

# ANALYSIS 3

MARTIN BLÜMLINGER  
INST. 101  
TU WIEN

DEZEMBER 2022



Ich bitte um Meldung von Fehlern – Verbesserungsvorschlägen aller Art unter [bluemlinger@twien.ac.at](mailto:bluemlinger@twien.ac.at)

©2022 Martin Blümlinger TU Wien



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Topologie</b>	<b>1</b>
1.1	Topologische Grundbegriffe . . . . .	1
1.2	Stetige Abbildungen . . . . .	3
1.3	Initiale und finale Topologien . . . . .	10
1.4	Kompakte Mengen . . . . .	13
1.5	Sätze v. Arzelà-Ascoli und Stone-Weierstraß . . . . .	19
1.6	Normale Räume . . . . .	25
1.7	Lokalkompakte Räume . . . . .	28
1.8	Zusammenhang . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Funktionsräume</b>	<b>33</b>
2.1	Vertauschungssätze . . . . .	34
2.2	Vervollständigung metrischer Räume . . . . .	42
2.3	Banachräume . . . . .	47
2.4	Faltung . . . . .	51
2.5	$L^p$ -Räume . . . . .	54
2.6	Hilberträume . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Fouriertransformation</b>	<b>65</b>
3.1	Fourierreihen . . . . .	65
3.2	Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	76
3.3	Fouriertransformation in $\mathcal{S}$ und $L^2$ . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Hausdorffmaß, Transformations- und Flächenformel</b>	<b>85</b>
4.1	Hausdorffmaß und Hausdorffdimension . . . . .	86
4.2	Flächenformel . . . . .	93
4.3	Transformationsformel . . . . .	106
4.4	Koflächenformel . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Mannigfaltigkeiten und Integralsätze</b>	<b>115</b>
5.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	115

5.2	Zerlegung der Eins . . . . .	119
5.3	Integralsätze von Gauß und Green . . . . .	121
5.4	Integralsatz von Stokes . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Sobolevräume</b>	<b>135</b>
6.1	Schwache Ableitung . . . . .	135
6.2	Sobolevräume . . . . .	139
6.3	Einbettungs und Differenzierbarkeitssätze . . . . .	147
6.4	$H^s$ und Fouriertransformation . . . . .	160
<b>7</b>	<b>Fixpunktsätze</b>	<b>163</b>
7.1	Fixpunktsatz von Banach . . . . .	163
7.2	Fixpunktsatz von Brouwer . . . . .	164
7.3	Jordan'scher Kurvensatz . . . . .	169
7.4	Fixpunktsatz von Schauder . . . . .	172
7.5	Fixpunktsatz von Kakutani . . . . .	176
<b>8</b>	<b>Anhang</b>	<b>179</b>
8.1	Hauptsatz über implizite Funktionen . . . . .	179
8.2	Extrema unter Nebenbedingungen . . . . .	183
8.3	Lemma von Zorn . . . . .	188

# Kapitel 1

## Topologie

### 1.1 Topologische Grundbegriffe

Ziel der mengentheoretischen Topologie ist es zentrale Begriffe der Analysis wie Stetigkeit Kompaktheit Konvergenz u.s.w. in Räumen zu definieren, in denen keine Metrik definiert werden kann, die den gewünschten Begriffen entsprechen. So kann die punktweise Konvergenz von Funktionen auf  $[0, 1]$  durch keine Metrik beschrieben werden (vgl. Übung). Anstelle offener  $\varepsilon$ -Kugeln in metrischen Räumen definieren wir ein System offener Mengen ohne einen Abstands begriff zugrunde zu legen.

Sei  $X$  eine Menge, dann heißt eine Teilmenge  $\mathcal{T}$  der Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  von  $X$  **Topologie** auf  $X$  und das Dupel  $(X, \mathcal{T})$  **topologischer Raum**, wenn gilt:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $O_i \in \mathcal{T}$  für  $i$  aus einer beliebigen Indexmenge  $I$ , dann folgt  $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$
- $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$ .

Die Mengen in  $\mathcal{T}$  heißen **offen**, ihre Komplemente in  $X$  **abgeschlossen**.

Aus den Axiomen für offene Mengen leitet man unmittelbar durch Komplementbildung die dualen Aussagen für abgeschlossene Mengen her:

- $\emptyset, X$  sind abgeschlossen
- $\cap_{i \in I} A_i$  ist abgeschlossen für eine beliebige Familie  $(A_i)_{i \in I}$  abgeschlossener Mengen
- $U, V$  abgeschlossen  $\Rightarrow U \cup V$  abgeschlossen.

Da  $\mathcal{P}(X)$  durch Mengeninklusion halbgeordnet ist, gibt es eine natürliche Halbordnung auf der Menge aller Topologien auf einer Menge  $X$ . Wir bezeichnen  $\mathcal{T}$  **feiner** als  $\mathcal{T}'$  respektive  $\mathcal{T}'$  **größer** als  $\mathcal{T}$ , wenn  $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$  gilt.

Die Potenzmenge einer Menge  $X$  bezeichnen wir als die **diskrete Topologie**. Sie ist die feinste Topologie auf  $X$ . Die Menge  $\{\emptyset, X\}$  ist die größte Topologie auf  $X$ , wir bezeichnen sie als die **indiskrete Topologie**.

Wir übertragen einige Begriffe die auf metrischen Räumen erklärt waren auf topologische Räume:

- $N \subseteq X$  heißt **Umgebung** des Punktes  $x \in X$ , wenn es  $U \in \mathcal{T}$  mit  $x \in U \subseteq N$  gibt
- Das **Innere**  $E^\circ$  der Menge  $E \subseteq X$  ist die Menge aller  $x \in E$  für die  $E$  eine Umgebung von  $x$  ist.
- Der **Abschluss**  $\bar{E}$  von  $E \subseteq X$  ist die Menge aller Elemente  $x \in X$  für die  $U \cap E \neq \emptyset$  für alle Umgebungen  $U$  von  $x$  gilt
- Der **Rand**  $\partial E$  einer Menge  $E$  ist  $\bar{E} \setminus E^\circ$ .
- Eine Teilmenge  $A$  von  $X$  heißt **dicht** in  $X$ , wenn  $\bar{A} = X$  gilt.

Man verifiziert unmittelbar (vgl. Übung)

- Das Innere einer Teilmenge  $E$  von  $X$  ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von  $E$  und damit die größte offene Teilmenge von  $E$
- Der Abschluss einer Teilmenge  $E$  von  $X$  ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von  $E$  und damit die kleinste abgeschlossene Obermenge von  $E$

Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$ , so ist das Mengensystem  $\{A \cap O : O \in \mathcal{T}\}$  eine Topologie auf  $A$ , die **Spurtopologie** oder **Relativtopologie** von  $A$  genannt wird.

Eine Teilmenge  $\mathcal{B}$  von  $\mathcal{T}$  heißt **Basis** der Topologie  $\mathcal{T}$ , wenn jedes  $O \in \mathcal{T}$  als Vereinigung von Elementen von  $\mathcal{B}$  dargestellt werden kann. Eine Teilmenge  $\mathcal{S}$  von  $\mathcal{T}$  heißt **Subbasis** der Topologie  $\mathcal{T}$ , wenn die endlichen Durchschnitte von Mengen aus  $\mathcal{S}$  eine Basis von  $\mathcal{T}$  bilden.

**Proposition 1.1.1.** *Eine Teilmenge  $\mathcal{B}$  von  $\mathcal{P}(X)$  ist Basis einer Topologie auf  $X$ , wenn es für  $U, V \in \mathcal{B}$  und  $x \in U \cap V$  ein  $W \in \mathcal{B}$  mit  $x \in W \subseteq U \cap V$  gibt und  $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X$  gilt.*

*Jede Teilmenge  $\mathcal{S}$  von  $\mathcal{P}(X)$ , mit  $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = X$  ist Subbasis einer eindeutigen Topologie. Die von dieser Subbasis induzierte Topologie ist die größte Topologie in der alle Mengen aus  $\mathcal{S}$  offen sind.*



*Beweis.* Um zu sehen, dass ein Mengensystem  $\mathcal{B}$  mit den genannten Eigenschaften Basis einer Topologie ist, ist zu zeigen dass das System aller Mengen, die aus beliebigen Vereinigungen von Mengen aus  $\mathcal{B}$  entstehen durchschnittsstabil ist (es ist ja offensichtlich stabil unter der Bildung beliebiger Vereinigungen). Wegen

$$(\cup_i A_i) \cap (\cup_j B_j) = \cup_{i,j} (A_i \cap B_j)$$

genügt es zu zeigen, dass für  $A, B \in \mathcal{B}$  die Menge  $A \cap B$  Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$  ist. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem  $x \in A \cap B$  ein  $W_x \in \mathcal{B}$  mit  $W_x \subseteq A \cap B$ . Damit gilt aber  $A \cap B = \cup_{x \in A \cap B} W_x$  mit  $W_x \in \mathcal{B}$ .

Das Mengensystem aller beliebigen Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen aus  $\mathcal{S}$  ist stabil unter der Bildung endlicher Durchschnitte und damit nach dem eben gezeigten eine Basis. Da jede Topologie die  $\mathcal{S}$  enthält auch endliche Durchschnitte von Mengen aus  $\mathcal{S}$  enthält, muss diese Basis in jeder Topologie liegen, die  $\mathcal{S}$  enthält. Jede Topologie die  $\mathcal{B}$  enthält muss alle Vereinigungen von Mengen aus  $\mathcal{B}$  enthalten, womit die Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$ , da sie eine Topologie ist, die kleinste  $\mathcal{B}$  enthaltende Topologie ist.  $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass diese einfachen topologischen Begriffsbildungen bereits ausreichen um einen topologischen Beweis einer rein zahlen-theoretischen Aussage zu geben:

**Satz 1.1.2.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

*Beweis.* (H. Fürstenberg 1955) Auf  $\mathbb{Z}$  seien die Mengen  $A_{k,l} := \{k + nl : n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $l \in \mathbb{N}$  definiert. Für  $m \in A_{k,l} \cap A_{k',l'}$  gilt offensichtlich:  $A_{m,l'} \subseteq A_{k,l} \cap A_{k',l'}$ . Nach Proposition 1.1.1 bilden die Mengen  $A_{k,l}$  eine Basis einer Topologie auf  $\mathbb{Z}$ . Wegen  $A_{k,l}^c = \cup_{i=1}^{l-1} A_{k+i,l}$  sind die Mengen  $A_{k,l}^c$  offen.

Jede ganze Zahl ungleich  $\pm 1$  hat eine Primzahl als Teiler. Bezeichnet  $\mathbb{P}$  die Menge aller Primzahlen so gilt also  $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \cup_{p \in \mathbb{P}} A_{0,p}$ . Es folgt  $\{-1, 1\} = \cap_{p \in \mathbb{P}} A_{0,p}^c$  mit offenen Mengen  $A_{0,p}^c$ . Wäre  $\mathbb{P}$  endlich, wäre  $\{-1, 1\}$  als endlicher Durchschnitt offener Mengen offen und müsste so als Vereinigung von Basismengen  $A_{k,l}$  darstellbar sein. Da diese alle unendlich sind ist das offenbar unmöglich.  $\square$

Die im Beweis verwendete Topologie ist ein Beispiel für nichttriviale topologische Räume in denen es neben  $X$  und  $\emptyset$  weitere Mengen gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

## 1.2 Stetige Abbildungen

Eine nichtleere Teilmenge  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{P}(X)$  heißt **Filter**, wenn gilt:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F}, B \supset A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$ .

Die Menge aller Umgebungen eines Punktes  $x \in X$  bilden einen Filter, den **Umgebungsfilter**  $\mathcal{U}(x)$  von  $x$ .

Eine Teilmenge  $\mathcal{B}$  von  $\mathcal{P}(X)$  für die gilt:

- $\emptyset \notin \mathcal{B}$
- $U, V \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists W \in \mathcal{B}$  mit  $W \subseteq U \cap V$

heißt **Filterbasis**. Die Menge aller Obermengen von Mengen aus einer Filterbasis  $\mathcal{B}$  bilden einen Filter. Man nennt dann  $\mathcal{B}$  eine Filterbasis dieses Filters.

Eine Filterbasis des Umgebungsfilters eines Punktes  $x$  heißt **Umgebungsbasis** von  $x$ .

Ist ein Filter  $\mathcal{F}'$  Teilmenge eines Filters  $\mathcal{F}$ , so heißt  $\mathcal{F}'$  **größer** als  $\mathcal{F}$  respektive  $\mathcal{F}$  **feiner** als  $\mathcal{F}'$ .

