. Zeigen Sie, dass jedes abgeschlossene nichttriviale Ideal der Algebra $L(\mathcal{H})$ das Ideal $K(\mathcal{H})$ der kompakten Operatoren enthält.

    Hinw: Verwenden Sie, dass beschränkte Operatoren mit endlichdimensionalem Bild dicht in $K(\mathcal{H})$ liegen.

26. Zeigen Sie mithilfe des Polarzerlegungssatzes, dass in einem separablen Hilbertraum jedes Ideal von $L(\mathcal{H})$, das einen nichtkompakten Operator enthält trivial ist.

    Mit Bsp. 25 folgt also, dass in einem separablen Hilbertraum $K(\mathcal{H})$ das einzige abgeschlossene nichttriviale Ideal von $L(\mathcal{H})$ ist. Gilt dies auch für nichtseparable Hilberträume?

Hinweis: Ist A nicht kompakt, so ist P in der Polarzerlegung von A nicht kompakt, also gibt es $\lambda > 0$, sodass $\mathrm{Id} - E_\lambda$ unendlichdimensionales Bild hat. Dann gibt es einen beschränkten Operator S mit $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} = p(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - E_\lambda)S = PS$.

27. Es sei $\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ der Graph des linearen Operators A im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\Phi(x, y) = (y, -x)$. Man zeige $\Gamma(A)^\perp = \Phi(\Gamma(A^*))$.

28. Zeigen Sie, dass für den Operator $T \in L(L_2([0, 1]))$,
$$Tf(x) = \int_0^x f(s)\, ds,$$
gilt: $\sigma(T) = \sigma_c(T) = \{0\}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass durch
$$f(x) = \frac{-1}{\lambda}\int_0^x g'(s)\mathrm{e}^{\frac{x-s}{\lambda}}\, ds - \frac{1}{\lambda}g(0)e^{\frac{x}{\lambda}} = \frac{-1}{\lambda^2}\int_0^x g(s)\mathrm{e}^{\frac{x-s}{\lambda}}\, ds - \frac{1}{\lambda}g(x)$$
für $g \in C^1([0, 1])$ die Lösung der Differentialgleichung $f - \lambda f' = g'$ mit $f(0) = -\frac{1}{\lambda}g(0)$ gegeben ist (kann durch Meth. d Var d. Konst hergeleitet werden).

29. Zeigen Sie: Für $A \in L(X)$ und $0 \neq \lambda \in \rho(A), \quad 0 \in \rho(A) \cup \sigma_c(A)$ gilt:
$$\frac{1}{\lambda} \in \rho(A^{-1}).$$
Beweisen Sie damit, dass für den Operator T aus Beispiel 28 $\sigma(T^{-1}) = \emptyset$ gilt.

30. Es sei $X = C[0, 1]$, $a \in X$, $A : X \to X$ definiert durch
$$(Ax)(t) := a(t)x(t) \quad (t \in [0, 1])$$
für $x \in X$. Zeigen Sie, dass A ein beschränkter linearer Operator in X ist und bestimmen Sie $\|A\|$, $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_r(A)$ und $\sigma_c(A)$.

31. Es sei T der lineare Operator in $L_2([0, \pi])$ mit Definitionsbereich
$$D(T) = \{x \in C^1([0, \pi]) : x' \text{ ist abs. stetig }, x'' \in L_2([0, \pi]),\, x(0) = x(\pi) = 0\}$$
und $Tx = -x''$ f.ü. Zeigen Sie, dass T abgeschlossen ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für $x_n \in D(T)$ gilt:
$$x_n(t) = tx_n'(0) + \int_0^t \int_0^r x_n''(s)\, ds\, dr.$$
Zeigen sie dann aus $x_n'' \to y$ und $x_n \to x$ folgt für $x_n \in D(T)$:
$$x_n'(0) \to \frac{-1}{\pi}\int_0^\pi \int_0^r y(s)\, ds\, dr.$$

32. Berechnen Sie $\sigma(T)$ sowie die Resolvente des Operators T aus Bsp. 31.

    Hinweis: Verwenden Sie, dass die klassische Lösung (d.h. Lösung in $C^2([0,\pi])$) der DG $-f'' - \lambda f = g, \quad g \in C([0,\pi])$ unter den Randbedingungen $f(0) = f(\pi) = 0$ durch

$$f(t) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t g(s) \sin \sqrt{\lambda}(t-s)\, ds + \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\pi} \int_0^\pi g(s) \sin \sqrt{\lambda}(\pi - s)\, ds$$

    $\lambda \neq n^2$ gegeben ist (erhält man mit Meth. d. Variation der Konstanten) um den Resolventenoperator für $\lambda \neq 0, 1, 4, 9, 25, \ldots$ anzugeben. Berechnen Sie R_0.