Ein Filter der feiner als der Umgebungsfilter eines Punktes  $x$  ist heißt **konvergent** gegen  $x$  und  $x$  ein **Grenzwert** des Filters.

Obwohl man die Konvergenz von Folgen problemlos in nicht-metrischen Räumen definieren kann, ist dieser Zugang im Allgemeinen ungeeignet um Begriffe wie abgeschlossen, kompakt oder stetig so zu definieren, dass die zentralen Eigenschaften wie wir sie aus der metrischen Topologie kennen erhalten bleiben. Es stellt sich aber heraus, dass wenn man Folgen verallgemeinert indem man als Indexmenge beliebige Mengen zulässt und nicht notwendigerweise totalgeordnet sind sondern die schwächere Forderung stellt, dass sie **gerichtet** ist ein passendes Konzept gefunden werden kann: Eine Menge  $I$  mit einer Relation  $\preceq$  heißt **gerichtet**, wenn gilt:

- $\forall i \in I: i \preceq i$  (Reflexivität)
- $\forall i, j, k \in I: i \preceq j \wedge j \preceq k \Rightarrow i \preceq k$  (Transitivität)
- $i, j \in I \Rightarrow \exists k \in I$  mit  $i \preceq k, j \preceq k$  (Existenz einer oberen Schranke).

Eine Abbildung einer gerichteten Menge  $(I, \preceq)$  in eine Menge  $X$  wird **Netz** genannt und als  $(x_i)_{i \in I}$  geschrieben. Folgen sind demnach spezielle Netze.

Für ein Netz  $(x_i)_{i \in I}$  und eine gerichtete Menge  $(J, \preceq_J)$  mit einer Abbildung  $\varphi: J \rightarrow I$  heißt  $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$  **Teilnetz** des Netzes  $(x_i)_{i \in I}$ , wenn es für jedes  $i_0 \in I$  ein  $j_0 \in J$  gibt, sodass für  $j_0 \preceq_J j$  folgt  $i_0 \preceq \varphi(j)$ .

In einem topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$  **konvergiert** ein Netz  $(x_i)_{i \in I}$  gegen  $x \in X$ , wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $i_0 \in I$  gibt mit  $x_i \in U$  für  $i \succeq i_0$ .

Für jedes Netz  $(x_i)_{i \in I}$  ist das Mengensystem  $\{x_i : i_0 \preceq i\}$ ,  $i_0 \in I$  eine Filterbasis. Der von dieser Filterbasis erzeugte Filter heißt **Abschnittsfilter** des Netzes.

Umgekehrt ist für jede Filterbasis  $\tilde{\mathcal{F}}$  in  $X$  mit erzeugtem Filter  $\mathcal{F}$  die Menge  $I := \{(F, y) : F \in \mathcal{F}, y \in F\}$  durch die Relation  $(E, y) \preceq (F, z) \Leftrightarrow F \subseteq E$  eine gerichtete Menge. Mit der Funktion  $x_{(F, y)} = y$  ist  $(x_{(F, y)})_{(F, y) \in I}$  ein Netz, dessen Abschnittsfilter wiederum der von  $\tilde{\mathcal{F}}$  erzeugte Filter  $\mathcal{F}$  ist.

Es gilt:

**Satz 1.2.1.** *Ein Netz  $(x_i)_{i \in I}$  in einem topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$  konvergiert genau dann gegen  $x \in X$ , wenn der zugehörige Abschnittsfilter gegen  $x$  konvergiert.*

*Beweis.* Das Netz konvergiert genau dann gegen  $x$ , wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $i_0 \in I$  gibt, sodass aus  $i_0 \preceq i$   $x_i \in U$  folgt. Das ist genau dann der Fall, wenn  $\{x_i : i_0 \preceq i\} \subseteq U$  gilt, also wenn alle  $U \in \mathcal{U}(x)$  Mengen aus dem Abschnittsfilter sind, also wenn der Abschnittsfilter gegen  $x$  konvergiert.  $\square$

Die Menge  $\mathcal{B}$  aller Filter in  $X$ , die  $\mathcal{F}$  enthalten ist unter Mengeneinklusion totalgeordnet. Für eine totalgeordnete Familie  $\mathcal{A}_j$ ,  $j \in \mathcal{J}$  in  $\mathcal{B}$  ist auch  $\cup_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{A}_j$  ein Filter.  $\cup_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{A}_j$  ist also eine obere Schranke der Filter  $\mathcal{A}_j$ ,  $j \in \mathcal{J}$ . Nach dem Lemma von Zorn existiert damit ein maximales Element in  $\mathcal{B}$ . Ein Filter der maximal in diesem Sinn ist, zu dem es also keinen echt feineren Filter gibt heißt **Ultrafilter**. Es gilt also:

**Satz 1.2.2.** *Jeder Filter kann zu einem Ultrafilter verfeinert werden.*

**Lemma 1.2.3.** *Ist  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter auf der Menge  $X$ , so gibt es für jede endliche Familie  $A_1, \dots, A_n$  von Teilmengen von  $X$  mit  $\cup_{i=1}^n A_i = X$  ein  $i \leq n$  mit  $A_i \in \mathcal{F}$ .*

*Gilt für einen Filter  $\mathcal{F}$  auf  $X$  und jede Menge  $A \subseteq X$ :  $A \in \mathcal{F}$  oder  $A^c \in \mathcal{F}$ , so ist  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter. Gibt es für jedes  $i \leq n$  ein  $F_i \in \mathcal{F}$  mit  $A_i \cap F_i = \emptyset$ , so folgt  $\cap_i F_i \subseteq \cap_i A_i^c = \emptyset$  im Widerspruch zu  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ . Also gibt es ein  $i$  mit  $A_i \cap F \neq \emptyset$  für alle  $F \in \mathcal{F}$ . Damit ist  $\{A_i \cap F : F \in \mathcal{F}\}$  eine Filterbasis, deren erzeugter Filter  $\mathcal{F}$  enthält. Da  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter ist, kann dieser Filter nicht echt feiner als  $\mathcal{F}$  sein, womit  $A_i \in \mathcal{F}$  folgt.

Enthält ein Filter  $\mathcal{F}$  für jede Teilmenge  $A$  eine der Mengen  $A$  oder  $A^c$ , so kann kein Filter echt feiner als  $\mathcal{F}$  sein, da ein Filter der  $A$  enthält  $A^c$  nicht enthalten kann und umgekehrt ohne  $A \cap A^c \in \mathcal{F}$  für  $A, A^c \in \mathcal{F}$  oder  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  zu verletzen.  $\square$

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **Hausdorffraum** (oder er erfüllt das 2. Trennungsaxiom T2), wenn es für  $x \neq y \in X$  disjunkte Umgebungen von  $x$  und  $y$  gibt.

**Satz 1.2.4.** *In einem topologischen Raum sind die Grenzwerte aller konvergenter Filter genau dann eindeutig wenn er ein Hausdorffraum ist.*

*Beweis.* Für  $x \neq y$  gibt es in einem Hausdorffraum disjunkte Umgebungen  $U$  und  $V$  von  $x$  und  $y$ . Konvergiert ein Filter sowohl gegen  $x$  als auch gegen  $y$  so muss er sowohl  $U$  als auch  $V$  enthalten. Als Filter muss dann auch  $U \cap V = \emptyset$  im Filter liegen im Widerspruch zu den Filteraxiomen.

Ist der Grenzwert eines jeden konvergenten Filters eindeutig, so ist für  $x \neq y$  das Mengensystem  $U \cap V$ ,  $U \in \mathcal{U}(x)$ ,  $V \in \mathcal{U}(y)$ , keine Filterbasis, denn andernfalls wäre der von diesem Filter erzeugte Filter feiner als  $\mathcal{U}(x)$  und feiner als  $\mathcal{U}(y)$  und er würde sowohl gegen  $x$  als auch  $y$  konvergieren. Da dieses Mengensystem durchschnittsstabil ist, folgt dass es die leere Menge enthält, dass es also disjunkte Umgebungen von  $x$  und  $y$  gibt.  $\square$

Eine Abbildung  $f$  eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{T})$  in einen topologischen Raum  $(Y, \mathcal{T}')$  heißt **stetig** in  $x \in X$ , wenn die Urbilder  $f^{-1}(U)$  von Umgebungen  $U$  von  $f(x)$  Umgebungen von  $x$  sind. Da eine Obermenge einer Umgebung wieder eine Umgebung ist, folgt, dass  $f$  in  $x$  stetig ist, wenn die Mengen  $f^{-1}(U)$  Umgebungen von  $x$  sind für alle Mengen  $U$  aus einer Umgebungsbasis von  $f(x)$ .

Auf topologischen Räumen kann die Konvergenz von Folgen wie in metrischen Räumen definiert werden: Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **konvergent** gegen  $x \in X$ , wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \in U$  für  $n \geq n_0$  gibt. Eine Funktion  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  heißt **folgenstetig**, wenn für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$ , die gegen ein  $x \in X$  konvergiert die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(x)$  konvergiert.

Es gilt

**Satz 1.2.5.** *Jede stetige Funktion  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  ist folgenstetig. Hat jedes Element von  $X$  eine abzählbare Umgebungsbasis, was z.B. in metrischen Räumen immer der Fall ist, so sind folgenstetige Funktionen stetig.*

*Beweis.* Ist  $f$  stetig in  $x$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gegen  $x \in X$  konvergente Folge in  $X$  und  $U$  eine Umgebung von  $f(x)$ , so ist  $f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $x$ . Wegen der Konvergenz der Folge gegen  $x$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \in f^{-1}(U)$  für  $n \geq n_0$ . Also gilt  $f(x_n) \in U$  für  $n \geq n_0$  und  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $f(x)$ .

Ist  $f$  in einem Punkt  $x \in X$  mit abzählbarer Umgebungsbasis  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  unstetig, dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $f(x)$ , deren Urbild  $f^{-1}(U)$  keine Umgebung von  $x$  ist. Für  $n \in \mathbb{N}$  ist dann auch das Bild der Umgebung  $\cap_{i \leq n} V_i$  von  $x$  unter  $f$  keine Teilmenge von  $U$  und wir können ein  $x_n \in \cap_{i \leq n} V_i \setminus f^{-1}(U)$  finden. Die so konstruierte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $x$ , denn jede Umgebung  $V$  von  $x$  enthält  $V_i$  für ein geeignetes  $i$ , da  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Umgebungsbasis ist. Für  $n \geq i$

gilt damit  $x_n \in V_i \subseteq V$ . Da nach Konstruktion aber für kein  $n$  das Bild  $f(x_n)$  in der Umgebung  $U$  von  $f(x)$  liegt, konvergiert  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen  $f(x)$ . Damit folgt aus Folgenstetigkeit in Räumen mit abzählbarer Basis die Stetigkeit.  $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass im Allgemeinen aus Folgenstetigkeit nicht Stetigkeit folgt.

*Beispiel 1.2.6.* Sei  $[0, 1]$  versehen mit der Topologie  $\mathcal{T}$  in der eine Teilmenge von  $[0, 1]$  offen ist, wenn sie leer ist oder abzählbares Komplement in  $[0, 1]$  hat. In diesem Raum sind nur fastkonstante Folgen  $(x_n)$  gegen  $x \in [0, 1]$  konvergent, das sind Folgen für die gilt  $x_n = x$  für ein  $n > n_0$  (man betrachte die Umgebung  $[0, 1] \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}, x_n \neq x\}$  von  $x$ ). Für jede fastkonstante Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert klarerweise für jedes  $f$  die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(x)$ , also ist für  $([0, 1], \mathcal{T})$  jede Abbildung  $f$  in einen topologischen Raum  $(Y, \mathcal{T}')$  folgenstetig. Die kanonische Abbildung von  $([0, 1], \mathcal{T})$  nach  $[0, 1]$  versehen mit der natürlichen Topologie ist aber unstetig ( $f^{-1}(a, b) = (a, b)$ , aber  $(a, b)$  ist nur für  $a = 0, b = 1$  in  $\mathcal{T}$ ).

Auf topologischen Räumen deren Topologie nicht durch eine Metrik induziert wird lässt sich also im Allgemeinen die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt  $x$  nicht dadurch charakterisieren, dass die Bildfolge einer gegen  $x$  konvergente Folge gegen  $f(x)$  konvergiert. Es gilt aber eine entsprechende Charakterisierung der Stetigkeit über die Konvergenz von Netzen:

**Satz 1.2.7.** *Für eine Abbildung  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ ,  $x \in X$  sind äquivalent:*

- i)  *$f$  ist stetig in  $x$ .*
- ii) *Für jedes Netz  $(x_i)_{i \in I}$  das in  $X$  gegen  $x$  konvergiert, konvergiert das Netz  $(f(x_i))_{i \in I}$  gegen  $f(x)$ .*
- iii) *Für jeden gegen  $x$  konvergenten Filter  $\mathcal{F}$  ist sein Bild  $f(\mathcal{F}) = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$  Filterbasis eines gegen  $f(x)$  konvergenten Filters.*

*Beweis.* i)  $\Rightarrow$  iii): Sei  $f$  in  $x$  stetig und konvergiere der Filter  $\mathcal{F}$  gegen  $x$ . Sei  $U'$  eine Umgebung von  $f(x)$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  in  $x$  ist  $f^{-1}(U')$  eine Umgebung von  $x$ . Nach Voraussetzung gibt es  $F \in \mathcal{F}$  mit  $F \subseteq f^{-1}(U')$ . Damit gilt  $f(F) \subseteq f(f^{-1}(U')) \subseteq U'$ . Also konvergiert der von der Filterbasis  $f(\mathcal{F})$  erzeugte Filter gegen  $f(x)$ .

iii)  $\Rightarrow$  ii): Konvergiert das Netz  $(x_i)_{i \in I}$  gegen  $x$ , so konvergiert nach Satz 1.2.1 auch sein Abschnittsfilter  $\mathcal{F}$  gegen  $x$ . Nach Voraussetzung konvergiert der von der Filterbasis  $f(\mathcal{F})$  erzeugte Filter  $\mathcal{F}'$  gegen  $f(x)$ , d.h. für jede Umgebung  $U$  von  $f(x)$  gibt es ein  $F' \in \mathcal{F}'$  mit  $F' \subseteq U$ . Da die Mengen  $F \in \mathcal{F}$  genau die Obermengen von  $\{f(x_i) : i_0 \preceq i\}$  für ein  $i_0 \in I$  sind, folgt  $f(x_i) \in U$  für alle  $i_0 \preceq i$ , also die Konvergenz von  $f(x_i)_{i \in I}$  gegen  $f(x)$ .

ii)  $\Rightarrow$  i): Ist  $f$  in  $x$  nicht stetig, so gibt es eine Umgebung  $V$  von  $f(x)$  für die  $f^{-1}(V)$  keine Umgebung von  $x$  ist. Damit gibt es für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $x_U \in U \setminus f^{-1}(V)$ . Der Umgebungsfilter  $\mathcal{U}(x)$  von  $x$  ist eine durch Mengeninklusion gerichtete Menge d.h.  $U \preceq V$  für  $V \subseteq U$ ,  $U, V \in \mathcal{U}(x)$ . Das Netz  $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$  konvergiert dann gegen  $x$  aber wegen  $f(x_U) \notin V \forall U \in \mathcal{U}(x)$  konvergiert das Netz  $(f(x_U))_{U \in \mathcal{U}(x)}$  nicht gegen  $f(x)$ .  $\square$

Eine Abbildung  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  heißt **stetig**, wenn  $f$  für alle  $x \in X$  in  $x$  stetig ist.

**Satz 1.2.8.** Für eine Abbildung  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  sind äquivalent:

- i)  $f$  ist stetig
- ii) Für eine Subbasis  $\mathcal{S}'$  von  $\mathcal{T}'$  gilt  $f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$  für alle  $A' \in \mathcal{S}'$
- iii) Das Urbild  $\mathcal{T}'$ -offener Mengen ist  $\mathcal{T}$ -offen
- iv) Das Urbild  $\mathcal{T}'$ -abgeschlossener Mengen ist  $\mathcal{T}$ -abgeschlossen
- v) Für jede Teilmenge  $A$  von  $X$  gilt:  $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .

*Beweis.* i)  $\Rightarrow$  iii) Für  $O' \in \mathcal{T}'$  ist  $f^{-1}(O') \in \mathcal{T}$  zu zeigen. Sei  $x \in f^{-1}(O')$ . Da  $O'$  offen ist und  $f(x)$  enthält ist  $O'$  eine Umgebung von  $f(x)$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  in  $x$  ist damit  $f^{-1}(O')$  eine Umgebung von  $x$ , also ist  $x$  ein innerer Punkt von  $f^{-1}(O')$ .  $f^{-1}(O')$  besteht also aus inneren Punkten und ist demnach offen.

iii)  $\Rightarrow$  i) Ist  $U'$  Umgebung von  $f(x)$ , so gibt es eine offene Teilmenge  $O'$  von  $f(x)$  mit  $f(x) \in O' \subseteq U'$ . Es folgt  $x \in f^{-1}(O') \subseteq f^{-1}(U')$ .  $f^{-1}(O')$  ist das Urbild einer offenen Menge, also nach Voraussetzung offen, damit ist  $f^{-1}(O')$  und jede Obermenge von  $f^{-1}(O')$  Umgebung aller in dieser Menge enthaltenen Punkte, insbes. eine Umgebung von  $x$ .

iii)  $\Rightarrow$  ii) ist klar, da  $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{T}'$  gilt.

ii)  $\Rightarrow$  iii) Wegen  $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$  ist das Urbild von endlichen Durchschnitten von Mengen aus  $\mathcal{S}'$  ebenfalls in  $\mathcal{T}$ . Diese endlichen Durchschnitte von Elementen der Subbasis bilden die von  $\mathcal{S}'$  erzeugte Basis  $\mathcal{B}'$ . Wegen der Verträglichkeit der Urbildbildung mit der Bildung von Vereinigungen:  $f^{-1}(\cup_i A'_i) = \cup_i f^{-1}(A'_i)$  folgt, dass auch die beliebige Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}'$  ein Urbild in  $\mathcal{T}$  hat. Diese Vereinigungen Erzeugen aber  $\mathcal{T}'$ .

iii)  $\Leftrightarrow$  iv) Sieht man unmittelbar wegen  $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ .

iv)  $\Rightarrow$  v)  $f^{-1}(\overline{f(A)})$  ist nach Voraussetzung abgeschlossen. Diese Menge enthält offensichtlich  $A$  und ist damit eine abgeschlossene Obermenge der kleinsten abgeschlossenen Obermenge  $\bar{A}$  von  $A$ . Es folgt  $f(\bar{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)}$ .

v)  $\Rightarrow$  iv) Es gilt für eine Teilmenge  $A'$  von  $X'$  nach Voraussetzung:

$$f(\overline{f^{-1}(A')}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(A'))} \subseteq \bar{A}'.$$

Ist  $A'$  abgeschlossen, also für  $A' = \bar{A}'$  folgt:

$$\overline{f^{-1}(A')} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(A')})) \subseteq f^{-1}(A').$$

Das Urbild  $f^{-1}(A')$  abgeschlossener Mengen  $A'$  ist also abgeschlossen.  $\square$

**Bemerkung:** In metrischen Räumen zeigt man die Äquivalenz von i) zu v) un-  
schwer über die Folgenstetigkeit. Auf nicht metrischen topologischen Räumen  
lässt sich dieser Beweis durch Verwendung von Filtern statt Folgen übertragen:

Ist  $f$  nicht stetig, so gibt es nach Satz 1.2.7 ein  $x \in X$  und einen gegen  $x$   
konvergenten Filter  $\mathcal{F}$  in  $X$ , für den  $f(\mathcal{F})$  nicht Filterbasis eines gegen  $f(x)$   
konvergenten Filters ist. Das heißt es gibt eine offene Umgebung  $V$  von  $f(x)$ ,  
die keine Menge  $f(F)$  für ein  $F \in \mathcal{F}$  enthält. Dann ist aber  $f(F) \cap V^c$  für alle  
 $f \in F$  nichtleer und  $f^{-1}(V^c) \cap \mathcal{F}$  ist Filterbasis eines Filters, der feiner als  $\mathcal{F}$  ist  
und damit ebenfalls gegen  $x$  konvergiert. Somit gilt für  $A := f^{-1}(V^c)$ :  $x \in \bar{A}$  aber  
 $f(x) \notin V^c = \overline{V^c} \supset \overline{f(f^{-1}(V^c))} = \overline{f(A)}$ , also  $f(\bar{A}) \not\subseteq \overline{f(A)}$ .

Ist  $f$  stetig und  $A \subset X$  mit  $x \in \bar{A}$ , so ist  $\mathcal{U}(x) \cap A$  Filterbasis eines Filters  $\mathcal{F}'$   
der feiner als  $\mathcal{U}(x)$  ist und damit ebenfalls gegen  $x$  konvergiert, womit wegen der  
Stetigkeit von  $f$  der von  $f(\mathcal{F}')$  erzeugte Filter gegen  $f(x)$  konvergiert. Da  $f(A)$   
in diesem Filter liegt, muss  $f(x) \in \overline{f(A)}$  gelten. Es folgt  $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .

**Proposition 1.2.9.** Die Zusammensetzung stetiger Funktionen ist stetig.

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.2.8 iii).  $\square$

**Proposition 1.2.10.** Ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger Funktionen eines topologi-  
schen Raumes  $(X, \mathcal{T})$  in einen metrischen Raum  $(Y, d)$ , die gleichmäßig gegen  
eine Funktion  $f$  konvergiert, so ist  $f$  stetig.

*Beweis.* Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)).$$

Für  $\varepsilon > 0$  und hinreichend großes  $n$  gilt  $d(f(z), f_n(z)) < \varepsilon/3$  für  $z \in X$ . Wegen der  
Stetigkeit von  $f_n$  in  $x_0$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  mit  $d(f_n(x), f_n(x_0)) <$   
 $\varepsilon/3$  für alle  $x \in U$ . Damit folgt  $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  für  $x \in U$ , also die Stetigkeit  
von  $f$  in  $x_0$ .  $\square$

### 1.3 Initiale und finale Topologien

Sei  $X$  eine Menge und  $f_i, i \in I$  eine Familie von Abbildungen von  $X$  in topologische Räume  $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ . Die Menge aller Topologien auf  $X$  unter der alle  $f_i$  stetig sind ist nichtleer, da unter der diskreten Topologie  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  alle Abbildungen stetig sind. Man verifiziert unmittelbar, dass der beliebige Durchschnitt von Topologien auf  $X$  wieder eine Topologie ist. Der Durchschnitt aller Topologien auf  $X$  unter denen alle Abbildungen  $f_i$  stetig sind ist also die größte Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$  unter der alle Abbildungen  $f_i$  stetig von  $(X, \mathcal{T})$  nach  $(Y_i, \mathcal{T}_i)$  sind. Diese Topologie heißt **initiale Topologie**.

Die Abbildungen  $f_i$  sind genau dann stetig von  $(X, \mathcal{T})$  nach  $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ , wenn für alle  $i$   $f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}$  gilt. Die initiale Topologie ist demnach genau die von der Subbasis  $\{f_i^{-1}(O) : i \in I, O \in \mathcal{T}_i\}$  erzeugte Topologie.

Für die Überprüfung der Stetigkeit einer Abbildung  $f$  eines topologischen Raumes in einen Raum versehen mit einer Initialtopologie ist folgendes Kriterium eine wesentliche Vereinfachung:

**Proposition 1.3.1.** *Eine Abbildung  $f$  eines topologischen Raumes  $(Z, \mathcal{T}')$  in einen mit der durch die Abbildungen  $f_i : X \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)$  induzierten Initialtopologie versehenen Raum  $X$  ist genau dann stetig, wenn alle Abbildungen  $f_i \circ f$  stetig von  $(Z, \mathcal{T}')$  nach  $(Y_i, \mathcal{T}_i)$  sind.*

*Beweis.* Ist  $f$  stetig, so sind auch die Zusammensetzungen  $f_i \circ f$  stetiger Funktionen nach Proposition 1.2.9 stetig. Die Stetigkeit von  $f_i \circ f$  ist also notwendig für die Stetigkeit von  $f$ .