    Verwenden Sie folgenden Satz aus der Maßtheorie: *Für eine integrierbare Funktion f ist $g(x) := \int_0^x f(s)\, ds$ absolut stetig mit $g' = f$ f.ü. Umgekehrt ist eine absolut stetige Funktion g f.ü. differenzierbar mit $g(x) = g(0) + \int_0^x g'(s)\, ds$* um zu zeigen, dass jede Lösung in L_2 (also insbes. nur f.ü.) der Differentialgleichung $-f'' - \lambda f = 0$ notwendigerweise in $C^2([0,\pi])$ liegt, also Lösung der klassischen homogenen DG ist.

33. Für beschränkte selbstadjungierte Operatoren A bilden $(\mathrm{e}^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$ bzw. $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA})_{t\in\mathbb{R}}$ eine Gruppe von positiven bzw. unitären Operatoren, die bezüglich der Operatornorm stetig ist.

34. Zeigen Sie dass eine Halbgruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ von Operatoren in X genau dann stark stetig ist, wenn gilt: $\exists M > 0, \delta > 0$ und ein dichter Teilraum E von X mit $\|T(t)\| \leq M \quad \forall t \in [0,\delta]$, $\lim_{t\to 0} \|T(t)x - x\| = 0 \quad \forall x \in E$.

35. Zeigen Sie, dass auf $L_1(\mathbb{R})$ mit

$$T(t)f(s) = \begin{cases} 2f(t+s) & s \in [-t, 0] \\ f(t+s) & \text{sonst} \end{cases}$$

    eine stark stetige Halbgruppe gegeben ist, für die die Abschätzung $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ nur für $M \geq 2$ gilt.

36. Zeigen Sie, dass durch den Faltungsoperator $T_\lambda f = f * h_\lambda$ $\lambda > 0$ mit

$$h_\lambda(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$$

    eine stark stetige Halbgruppe auf $L_1(\mathbb{R})$ definiert wird.

    Hinweis: Verwenden Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + (x-y)^2} \frac{1}{\nu^2 + y^2}\, dy = \pi \frac{\lambda + \nu}{\lambda\nu} \frac{1}{(\lambda+\nu)^2 + x^2}$$

    und

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)\, dx = 1 \quad \forall \lambda > 0$$

um mit Hilfe des Satzes von FUBINI die Konvergenz von $\|T_\lambda f - f\|_1$ gegen 0 für stetige Funktionen mit kompaktem Träger zu beweisen.

37. Auf dem Banachraum $C([0,1])$ sei die Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}$ durch $(T(t)f)(s) = f(\min(1, t+s))$ gegeben. Man bestimme den infinitesimalen Erzeuger von T.

38. Zeigen Sie, dass für die Translationshalbgruppe auf $L_1(\mathbb{R})$ der infinitesimale Erzeuger A durch
$$D(A) = \{f \in L_1(\mathbb{R}) : f \text{ ist absolut stetig mit } f' \in L_1(\mathbb{R})\}, \qquad Af = f'$$
gegeben ist.

    Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass der infinitesimale Erzeuger eine Erweiterung von A ist und dann, dass für $\lambda > 0$ der Operator $A - \lambda$ surjektiv ist (vgl. Surjektivität des Operators aus Kap. 3.6.1).

39. Es sei $\{T(t)\}$ die Translationshalbgruppe von Beispiel 37 und A_λ die YOSHIDA–Approximationen ihres infinitesimalen Erzeugers. Man zeige: Für $\varepsilon > 0$ gibt es λ, N mit
$$\left|(T(t)f)(s) - \sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!}(A_\lambda^k f)(s)\right| < \varepsilon \qquad \forall s,t \in [0,1].$$
Man leite hiermit den *Approximationssatz von Weierstraß* her, d.h. man zeige, dass der Raum der Polynome dicht in $C([0,1])$ liegt.