Sind alle Abbildungen  $f_i \circ f$  stetig und ist  $O$  eine offene Menge in  $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ , so sind die Urbilder  $f_i^{-1}(O)$  für  $O \in \mathcal{T}_i$  offen in  $(Z, \mathcal{T}')$ . Da die Mengen  $f_i^{-1}(O), i \in I, O \in \mathcal{T}_i$  eine Subbasis der Initialtopologie bilden folgt mit Satz 1.2.8, dass  $f$  stetig ist. □

**Proposition 1.3.2.** *Die durch die Familie  $f_i : X \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)$  von Abbildungen auf  $X$  erzeugte Initialtopologie stimmt, falls die Topologien  $\mathcal{T}_i$  auf den Räumen  $Y_i$  durch die Abbildungen  $g_{i,j} : Y_i \rightarrow Z_{i,j}$  erzeugten Initialtopologien sind mit der auf  $X$  durch die Abbildungen  $X \rightarrow Z_{i,j} : g_{i,j} \circ f_i$  überein.*

*Beweis.* Die durch die Abbildungen  $f_i$  erzeugte Initialtopologie auf  $X$  wird durch die Subbasis  $\{f_i^{-1}(O) : O \in \mathcal{T}_i, i \in I\}$  erzeugt. Da Umkehrabbildungen mit der Durchschnitts- und Vereinigungsbildung verträglich sind wird die Initialtopologie auch durch die Subbasis  $\{f_i^{-1}(O) : O \in \mathcal{S}_i, i \in I\}$  erzeugt, wenn  $\mathcal{S}_i$  eine Subbasis von  $\mathcal{T}_i$  ist. Auf  $\mathcal{T}_i$  bilden aber die Mengen  $\{g_{i,j}^{-1}(O) : O \in \mathcal{T}_{i,j}\}$  eine Subbasis der Initialtopologie, also sind die Mengen  $f_i^{-1} \circ g_{i,j}^{-1}(O) : O \in \mathcal{T}_{i,j}$  eine Subbasis der Initialtopologie auf  $X$  bez. der Abbildungen  $f_i$ . Diese Mengen sind



offensichtlich zugleich die Subbasis der durch die Abbildungen  $g_{i,j} \circ f_i$  erzeugten Initialtopologie, also stimmen die beiden Initialtopologie überein.  $\square$

Wichtige Beispiele für Initialtopologien sind:

*Beispiel 1.3.3.* Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$ . Dann ist die durch die kanonische Einbettungsabbildung  $\iota : Y \rightarrow X$  induzierte Initialtopologie die **Spurtopologie** oder Relativtopologie auf  $Y$ . Da diese Initialtopologie von einer einzigen Abbildung induziert wird und die Urbildbildung  $\iota^{-1}$  verträglich mit der Bildung von Vereinigungen und Durchschnitten sind, ist die Subbasis  $\iota^{-1}(O)$ ,  $O$  offen in  $\mathcal{T}$  bereits eine Topologie. Es gilt also: Eine Teilmenge  $A$  von  $Y$  ist genau dann offen in der Spurtopologie, wenn es eine in  $X$  offene Menge  $O$  mit  $A = \iota^{-1}(O) = O \cap Y$  gibt.

*Beispiel 1.3.4.* Ist  $I$  eine Indexmenge und seien für  $i \in I$  Mengen  $X_i$  gegeben. Dann nennt man die Menge der Abbildungen  $x : I \rightarrow \cup_{i \in I} X_i$ , die  $x(i) \in X_i$  erfüllen den **Produkttraum**  $\prod_{i \in I} X_i$ . Für  $x(i)$  schreiben wir  $x_i$  und für  $i \in I$  heißt die Abbildung  $pr_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ ,  $x \mapsto x_i$   $i$ -te **kanonische Projektion**. Sind  $(X_i, \mathcal{T}_i)$  topologische Räume, so ist die **Produkttopologie** die durch die kanonischen Projektionen  $pr_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$  induzierte Initialtopologie auf  $\prod X_i$ . Eine Subbasis der Produkttopologie besteht also aus den Mengen  $pr_i^{-1}(O)$ ,  $i \in I$ ,  $O \in \mathcal{T}_i$ , eine Basis der Produkttopologie aus den Mengen  $\cap_{i \in \mathcal{E}} pr_i^{-1}(O_i)$ , wobei  $\mathcal{E}$  eine endliche Teilmenge von  $I$  ist, und  $O_i \in \mathcal{T}_i$  für  $i \in \mathcal{E}$  gilt. Diese Mengen sind genau die Mengen  $\prod_{i \in I} O_i$ , mit  $O_i \in \mathcal{T}_i \forall i \in I$  und  $O_i = X_i$  für alle  $i \in I \setminus \mathcal{E}$ , mit  $\mathcal{E} \subseteq I$ ,  $\mathcal{E}$  endlich.

Sind insbesondere alle Mengen  $X_i$  gleich einem topologischen Raum  $X$ , so ist der Produkttraum mit der Produkttopologie der Raum aller Funktionen von  $I$  nach  $X$  versehen mit der **Topologie der punktweisen Konvergenz**. Wir schreiben dann  $X^I$  für  $\prod_{i \in I} X$ . In dieser Topologie konvergiert eine Folge  $(f_n)_n$  von Funktionen  $f_n : I \rightarrow X$  genau dann wenn die Folge  $(f_n(i))_n$  für alle  $i \in I$  konvergiert.

*Beispiel 1.3.5.* Eine Gruppe  $(G, \cdot, e)$  heißt **topologische Gruppe**, wenn die Abbildungen

- i)  $\varphi_1 : G \times G \rightarrow G$ ,  $(x, y) \mapsto xy$ , wobei  $G \times G$  mit der Produkttopologie versehen ist
- ii)  $\varphi_2 : G \rightarrow G$ ,  $y \mapsto y^{-1}$

stetig sind. Wir behaupten i) und ii) sind äquivalent zu der Forderung

- iii)  $\varphi_3 : G \times G \rightarrow G$ ,  $(x, y) \mapsto xy^{-1}$  ist stetig.

Die Äquivalenz dieser Aussagen lässt sich direkt, d.h. ohne Proposition 1.3.1 zeigen, der Beweis ist dann aber wesentlich unübersichtlicher.

Es gelte i) und ii).  $\varphi_3$  kann als Zusammensetzung der Abbildungen  $(x, y) \mapsto (x, y^{-1}) \mapsto xy^{-1}$  dargestellt werden.  $\varphi_3$  ist also nach Proposition 1.2.9 stetig, wenn die Abbildungen  $(x, y) \mapsto (x, y^{-1})$  und  $(x, z) \mapsto xz$  stetig sind. Die Stetigkeit der zweiten Abbildung ist gerade i). Die Abbildung  $\zeta: (x, y) \rightarrow (x, y^{-1})$  ist nach Proposition 1.3.1 genau dann stetig, wenn  $\text{pr}_1 \circ \zeta$  und  $\text{pr}_2 \circ \zeta$  stetig sind.  $\text{pr}_1 \circ \zeta$  ist aber  $\text{pr}_1$  und damit stetig auf dem Produktraum  $G \times G$  (die Produkttopologie ist ja gerade die größte Topologie unter der alle Projektionen stetig sind).  $\text{pr}_2 \circ \zeta$  ist die Abbildung  $(x, y) \mapsto y^{-1}$ . Diese ist  $\varphi_2 \circ \text{pr}_2$ , und somit als Zusammensetzung der stetigen Abbildungen  $\text{pr}_2$  und  $\varphi_2$  stetig. Also folgt aus i) und ii) die Aussage iii).

Gilt iii), so schreiben wir  $\varphi_2 = \varphi_3 \circ \psi$  mit  $\Psi: G \rightarrow G \times G$ ,  $\psi(y) = (e, y)$ .  $\varphi_3$  ist nach Voraussetzung stetig, die Stetigkeit von  $\psi$  folgt mit Proposition 1.3.1 aus der von  $\text{pr}_1 \circ \psi: x \mapsto e$  und der von  $\text{pr}_2 \circ \psi: y \mapsto y$ , denn konstante Abbildungen und die Identität sind in jedem topologischen Raum stetig. Aus iii) folgt also ii).

$\varphi_1 = \varphi_3 \circ \theta$  mit  $\theta: G \times G \rightarrow G \times G$ ,  $(x, y) \mapsto (x, y^{-1})$ . Hier folgt die Stetigkeit von  $\theta$  aus Proposition 1.3.1 wegen der Stetigkeit von  $\text{pr}_1 \circ \theta = \text{pr}_1$  und  $\text{pr}_2 \circ \theta = \varphi_2 \circ \text{pr}_2$ . Aus iii) folgt also ii) und aus iii) und ii) folgt i), also impliziert iii) die Aussagen i) und ii).

Sind  $f_i$ ,  $i \in I$  Abbildungen von topologischen Räumen  $(Y_i, \mathcal{T}_i)$  in eine Menge  $X$ , so kann eine Menge  $O$  nur dann in einer Topologie auf  $X$  liegen bezüglich der die Abbildung  $f_i$  stetig ist, wenn  $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$  für alle  $i$  gilt. Wegen der Verträglichkeit der Bildung des Urbildes mit der Bildung von Vereinigungen oder Durchschnitten:

$$f^{-1}(\cap_j A_j) = \cap_j f^{-1}(A_j) \quad \text{und} \quad f^{-1}(\cup_j A_j) = \cup_j f^{-1}(A_j)$$

ist für  $i \in I$  die Teilmenge  $\mathcal{T}'_i := \{O \subset X : f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i\}$  von  $\mathcal{P}(X)$  eine Topologie auf  $X$ , und damit die feinste Topologie auf  $X$  für die die Abbildung  $f_i$  stetig ist. Der Durchschnitt von Topologien auf einem Raum  $X$  ist, wie man unmittelbar verifiziert, immer eine Topologie auf  $X$ . Der Durchschnitt der Topologien  $\cap_{i \in I} \mathcal{T}'_i$  ist dann die feinste Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$  für die alle Abbildungen  $f_i: (Y_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  stetig sind. Diese Topologie heißt **finale Topologie**. Eine Teilmenge  $O$  von  $X$  ist demnach genau dann offen in  $X$  bezüglich der Finaltopologie, wenn  $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$  für alle  $i \in I$  gilt.

Es gilt in Analogie zu Satz 1.3.1:

**Proposition 1.3.6.** *Eine Abbildung  $f$  von einem mit der durch Abbildungen  $f_i: (Y_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow X$  induzierten Finaltopologie versehenen Raum  $X$  in einen topologischen Raum  $(Z, \mathcal{T}')$  ist genau dann stetig, wenn alle Abbildungen  $f \circ f_i$  stetig von  $(Y_i, \mathcal{T}_i)$  nach  $(Z, \mathcal{T}')$  sind.*

*Beweis.* Ist  $f$  stetig, so auch  $f \circ f_i$  als Zusammensetzung stetiger Abbildungen.

Ist  $f \circ f_i$  für alle  $i \in I$  stetig und  $O \in \mathcal{T}'$ , so gilt für die Teilmenge  $f^{-1}(O)$  von  $X$ :  $f_i^{-1}(f^{-1}(O)) \in \mathcal{T}_i$ . Damit ist  $f^{-1}(O)$  aber nach unserer Konstruktion der Finaltopologie offen in der Finaltopologie, womit das Urbild von Mengen in  $\mathcal{T}'$  unter  $f^{-1}$  offen in der Finaltopologie ist, was aber bedeutet dass  $f$  stetig ist.  $\square$

*Beispiel 1.3.7.* Ist  $(Y, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $Y$ . Dann ist die **Quotiententopologie** auf  $Y/R$  die durch die kanonische Abbildung  $y \rightarrow [y]$  von  $Y$  auf die Menge  $Y/R$  der Äquivalenzklassen induzierte Finaltopologie. Eine Teilmenge  $U$  von  $Y/R$  ist also genau dann offen in der Quotiententopologie wenn die Vereinigung ihrer Elemente – aufgefasst als Teilmengen von  $Y$  – offen in  $Y$  ist.

## 1.4 Kompakte Mengen

Eine Teilmenge  $K$  eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{T})$  heißt **kompakt**, wenn es für jede Überdeckung von  $K$  durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung gibt, d.h. wenn jede „offene Überdeckung“ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Kommt diese Eigenschaft der Menge  $X$  zu, so nennen wir den topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$  kompakt.<sup>1</sup> Eine Teilmenge von  $X$  heißt **relativ kompakt**, wenn ihr Abschluss kompakt ist.

**Proposition 1.4.1.** *Eine Teilmenge  $K$  eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{T})$  ist genau dann kompakt, wenn sie versehen mit der Spurtopologie ein kompakter Raum ist.*

*Beweis.* In der Spurtopologie auf  $K$  sind genau die Schnitte von Mengen aus  $\mathcal{T}$  mit  $K$  offen. Jeder offenen Überdeckung von  $K$  in  $(X, \mathcal{T})$  entspricht also eine Überdeckung von  $K$  durch Teilmengen von  $K$  die offen in der Spurtopologie sind. Umgekehrt geht jede in der Spurtopologie offene Überdeckung von  $K$  durch Schnitte einer  $\mathcal{T}$ -offenen Überdeckung mit  $K$  hervor. Die Forderung dass eine in der Spurtopologie offene Überdeckung immer eine endliche Teilüberdeckung enthält ist also äquivalent zur Forderung, dass jede Überdeckung durch Mengen aus  $\mathcal{T}$  immer eine endliche Teilüberdeckung enthält.  $\square$

Ein Punkt  $x$  eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{T})$  heißt **Berührungspunkt** (auch **Häufungspunkt**) eines Filters  $\mathcal{F}$  auf  $X$ , wenn jede Umgebung von  $x$  mit jeder Menge des Filters  $\mathcal{F}$  nichtleeren Durchschnitt hat.

<sup>1</sup>Gelegentlich fordert man für Kompaktheit, dass  $X$  ein Hausdorffraum ist und spricht wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt aber der Raum nicht notwendigerweise ein Hausdorffraum ist von **quasikompakten Räumen**.

Eine Teilmenge  $\mathcal{S}$  von  $\mathcal{P}(X)$  hat die **endliche Durchschnittseigenschaft**<sup>2</sup>, wenn alle endlichen Durchschnitte von Mengen aus  $\mathcal{S}$  nichtleer sind.

**Satz 1.4.2.** *Für einen topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$  sind äquivalent:*

- i)  $(X, \mathcal{T})$  ist kompakt;
- ii) Für jede Familie  $(A_i)_{i \in I}$  abgeschlossener Teilmengen von  $X$  mit der endlichen Durchschnittseigenschaft gilt  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ ;
- iii) Jeder Filter in  $X$  hat einen Berührungspunkt in  $X$ ;
- iv) Jeder Ultrafilter in  $X$  ist konvergent;
- v) Jedes Netz in  $X$  hat ein gegen ein Element von  $X$  konvergentes Teilnetz.

*Beweis.* i)  $\Leftrightarrow$  ii): Geht man von der Definition kompakter Mengen durch Komplementbildung zur dualen Aussage über, so erhält man: In jeder Familie abgeschlossener Teilmengen von  $X$  mit leerem Durchschnitt gibt es endlich viele Elemente die bereits leeren Durchschnitt haben. Diese Aussage ist offenbar äquivalent zu ii).

ii)  $\Rightarrow$  iii): Ist  $\mathcal{F}$  ein Filter ohne Berührungspunkt, so gibt es zu jedem  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  und ein  $F_x \in \mathcal{F}$  mit  $U_x \cap F_x = \emptyset \Leftrightarrow U_x^c \supseteq F_x$ . Es folgt  $\bigcap_{i \leq n} U_{x_i}^c \supseteq \bigcap_{i \leq n} F_{x_i} \neq \emptyset$ .  $(U_x^c)_{x \in X}$  ist also ein System abgeschlossener Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Aber  $\bigcap_{x \in X} U_x^c = \emptyset$ , wegen  $x \notin U_x^c$ . Aus  $\neg$ iii) folgt also  $\neg$ ii).

iii)  $\Rightarrow$  iv): Sei  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter und  $x$  ein Berührungspunkt von  $\mathcal{F}$ . Da  $F \cap U \neq \emptyset$  für jede Umgebung  $U$  von  $x$  und  $F \in \mathcal{F}$  gilt, folgt dass die Mengen  $U \cap F$ ,  $F \in \mathcal{F}$  eine Filterbasis bilden. Der von dieser Filterbasis erzeugte Filter enthält zu jeder Menge  $F \in \mathcal{F}$  die Teilmenge  $F \cap U$  und damit  $F$ . Wegen der Maximalität von  $\mathcal{F}$  kann der von dieser Filterbasis erzeugte Filter nicht echt feiner als  $\mathcal{F}$  sein, woraus folgt  $U \in \mathcal{F}$  für alle Umgebungen  $U$  von  $x$ , d.h.  $\mathcal{F}$  konvergiert gegen  $x$ .

iv)  $\Rightarrow$  v): Für ein Netz  $(x_i)_{i \in I}$  betrachten wir den Abschnittsfilter, der nach Satz 1.2.2 zu einem Ultrafilter  $\mathcal{F}$  verfeinert werden kann. Nach Voraussetzung konvergiert  $\mathcal{F}$  gegen ein  $x \in X$ . Da  $\mathcal{F}$  insbesondere alle Elemente  $F_i = \{x_j : i \preceq j\}$  des Abschnittsfilters des Netzes  $(x_i)_{i \in I}$  enthält, ist für  $F \in \mathcal{F}$  und  $i \in I$  die Menge  $F \cap F_i$  als Schnitt zweier Mengen des Ultrafilters  $\mathcal{F}$  nichtleer und es gibt für  $F \in \mathcal{F}$  ein  $i \in I$  mit  $x_i \in F$ . Wir können also eine Funktion  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow I$  definieren, für die  $x_{\varphi(F)} \in F$  gilt.  $\mathcal{F}$  ist durch umgekehrte Mengeninklusion eine gerichtete Menge ( $F \subseteq G \Leftrightarrow G \preceq_{\mathcal{F}} F$ ). Die Abbildung  $\varphi$  erfüllt  $F_{i_0} \preceq_{\mathcal{F}} F \Rightarrow$

<sup>2</sup>Häufig versteht man darunter die Eigenschaft, dass aus  $\bigcap_{i \in E} A_i \neq \emptyset$  für endliche Teilmengen  $E$  von  $I$  folgt  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$

$\varphi(F) \in F_{i_0} \Rightarrow i_0 \preceq \varphi(F)$ , wodurch  $(x_{\varphi(F)})_{F \in \mathcal{F}}$  zu einem Teilnetz von  $(x_i)_{i \in I}$  wird. Dieses konvergiert wegen  $x_{\varphi(F)} \in F$  und der Konvergenz von  $\mathcal{F}$  gegen  $x$  auch gegen  $x$ .

v)  $\Rightarrow$  ii): Für eine Familie  $(A_i)_{i \in I}$  von abgeschlossenen Teilmengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft betrachten wir die durch Mengeninklusion gerichtete Menge  $\mathcal{E}$  aller endlichen Teilmengen von  $I$ . Für  $E \in \mathcal{E}$  sei  $x_E \in \bigcap_{i \in E} A_i$  gewählt. Dann ist  $(x_E)_{E \in \mathcal{E}}$  ein Netz in  $X$ .

Für jedes Netz  $(x_j)_{j \in J}$  in  $X$  das gegen ein  $x_0 \in A_i^{\complement}$ ,  $i \in I$  konvergiert gibt es ein  $j_0 \in J$  mit  $x_j \in A_i^{\complement}$  für  $j_0 \preceq j$ . Wegen  $x_E \in A_i$  für  $\{i\} \preceq E$  kann daher kein Teilnetz von  $(x_E)_{E \in \mathcal{E}}$  gegen ein  $x_0 \in A_i^{\complement}$  konvergieren. Hat jedes Netz in  $X$  ein konvergentes Teilnetz, so gibt es ein konvergentes Teilnetz von  $(x_E)_{E \in \mathcal{E}}$  das demnach gegen ein  $x_0 \in \bigcap_{i \in I} A_i$  konvergieren muss, woraus  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$  folgt.  $\square$

**Satz 1.4.3.** *Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist kompakt.*

*Beweis.* Sei  $f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$  eine Überdeckung des Bildes der kompakten Menge  $K$  unter der stetigen Abbildung  $f$  durch offene Mengen. Dann bilden die Mengen  $f^{-1}(O_i)$  wegen der Stetigkeit von  $f$  eine offene Überdeckung von  $K$ , die nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung  $(f^{-1}(O_{i_l}))_{l=1, \dots, L}$  besitzt. Es folgt

$$f(K) \subseteq f(\bigcup_{l=1}^L f^{-1}(O_{i_l})) = \bigcup_{l=1}^L f(f^{-1}(O_{i_l})) \subseteq \bigcup_{l=1}^L O_{i_l}. \quad \square$$

**Satz 1.4.4.** *Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt. Eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes ist abgeschlossen.*

*Beweis.* Ist  $A$  abgeschlossene Teilmenge von  $(K, \mathcal{T})$ ,  $K$  kompakt und  $\{O_i : i \in I\}$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Dann ist  $\{O_i : i \in I\} \cup \{A^{\complement}\}$  eine offene Überdeckung von  $K$ , die eine endliche Teilüberdeckung hat. Diese Mengen ohne der Menge  $A^{\complement}$  sind dann eine endliche Teilüberdeckung von  $K \setminus A^{\complement} = A$ .

Sei  $x \notin K$ ,  $K$  eine kompakte Teilmenge des Hausdorffraumes  $X$ . Dann gibt es für alle  $y \in K$  disjunkte offene Umgebungen  $U_y$  von  $x$  und  $V_y$  von  $y$ . Da  $K$  kompakt ist wird  $K$  von endlich vielen Mengen  $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$  überdeckt. Dann ist  $\bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$  eine Umgebung von  $x$ , die disjunkt zu  $\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$  und damit auch disjunkt zur Teilmenge  $K$  ist.  $x$  liegt also im Inneren des Komplementes von  $K$ , somit ist  $K^{\complement}$  offen und  $K = \bar{K}$ .  $\square$

Aus der Definition kompakter Mengen bzw. aus Proposition 1.4.4 folgt unmittelbar:

**Proposition 1.4.5.** *Die endliche Vereinigung kompakter Teilmengen eines topologischen Raumes ist kompakt. Der beliebige Durchschnitt kompakter Teilmengen eines Hausdorffraumes ist kompakt.*

Eine stetige bijektive Abbildung  $f$  zwischen topologischen Räumen, für die auch  $f^{-1}$  stetig ist, heißt **Homöomorphismus**.

**Satz 1.4.6.** *Jede stetige Bijektion eines kompakten Raumes auf einen Hausdorffraum ist ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Sei  $f$  die stetige Bijektion. Da nach Proposition 1.4.4 abgeschlossene Teilmengen eines kompakten Raumes kompakt sind, und das stetige Bild kompakter Mengen nach Proposition 1.4.3 kompakt sind, ist  $f(A)$  für abgeschlossene Teilmengen  $A$  kompakt und nach Proposition 1.4.4 auch abgeschlossen.  $f$  bildet also abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab, womit die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  nach Proposition 1.2.8 stetig ist.  $\square$

**Korollar 1.4.7.** *Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein kompakter Hausdorffraum, so ist  $(X, \mathcal{T}')$  für jede Topologie  $\mathcal{T}'$ , die echt feiner als  $\mathcal{T}$  ist, nicht kompakt und für jede Topologie  $\mathcal{T}'$ , die echt gröber als  $\mathcal{T}$  ist keine Hausdorfftopologie.*

*Beweis.* Im ersten Fall ist die Identität als Abbildung von  $(X, \mathcal{T}')$  nach  $(X, \mathcal{T})$  stetig, hat aber keine stetige Umkehrabbildung. Damit muss eine der Voraussetzungen von Satz 1.4.6 verletzt sein, d.h.  $(X, \mathcal{T}')$  ist nicht kompakt.

Analog schließt man, dass die Identität als Abbildung von  $(X, \mathcal{T})$  nach  $(X, \mathcal{T}')$  für  $\mathcal{T}'$  echt gröber als  $\mathcal{T}$  stetig ohne stetige Umkehrabbildung ist und  $(X, \mathcal{T}')$  kein Hausdorffraum sein kann.  $\square$

Satz 1.4.6 und Proposition 1.3.6 ermöglichen uns zu zeigen, dass der Quotientenraum  $\mathbb{R}^s/\mathbb{Z}^s$  mit dem  $s$ -dimensionalen Torus  $\{(z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{C}^s : |z_i| = 1\}$  identifiziert werden kann.

**Proposition 1.4.8.** *Die Abbildung*

$$\phi : \mathbb{R}^s/\mathbb{Z}^s \rightarrow \mathbb{T}^s, \mathbf{x} + \mathbb{Z}^s \mapsto (\exp(2\pi i x_1), \dots, \exp(2\pi i x_s))$$

*ist wohldefiniert und ein Homöomorphismus von  $\mathbb{R}^s/\mathbb{Z}^s$  versehen mit der Quotiententopologie auf  $\mathbb{T}^s$  versehen mit der Spurtopologie von  $\mathbb{C}^s$ .*

*Beweis.* Wegen der 1-Periodizität der Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $x \mapsto \exp(2\pi i x)$  ist  $\phi$  wohldefiniert, d.h. von der Wahl des Repräsentanten aus  $\mathbb{R}^s/\mathbb{Z}^s$  unabhängig. Die Quotientenabbildung  $q : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s/\mathbb{Z}^s$  eingeschränkt auf  $[0, 1]^s$  ist surjektiv. Damit ist  $\mathbb{R}^s/\mathbb{Z}^s$  als Bild der kompakten Menge  $[0, 1]^s$  unter der stetigen Abbildung  $q$  nach Satz 1.4.3 kompakt.