40. Man zeige: Ist $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger A, so liegt das Spektrum in einer Halbebene
$$\{\lambda : \operatorname{Re}(\lambda) \le \omega\}.$$

41. Ist A abgeschlossen und dicht definiert, so ist A genau dann infinitesimaler Erzeuger einer C_0–Halbgruppe mit $\|T(t)\| \le \mathrm{e}^{\omega t}$, wenn $\{\lambda : \lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$ und $\|R_\lambda\| \le (\lambda - \omega)^{-1}$ für $\lambda > \omega$ gilt.

42. Man zeige, dass die Fouriertransformierte des Diracmaßes δ_a der Distribution Λ_{e_a}, $e_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}$ entspricht.

43. Zeigen sie hiermit und unter Verwendung von der Umkehrformel Satz 5.3.4, dass $\mathscr{F}\Lambda_{\mathbf{1}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta_0$ im distributionellen Sinn für die der konstaten Funktion $\mathbf{1}$ entsprechende reguläre Distribution $\Lambda_{\mathbf{1}}$ gilt.

44. Zeigen sie, dass die Funktion $f(x,y) := f_1(x+y) + f_2(x-y)$ für messbare lokal integrierbare Funktionen f_1, f_2 eine schwache Lösung der Wellengleichung $u_{x,x} - u_{y,y} = 0$ in $\mathscr{D}'$ ist und für messbare Funktionen f_1, f_2, die $|f_i(t)| < c(1 + |t|^2)^l$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und $l \in \mathbb{N}$ erfüllt eine schwache Lösung in $\mathscr{S}'$ ist.

45. Zeigen sie, dass für $\Omega = (0,1)^n$, $k < |\alpha|$ die Abbildung D^α unstetig von $(\mathscr{D}, \|\cdot\|_k)$ nach $(\mathscr{D}, \|\cdot\|_0)$ ist. Hinweis: Man betrachte die Folge (ϕ_j) mit $\phi_j(x) = \phi(jx)$

46. Für jede Folge (x_i) in Ω, die keinen Häufungspunkt in Ω hat und jede Folge von Multiindizes (α_i) ist $\sum_{i=1}^{\infty} D^{\alpha_i}\delta_{x_i}$ in $\mathscr{D}'$.

47. Zeigen Sie dass $(\mathscr{D}, \tau)$ nicht metrisierbar ist.

    Hinweis: Gäbe es eine Folge p_i von Seminormen, die τ induziert, so müsste es für jedes $\Lambda \in \mathscr{D}'$, $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$ geben mit $|\Lambda(\phi)| < \epsilon$ für $p_i(\phi) < \delta$ $i \leq N$. Wähle in Beispiel 46 die Multiindizes α_i so, dass das nach Bsp. 45 nicht erfüllt ist.

48. Zeigen Sie für $f \in \mathscr{S}$ gilt $f^{\wedge\wedge}(x) = f(-x)$ und auf $\mathscr{S}' : \mathscr{F}^4 = \mathrm{Id}$.

Index

Literaturverzeichnis

[1] N. I. Achieser — I. M. Glasmann, Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum, Akademie–Verlag, Berlin, 1968

[2] R. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Springer GTM 179, Berlin, 1977 (2. Auflage)

[3] N. Dunford — J. T. Schwartz, Linear Operators, Part I-III, Interscience/Wiley, New York, 1958-71

[4] K. Engel — R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer, Berlin, 2000

[5] H. Heuser, Funktionalanalysis, Teubner, Stuttgart, 1992 (3. Auflage)

[6] J. Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, Springer, Berlin 2009

[7] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer, Berlin 1983

[8] G. J. Murphy C^*-Algebras and Operator Theory, Academic Press 1990

[9] W. Rudin, Functional Analysis. Mc Graw–Hill, New Delhi, 1973

[10] D. Werner, Funktionalanalysis, Springer, Berlin 2002

[11] K. Yoshida, Functional Analysis, Springer, Berlin, 1966 (2. Auflage)