Da die Abbildung  $\phi \circ q : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{T}^s$ ,  $\mathbf{x} \mapsto (\exp(2\pi i x_1), \dots, \exp(2\pi i x_s))$  stetig ist, ist  $\phi$  wegen Proposition 1.3.6 stetig.  $\phi$  ist bijektiv und als stetige Bijektion kompakter Mengen nach Satz 1.4.6 ein Homöomorphismus.  $\square$

Ist das Produkt  $\prod_{i \in I} X_i$  topologischer Räume  $(X_i, \mathcal{T}_i)$  kompakt unter der Produkttopologie, so sind alle Räume  $(X_i, \mathcal{T}_i)$  kompakt als Bilder des kompakten Produktraumes unter den stetigen Projektionsabbildungen. Es gilt aber auch die Umkehrung dieser Aussage:

**Satz 1.4.9** (Tichonow). *Sind  $(X_i, \mathcal{T}_i)$  für  $i \in I$  kompakte Räume so ist  $X := \prod_{i \in I} X_i$  mit der Produkttopologie kompakt.*

*Beweis.* Wegen Satz 1.4.2 genügt es zu zeigen, dass jeder Ultrafilter  $\mathcal{F}$  in  $X$  konvergiert.  $\text{pr}_i(\mathcal{F}) := \{\text{pr}_i(F) : F \in \mathcal{F}\}$  ist wegen  $\text{pr}_i(A) \cap \text{pr}_i(B) \supseteq \text{pr}_i(A \cap B)$  Filterbasis eines Filters  $\mathcal{F}_i$  in  $X_i$ . Nach Lemma 1.2.3 enthält für  $i \in I$  und  $A_i \subseteq X_i$  der Ultrafilter  $\mathcal{F}$  entweder die Menge  $\text{pr}_i^{-1}(A_i)$  oder  $\text{pr}_i^{-1}(A_i^c) = (\text{pr}_i^{-1}(A_i))^c$ . Im ersten Fall gilt  $A_i \in \text{pr}_i(\mathcal{F})$  im zweiten  $A_i^c \in \text{pr}_i(\mathcal{F})$ .  $\text{pr}_i(\mathcal{F})$  ist also nicht nur eine Filterbasis sondern ein Filter, der nach Lemma 1.2.3 ein Ultrafilter auf  $X_i$  ist, der nach Satz 1.4.2 gegen ein  $x_i \in X_i$  konvergiert. Sei  $x_0$  jenes Element in  $X$  für das  $\text{pr}_i(x_0) = x_i \forall i \in I$  gilt.

Nach der Definition der Produkttopologie bilden die endlichen Durchschnitte  $\bigcap_{i \in E} \text{pr}_i^{-1}(U_i)$ ,  $|E| < \infty$  für  $U_i$  Umgebung von  $x_i$  in  $X_i$  eine Umgebungsbasis von  $x_0$  in  $X$ . Wegen der Konvergenz von  $\mathcal{F}_i$  gegen  $x_i$  gibt es  $F_i \subseteq U_i(x_i)$  mit  $\text{pr}_i^{-1}(F_i) \in \mathcal{F}$ . Es folgt  $\bigcap_{i \in E} \text{pr}_i^{-1}(F_i) \subseteq \bigcap_{i \in E} \text{pr}_i^{-1}(U_i)(x_0)$ . Da die endlichen Durchschnitte  $\bigcap_{i \in E} \text{pr}_i^{-1}(F_i)$  wegen  $\text{pr}_i^{-1}(F_i) \in \mathcal{F}$  auch in  $\mathcal{F}$  liegen ist  $\mathcal{F}$  feiner als der Umgebungsfilter von  $x_0$ , womit  $\mathcal{F}$  gegen  $x_0$  konvergiert.  $\square$

Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heißt **totalbeschränkt** oder **prä-kompakt**, wenn sie für alle  $\varepsilon > 0$  eine Überdeckung durch endlich viele  $\varepsilon$ -Kugeln ermöglicht.

**Lemma 1.4.10.** *Ist  $A$  eine totalbeschränkte Teilmenge eines metrischen Raumes und  $B \subseteq A$ . Dann sind  $\bar{A}$  und  $B$  totalbeschränkt.*

*Beweis.* Da für  $A \supset B$  und eine  $\varepsilon$ -Überdeckung  $(B(x_i, \varepsilon))_{i \leq N}$  mit  $x_i \in A$  für jede Wahl von  $y_i \in B(x_i, \varepsilon) \cap B$  für  $B(x_i, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$   $(B(y_i, 2\varepsilon))_i$  eine  $2\varepsilon$ -Überdeckung von  $B$  ist sieht man, dass Teilmengen totalbeschränkter Mengen totalbeschränkt sind.

Für eine  $\varepsilon$ -Überdeckung  $(B(x_i, \varepsilon))_{i \leq N}$  von  $A$ , ist  $(B(x_i, 2\varepsilon))_{i \leq N}$  eine Überdeckung von  $\bar{A}$ , da für  $x \in \bar{A}$  in jeder  $\eta$ -Umgebung  $B(x, \eta)$  von  $x$  ein Element  $y \in A$  liegt, woraus mit der Dreiecksungleichung folgt  $x \in B(x_i, 2\varepsilon)$  für ein  $i \leq N$ .  $\square$

Da im  $\mathbb{R}^n$  genau die beschränkten Mengen totalbeschränkt sind ist der folgende Satz eine Verallgemeinerung des Satzes von Heine-Borel:

**Satz 1.4.11.** *In einem vollständigen metrischen Raum ist eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und totalbeschränkt ist.*

*Beweis.* Ist eine Menge kompakt, so ist sie klarerweise totalbeschränkt und nach Satz 1.4.4 abgeschlossen (auch in nicht vollständigen metrischen Räumen).

Da abgeschlossene Teilmengen eines vollständigen Raumes vollständig und Teilmengen einer totalbeschränkten Menge wegen Lemma 1.4.10 totalbeschränkt sind, genügt es wegen Proposition 1.4.2 zu zeigen, dass in einem totalbeschränkten vollständigen Raum jeder Ultrafilter konvergiert.

Sei also  $X$  vollständig und totalbeschränkt und  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter auf  $X$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  gibt es dann  $x_{1,n}, \dots, x_{N(n),n}$  mit  $\bigcup_{i=1}^{N(n)} B(x_{i,n}, 1/n) = X$ . Nach Lemma 1.2.3 gibt es dann ein  $i(n) \leq N(n)$  mit  $B(x_{i(n),n}, 1/n) \in \mathcal{F}$ . Da ein Filter durchschnitts-stabil ist und die leere Menge nicht enthält folgt  $B(x_{i(n),n}, 1/n) \cap B(x_{i(k),k}, 1/k) \neq \emptyset$ , also  $d(x_{i(n),n}, x_{i(k),k}) < 1/n + 1/k$ , womit  $(x_{i(n),n})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, die wegen der Vollständigkeit von  $X$  gegen ein  $x_0 \in X$  konvergiert. Es folgt  $d(x_{i(n),n}, x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{i(n),n}, x_{i(k),k}) \leq 1/n$  und  $B(x_0, 2/n) \supseteq B(x_{i(n),n}, 1/n) \in \mathcal{F}$ .  $(B(x_0, 2/n))_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Filterbasis des Umgebungsfilters von  $x_0$ , somit ist  $\mathcal{F}$  feiner als der Umgebungsfiler von  $x_0$  und  $\mathcal{F}$  konvergiert gegen  $x_0$ .  $\square$

In metrischen Räumen lassen sich kompakte Mengen durch die Existenz konvergenter Teilfolgen charakterisieren. Dies kann häufig für Existenzbeweise verwendet werden. Ein Punkt  $x_0$  eines topologischen Raumes heißt **Häufungspunkt** einer Folge, wenn in jeder Umgebung von  $x_0$  unendlich viele Folgeglieder liegen. Das ist offenbar genau dann der Fall wenn der zugehörige Abschnittsfiler der Folge - aufgefasst als Netz -  $x_0$  als Berührungspunkt hat.

**Satz 1.4.12.** *In einem metrischen Raum  $(X, d)$  und  $K \subseteq X$  sind äquivalent:*

- i)  $K$  ist kompakt
- ii) Jede Folge in  $K$  hat einen Häufungspunkt in  $K$
- iii) Jede Folge in  $K$  hat eine in  $K$  konvergente Teilfolge

*Beweis.* i)  $\Rightarrow$  ii): Die Mengen  $F_n := \{x_n : n \geq N\}$  bilden eine Filterbasis in  $X$ . Der von dieser Filterbasis erzeugte Filter hat nach Satz 1.4.2 einen Berührungspunkt. Da alle Folgenreste  $F_n$  in diesem Filter liegen ist ein Berührungspunkt dieses Filters ein Häufungspunkt der Folge.

ii)  $\Rightarrow$  iii): Ist  $x_0$  ein Häufungspunkt der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so kann für eine Nullfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  induktiv eine Teilfolge  $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  gewählt werden, die  $n_i < n_{i+1}$  und  $d(x_{n_i}, x_0) < a_i$  erfüllt. Diese Teilfolge konvergiert also gegen  $x_0$ .

iii)  $\Rightarrow$  i): Jede Cauchyfolge konvergiert gegen einen etwaigen Grenzwert einer ihrer Teilfolgen. Damit folgt aus iii) die Vollständigkeit von  $K$ . Wäre  $K$  nicht totalbeschränkt gäbe es zu einem  $\varepsilon > 0$  keine endliche Überdeckung durch  $\varepsilon$ -Kugeln, womit wir induktiv eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konstruieren können, die für alle  $n \neq m$   $d(x_n, x_m) > \varepsilon$  erfüllt, denn wenn  $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$  nicht ganz  $K$  überdeckt gibt



es  $x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ . Aus der Dreiecksungleichung folgt dann, dass für kein  $x_0 \in X$   $d(x_n, x_0) < \varepsilon/2$  und  $d(x_m, x_0) < \varepsilon/2$  für  $n \neq m$  gilt und  $(x_n)$  hätte keine konvergente Teilfolge.  $K$  ist also vollständig und totalbeschränkt, mit Satz 1.4.11 folgt, dass  $K$  kompakt ist.  $\square$

**Bemerkung:** In nichtmetrisierbaren Räumen kann eine Menge kompakt sein ohne irgendeine nichttriviale konvergente Folge zu besitzen. Aus i) folgt also im Allgemeinen nicht iii).

Der Begriff der **gleichmäßigen Stetigkeit** kann unmittelbar auf Funktionen auf metrischen Räumen übertragen werden: Eine Funktion  $f$  von einem metrischen Raum  $(X, d)$  in einen metrischen Raum  $(Y, d')$  heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es für  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodass  $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$  für alle  $x, y \in X$  mit  $d(x, y) < \delta$  gilt. Wie für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sieht man:

**Satz 1.4.13.** *Eine stetige Funktion  $f$  von einem kompakten metrischen Raum  $(K, d)$  in einen metrischen Raum  $(X, d')$  ist gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Wegen der Stetigkeit von  $f$  gibt es für  $\varepsilon > 0$  und  $x \in X$  ein  $\delta_x > 0$  mit  $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$  für  $d(x, y) < 2\delta_x$ . Sei  $K = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta_{x_i})$  eine endliche Überdeckung von  $K$ . Für  $\delta := \min\{\delta_{x_i} : i = 1, \dots, n\}$  und  $x, y \in K$  mit  $d(x, y) < \delta$  folgt:  $\exists i \leq n$  mit  $x \in B(x_i, \delta_i)$ . Aus der Dreiecksungleichung folgt  $y \in B(x_i, 2\delta_i)$  und damit

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_i)) + d'(f(x_i), f(y)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \square$$

## 1.5 Sätze v. Arzelà-Ascoli und Stone-Weierstraß

Wir geben in diesem Abschnitt Bedingungen an eine Teilmenge  $M$  von  $C(K)$ ,  $K$  kompakt, die garantieren, dass  $M$  in einem gewissen Sinn topologisch groß, d.h. dicht in  $C(K)$  oder topologisch klein d.h. totalbeschränkt in  $C(K)$  ist.  $C(K)$  ist dabei immer mit der von der Supremumsnorm induzierten Metrik versehen.

Der folgende Satz gibt ein relativ einfach zu überprüfendes Kriterium für die Totalbeschränktheit einer Teilmenge der stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum und ermöglicht mit Satz 1.4.11 den Nachweis, dass eine Menge relativ kompakt ist.

Eine Familie  $\Phi$  reell-oder komplexwertiger Funktionen auf einer Menge  $X$  heißt **punktweise beschränkt**, wenn für alle  $x \in X$  die Menge  $\{|f(x)| : f \in \Phi\}$  beschränkt ist. Eine Familie  $\Phi$  stetiger Funktionen auf einem topologischen Raum  $X$  heißt **gleichgradig stetig**, wenn es für alle  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung  $V$  von  $x$  gibt, sodass  $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$  für alle  $z \in V$  und  $f \in \Phi$  gilt. Ist eine

Funktionen  $f$  stetig, so gibt es offenbar eine Umgebung von  $x$ , die diese Bedingung erfüllt. Die gleichgradige Stetigkeit besagt dass diese Umgebung simultan für alle  $f \in \Phi$  gewählt werden kann.

**Satz 1.5.1** (Arzelà–Ascoli). *Auf einer kompakten Menge  $X$  ist eine Familie  $\Phi$  stetiger reell- oder komplexwertiger Funktionen genau dann totalbeschränkt in  $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ , wenn sie punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ist.*

*Beweis.* Ist  $\Phi$  totalbeschränkt, so sind die Funktionen aus  $\Phi$  gleichmäßig beschränkt und damit punktweise beschränkt. Wählt man für  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  Funktionen  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  aus  $\Phi$ , sodass  $B(g_i, \varepsilon/3)$  eine Überdeckung von  $\Phi$  bildet, und für jedes  $g_i$  eine Umgebung  $V_i$  von  $x$  für die  $|g_i(x) - g_i(z)| < \varepsilon/3$  für  $z \in V_i$  gilt, so folgt für  $f \in B(g_i, \varepsilon/3)$  und  $z \in V_i$ :

$$|f(x) - f(z)| < |f(x) - g_i(x)| + |g_i(x) - g_i(z)| + |g_i(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Wählt man  $V := \bigcap_{i=1}^n V_i$ , so gilt diese Abschätzung für  $z \in V$  und alle  $f \in \Phi$ , d.h.  $\Phi$  ist gleichgradig stetig.

Sei umgekehrt  $\Phi$  punktweise beschränkt und gleichgradig stetig. Für  $\varepsilon > 0$  sei  $V_{x_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$  eine Überdeckung von  $X$ , für die  $|f(x_i) - f(z)| < \varepsilon/3 \forall z \in V_{x_i}$  für  $i = 1, \dots, N$  und  $f \in \Phi$  gilt.

Sei  $\Phi(x) := \{f(x) : f \in \Phi\}$ , dann ist für jedes  $x \in K$   $\Phi(x)$  nach Voraussetzung beschränkt und  $\Phi(x)$  nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. Damit ist  $\prod_{i=1}^N \overline{\Phi(x_i)}$  nach dem Satz von Tichonow 1.4.9 kompakt. Die Menge  $P := \overline{\{\prod_{i=1}^N f(x_i) : f \in \Phi\}}$  ist als abgeschlossene Teilmenge der Menge  $\prod_{i=1}^N \overline{\Phi(x_i)}$  nach Satz 1.4.4 kompakt und wird von der Menge  $\cup_{f \in \Phi} \prod_{i=1}^N B(f(x_i), \varepsilon/3)$  überdeckt. Zu der offenen Überdeckung  $(\prod_{i=1}^N B(f(x_i), \varepsilon/3))_{f \in \Phi}$  von  $P$  gibt es demnach eine endliche Teilüberdeckung  $(\prod_{i=1}^N B(g_m(x_i), \varepsilon/3))_{1 \leq m \leq M}$ , das heißt für alle  $f \in \Phi$  gibt es ein  $m \leq M$  mit  $|f(x_i) - g_m(x_i)| \leq \varepsilon/3$  für alle  $i \leq N$ .

Es folgt für  $z \in V_{x_i}$  und  $f \in \Phi$ :

$$\begin{aligned} |f(z) - g_m(z)| &\leq |f(z) - f(x_i)| + |f(x_i) - g_m(x_i)| + |g_m(x_i) - g_m(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da die Mengen  $V_{x_i}$  eine Überdeckung von  $X$  bilden, folgt dass  $|f(z) - g_m(z)| \leq \varepsilon$  für alle  $z \in X$  gilt. Für jedes  $f \in \Phi$  gibt es also mindestens ein  $m \leq M$  mit  $\|g_m - f\|_\infty < \varepsilon$ , d.h. die  $\varepsilon$ -Kugeln um  $g_m$ ,  $m = 1, \dots, M$  bilden eine endliche Überdeckung von  $\Phi$ , womit  $\Phi$  totalbeschränkt ist.  $\square$

Beispiele für gleichgradig stetige Familien von Funktionen auf einem metrischen Raum  $X$  sind Hölder-stetige Funktionen, also Funktionen für die es Konstanten  $c, \gamma > 0$  mit  $|f(x) - f(y)| < c|x - y|^\gamma$  für  $x, y \in X$  gibt.

Auf dem  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -linearen Raum der reell oder komplexwertigen Funktionen auf einer Menge  $X$  wird durch punktweise Multiplikation ein Produkt erklärt, das bilinear und assoziativ ist. Lineare Räume von Funktionen, die abgeschlossen unter dieser Produktbildung sind bezeichnen wir als **Algebren von Funktionen**.

Da der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen auf einem metrischen Raum nach Proposition 1.2.10 stetig ist, ist  $C(X; \mathbb{R})$  bzw.  $C(X; \mathbb{C})$  versehen mit der Supremumsnorm  $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in X\}$  vollständig.

Eine Algebra von Funktionen  $\mathcal{A}$  heißt **punktetrennend**, wenn es für  $x \neq y$ ,  $x, y \in X$  ein  $f \in \mathcal{A}$  mit  $f(x) \neq f(y)$  gibt.

**Satz 1.5.2** (Stone–Weierstraß reell). *Ist  $\mathcal{A}$  eine Algebra stetiger reeller Funktionen auf einem kompakten Raum  $X$ , die punktetrennend ist und die konstante Funktion 1 enthält, dann liegt  $\mathcal{A}$  dicht in  $C(X, \mathbb{R})$ .*

*Beweis.* Da mit  $\mathcal{A}$  auch der Abschluss von  $\mathcal{A}$  eine Algebra mit den vorausgesetzten Eigenschaften ist, dürfen wir annehmen dass  $\mathcal{A}$  abgeschlossen ist und haben dann  $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{R})$  zu zeigen.

Wir zeigen zunächst, dass die Funktion  $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto |z|$  im Abschluss der Algebra  $\mathcal{A}_0$  der reellen Polynome auf  $[-1, 1]$  liegt: Das folgt wegen  $|z| = \sqrt{z^2} = \sqrt{1 - (1 - z^2)}$  wenn die Funktion  $\zeta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto \sqrt{1 - z}$  gleichmäßig durch ihre Taylorpolynome approximiert werden kann: Das Restglied des  $n$ -ten Taylorpolynoms von  $\zeta$  um 0 in Integraldarstellung berechnet sich zu

$$\begin{aligned} R_n(z) &= \int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!} \zeta^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{-1}{2} \binom{n-1/2}{n} \int_0^z (z-t)^n (1-t)^{-n-1/2} dt, \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &\leq \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n \frac{k-1/2}{k} \int_0^1 (1-t)^{-1/2} dt = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^n \log\left(1 - \frac{1}{2k}\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $z \in [-1, 1]$  folgt.

Die Approximierbarkeit der Betragsfunktion auf  $[-1, 1]$  durch Elemente von  $\mathcal{A}_0$  überträgt sich wie folgt auf die Approximierbarkeit von  $|f|$ ,  $f \in \mathcal{A}$  durch Elemente aus  $\mathcal{A}$ : Ist  $p$  ein Polynom auf  $[-1, 1]$  mit  $|p(t) - |t|| \leq \varepsilon$  für  $-1 \leq t \leq 1$  und  $f \in \mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ , so gilt, da  $\mathcal{A}$  eine Algebra ist,  $p\left(\frac{1}{\|f\|_\infty} f\right) \in \mathcal{A}$  und es folgt:

$$\left| \|f\|_\infty p\left(\frac{1}{\|f\|_\infty} f\right) - |f| \right| \leq \|f\|_\infty \varepsilon, \quad \text{mit } \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig war folgt, dass für  $f \in \mathcal{A}$  auch  $|f|$  in  $\mathcal{A}$  liegt. Wegen

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|), \quad \max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

folgt somit, dass mit  $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{A}$  auch  $\min(f_1, \dots, f_N)$  und  $\max(f_1, \dots, f_N)$  in  $\mathcal{A}$  liegen.

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass es für  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in X$  und  $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$  ein  $g_x \in \mathcal{A}$  gibt, das  $g_x > \varphi$  auf  $X$  und  $g_x(x) < \varphi(x) + \varepsilon$  erfüllt:

Da  $\mathcal{A}$  punktstetrennend auf  $X$  operiert und die konstanten Funktionen enthält, gibt es für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $x \neq y \in X$  ein  $g \in \mathcal{A}$  mit  $g(x) = a$  und  $g(y) = b$ . Also gibt es für  $x, y \in X$  ein  $g_{x,y} \in \mathcal{A}$  mit  $\varphi(x) < g_{x,y}(x) < \varphi(x) + \varepsilon$  und  $g_{x,y}(y) > \varphi(y)$ . Wegen der Stetigkeit dieser Funktionen gibt es eine offene Umgebung  $V_{y,x}$  von  $y$  mit  $g_{x,y}(z) > \varphi(z) \forall z \in V_{y,x}$ . Da  $X$  kompakt ist finden wir  $y_1, \dots, y_N \in X$  mit  $\cup_{i=1}^N V_{y_i,x} = X$ . Die Funktion  $g_x := \max(g_{x,y_1}, \dots, g_{x,y_N})$  liegt in  $\mathcal{A}$  und erfüllt  $g_x > \varphi$  und  $g_x(x) < \varphi(x) + \varepsilon$ .

Nun gibt es für  $x \in X$  eine offene Umgebung  $W_x$  mit  $g_x(z) < \varphi(z) + \varepsilon$  für  $z \in W_x$ . Da  $X$  kompakt ist gibt es  $x_1, \dots, x_N \in X$  mit  $\cup_{i=1}^N W_{x_i} = X$ . Die Funktion  $g := \min(g_{x_1}, \dots, g_{x_N})$  ist in  $\mathcal{A}$  und erfüllt  $\varphi < g < \varphi + \varepsilon$ , also  $\|g - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ .  $\square$

Für komplexwertige Funktionen ist dieser Satz in obiger Form nicht richtig, wie etwa das Beispiel der Algebra der Funktionen  $\sum_{n=0}^N a_n z^n$  auf dem Kompaktum  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  zeigt: Die Funktion  $m_{-1} : z \mapsto z^{-1}$  ist im orthogonalen Komplement aller Funktionen  $m_n : z \mapsto z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  bezüglich dem Skalarprodukt  $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \overline{g(e^{i\varphi})} d\varphi$ . Damit gilt  $(m_{-1} - \sum_{n=0}^N a_n m_n, m_{-1}) = (m_{-1}, m_{-1}) = 2\pi$ . Wegen  $\|m_{-1} - \sum_{n=0}^N a_n m_n\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|m_{-1} - \sum_{n=0}^N a_n m_n\|_\infty$  und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt aber

$$\begin{aligned} 2\pi &= \left| \left( m_{-1} - \sum_{n=0}^N a_n m_n, m_{-1} \right) \right| \leq \left\| m_{-1} - \sum_{n=0}^N a_n m_n \right\|_2 \|m_{-1}\|_2 \\ &\leq \sqrt{2\pi} \left\| m_{-1} - \sum_{n=0}^N a_n m_n \right\|_\infty \|m_{-1}\|_2 \end{aligned}$$

und die Funktion  $m_{-1}$  kann demnach nicht im Abschluss der Algebra der Funktionen  $\sum_{n=0}^N a_n z^n$  liegen. Es gilt aber für komplexwertige Funktionen:

**Satz 1.5.3** (Stone–Weierstraß komplex). *Für eine kompakte Menge  $X$  ist eine Unteralgebra  $\mathcal{A}$  der Algebra  $C(X, \mathbb{C})$ , die punktstetrennend ist, die konstante Funktion 1 enthält und mit jeder Funktion  $f$  auch ihre komplex konjugierte  $\bar{f}$  enthält, dicht in  $C(X, \mathbb{C})$ .*

*Beweis.* Unter den getroffenen Voraussetzungen sind sowohl Realteil als auch Imaginärteil einer Funktion aus  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{A}$ . Der  $\mathbb{R}$ -lineare Teilraum reellwertiger Funktionen von  $\mathcal{A}$  ist punktetrennend, da für eine komplexwertige Funktion  $f$   $f(x) \neq f(y)$  genau dann gilt wenn  $\operatorname{Re}f(x) \neq \operatorname{Re}f(y)$  oder  $\operatorname{Im}f(x) \neq \operatorname{Im}f(y)$  gilt. Es liegt nach Satz 1.5.2 der Teilraum reellwertiger Funktionen aus  $\mathcal{A}$  dicht in  $C(X, \mathbb{R})$ . Damit liegen Real- und Imaginärteil einer stetigen komplexwertigen Funktion im Abschluss von  $\mathcal{A}$  und folglich diese Funktion ebenso.  $\square$

*Beispiel 1.5.4.* Der klassische Approximationssatz von Weierstraß besagt, dass eine auf einem kompakten Intervall stetige Funktion gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann. Der Raum der Polynome ist klarerweise eine Algebra, die 1 enthält und wegen dem Monom  $x \mapsto x$  punktetrennend operiert. Dass die Polynome nach Satz 1.5.2 dicht in den stetigen Funktionen liegen ist genau diese Approximationseigenschaft.

*Beispiel 1.5.5.* Man sieht unmittelbar, dass der Raum der Polynome in den  $n$  unabhängigen Veränderlichen eine punktetrennende Unter algebra von  $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  mit 1 ist. Auf kompakten Teilmengen  $K$  des  $\mathbb{R}^n$  liegt der Raum der Polynome also dicht in  $C(K, \mathbb{R})$ . So liegen auf der  $n$ -Sphäre  $S^n = \{\mathbf{x} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$  die Polynome in  $x_1, \dots, x_{n+1}$ , das sind endliche Summen  $\sum a_{i_1, \dots, i_{n+1}} x_1^{i_1} \cdots x_{n+1}^{i_{n+1}}$  dicht in  $C(S^n, \mathbb{R})$ .

*Beispiel 1.5.6.* Für eine kompakte Teilmenge  $K$  von  $\mathbb{R}$  liegt der Raum der Funktionen  $\sum_{n=0}^N a_n e^{nx}$ ,  $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  dicht in  $C(K, \mathbb{R})$ .

*Beispiel 1.5.7.* Auf dem  $d$ -dimensionalen Torus

$$\mathbb{T} := \{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_k| = 1, 1 \leq k \leq d\}$$

liegen die **trigonometrischen Polynome** (das sind endliche Summen

$$p(z_1, \dots, z_d) = \sum a_{n_1, \dots, n_d} \exp\left(i \sum_{k=1}^d n_k z_k\right),$$

$n_k \in \mathbb{Z}$ ,  $a_{n_1, \dots, n_d} \in \mathbb{C}$ ) dicht in den stetigen komplexwertigen Funktionen.

Als Anwendung des Satzes von Stone-Weierstraß zeigen wir einen Satz über gleichverteilte Folgen.

Wir betrachten den Quotientenraum  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ , dessen Elemente wir als  $\mathbf{x} + \mathbb{Z}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  schreiben. Für jede Funktion  $\tilde{f}$  auf  $\mathbb{R}^s / \mathbb{Z}^s$  wird durch  $f : \mathbf{x} \mapsto \tilde{f}(q(\mathbf{x}))$  eine Funktion auf  $\mathbb{R}^s$  definiert.  $q$  ist hier die Quotientenabbildung  $\mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s / \mathbb{Z}^s$ . Diese Funktion ist immer  $\mathbb{Z}^s$ -periodisch und nach Proposition 1.3.6 genau dann stetig, wenn  $\tilde{f}$  stetig ist. Der Raum der stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}^s / \mathbb{Z}^s$  kann so mit dem Raum der stetigen  $\mathbb{Z}^s$ -periodischen Funktionen auf  $\mathbb{R}^s$  identifiziert werden.

Eine Folge  $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ,  $\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^s$  heißt **gleichverteilt modulo  $\mathbb{Z}^s$** , wenn für jede stetige  $\mathbb{Z}^s$ -periodische Funktion  $f$  gilt

$$\int_{[0,1]^s} f(\mathbf{x}) d\lambda^s(\mathbf{x}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N f(\mathbf{a}_n).$$

Dies ist offensichtlich genau dann der Fall wenn

$$\int_{\mathbb{R}^s / \mathbb{Z}^s} \tilde{f}(\mathbf{x}) d\tilde{\lambda}^s(\mathbf{x}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \tilde{f} \circ q(\mathbf{a}_n).$$

gilt, wobei  $\tilde{\lambda}^s$  das durch  $\lambda^s$  auf  $[0,1]^s$  durch  $q: x \mapsto x + \mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R}^s / \mathbb{Z}^s$  induzierte Bildmaß ist.

**Satz 1.5.8 (Weyl).** Sind die Zahlen  $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_s\}$  linear unabhängig über  $\mathbb{Q}$ , so ist die Folge  $(n\boldsymbol{\alpha})_{n \in \mathbb{N}_0}$  gleichverteilt in  $\mathbb{R}^s / \mathbb{Z}^s$ . ( $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ )

*Beweis.* Für  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^s \setminus \mathbf{0}$  gilt wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ :  $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha} \notin \mathbb{Z}$  und damit:

$$\left| \sum_{n=0}^N \exp(2\pi i n \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \right| = \left| \frac{1 - (\exp(2\pi i \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}))^{N+1}}{1 - \exp(2\pi i \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha})} \right| \leq \frac{2}{|1 - \exp(2\pi i \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha})|},$$

sowie

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \exp(2\pi i n \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = 0 \text{ für } \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \quad (1.1)$$

und somit  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N p(n\boldsymbol{\alpha}) = a_0$  für jedes trigonometrische Polynom

$$p: p(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in E} a_{\mathbf{m}} \exp(2\pi i \mathbf{m} \cdot \mathbf{x}), \quad E \subset \mathbb{Z}^s, E \text{ endlich.}$$

Zugleich gilt  $\int_{[0,1]^n} \exp(2\pi i \mathbf{m} \cdot \mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{m} = \mathbf{0} \end{cases}$ , woraus

$$\int_{[0,1]^n} p(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) = a_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N p(n\boldsymbol{\alpha}) \quad (1.2)$$

folgt. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß (Bsp. 1.5.7) liegen die trigonometrischen Polynome dicht in  $C([0,1]^s)$ . Es folgt für  $f \in C([0,1]^s)$ ,  $\varepsilon > 0$  und

$\|f - p\|_\infty < \varepsilon/3$ :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[0,1]^n} f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) - \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N f(n\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \right| \\ & \leq \left| \int_{[0,1]^n} f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) - \int_{[0,1]^n} p(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) \right| + \left| \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N f(n\boldsymbol{\alpha}) - p(n\boldsymbol{\alpha}) \right| \\ & \quad + \left| \int_{[0,1]^n} p(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) - \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N p(n\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

wenn wir  $N$  so groß wählen dass

$$\left| \int_{[0,1]^n} p(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) - \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N p(n\boldsymbol{\alpha}) \right| < \varepsilon/3$$

gilt, was nach (1.2) für hinreichend große  $N$  immer der Fall ist.  $\square$

**Korollar 1.5.9** (Kronecker). *Sind die Zahlen  $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_s\}$  linear unabhängig über  $\mathbb{Q}$ , so ist die Folge  $(n\boldsymbol{\alpha})_{n \in \mathbb{N}_0}$  dicht in  $\mathbb{R}^s / \mathbb{Z}^s$ .*

*Beweis.* Liegt die Folge  $(n\boldsymbol{\alpha})$  nicht dicht in  $\mathbb{R}^s / \mathbb{Z}^s$ , so gibt es eine stetige Funktion mit in deren Träger kein Element der Folge liegt und deren Integral 1 ist. Nach dem Satz von Weyl können die Zahlen  $1, \alpha_1, \dots, \alpha_s$  nicht linear unabhängig über  $\mathbb{Q}$  sein.  $\square$

## 1.6 Normale Räume

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **T4-Raum**, wenn es zu disjunkten abgeschlossenen Teilmengen  $A, B$  von  $X$  offene disjunkte Mengen  $U, V$  mit  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$  gibt. Ein topologischer Raum heißt **normal**, wenn er T4 ist und Punkte abgeschlossen sind (wird auch als Trennungsaxiom T1 bezeichnet).

**Proposition 1.6.1.** *Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann T4, wenn gilt: Sind  $E, O$  Teilmengen von  $X$  mit  $E \subseteq O$ ,  $E$  abgeschlossen,  $O$  offen, dann gibt es  $U \subseteq X$  offen mit  $E \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq O$ .*

*Beweis.* Ist  $X$  T4, so gibt es für die disjunkten abgeschlossenen Mengen  $E$  und  $O^c$  disjunkte offene Mengen  $U, V$  mit  $E \subseteq U$ ,  $O^c \subseteq V$ . Da  $U, V$  offen und disjunkt sind folgt  $\bar{U} \subseteq V^c$ , also  $E \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V^c \subseteq O$ .

Sind  $E, F$  abgeschlossen und disjunkt, so folgt  $E \subseteq F^c$  mit  $F^c$  offen. Gibt es eine offene Menge  $U$  mit  $E \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq O$ , so sind  $U$  und  $(\bar{U})^c$  disjunkte offene Obermengen von  $E$  bzw.  $F$ .  $\square$

**Satz 1.6.2** (Lemma von Urysohn). *Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann ein T4-Raum, wenn es zu zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen  $A$  und  $B$  in  $X$  eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  gibt, die auf  $A$  0 und auf  $B$  1 ist.*

*Beweis.* Gibt es auf einem topologischen Raum für zwei abgeschlossene disjunkte Mengen eine stetige Funktion mit den geforderten Trennungseigenschaften, dann sind  $f^{-1}([0, 1/2))$  und  $f^{-1}((1/2, 1])$  Mengen mit diesen Eigenschaften, der Raum ist dann also T4.

Ist  $X$  T4, so definieren wir für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq 2^n$  induktiv offene Teilmengen  $G_{k/2^n}$  von  $X$ , die  $\overline{G_{k/2^n}} \subseteq G_{(k+1)/2^n}$  erfüllen:

Wir wählen offene disjunkte Obermengen  $U, V$  von  $A$  und  $B$  und setzen  $G_0 := U$ ,  $G_1 := B^c$ . Dann gilt  $\overline{G_0} \subseteq V^c \subseteq G_1$ .

Sind Mengen  $G_{k/2^{n-1}}$  für  $0 \leq k \leq 2^{n-1}$  mit  $G_{k/2^{n-1}} \subseteq \overline{G_{k/2^{n-1}}} \subseteq G_{(k+1)/2^{n-1}}$  definiert, so wählen wir für  $0 \leq k < 2^{n-1}$  eine offene Menge  $G_{(2k+1)/2^n}$ , die  $\overline{G_{k/2^{n-1}}} \subseteq G_{(2k+1)/2^n} \subseteq \overline{G_{(2k+1)/2^n}} \subseteq G_{(k+1)/2^{n-1}}$  erfüllt, was nach Proposition 1.6.1 wegen  $\overline{G_{k/2^{n-1}}} \subseteq G_{(k+1)/2^{n-1}}$  möglich ist. Für die so definierte Folge von Mengen gilt

$$\overline{G_{k/2^n}} \subseteq G_{m/2^l} \text{ für } k/2^n < m/2^l. \quad (1.3)$$

Wir definieren eine Funktion  $f$  auf  $X$  durch

$$f(x) = \inf(\{k/2^n : x \in G_{k/2^n}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n\} \cup \{1\}).$$

Wegen  $A \subset G_0$ ,  $G_1 \subset B^c$  gilt  $f|_A = 0$ ,  $f|_B = 1$  sowie für  $\beta \in [0, 1]$ :

$$f(x) < \beta \Leftrightarrow \exists k, n \in \mathbb{N} : k/2^n < \beta, x \in G_{k/2^n}$$

also ist

$$f^{-1}([0, \beta)) = \bigcup_{k/2^n < \beta} G_{k/2^n} \text{ offen.} \quad (1.4)$$

Für  $f(x) > \alpha$  gibt eine größere untere Schranke von  $\{k/2^n : x \in G_{k/2^n}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n\}$  als  $\alpha$ , damit gibt es  $k/2^n > \alpha$  mit  $x \notin G_{k/2^n}$  und damit sogar  $k/2^n$  mit  $(k-1)/2^n > \alpha$  und  $x \notin G_{k/2^n}$ . Wegen (1.3) folgt

$$f^{-1}((\alpha, 1]) = \bigcup_{k/2^n > \alpha} (G_{k/2^n})^c = \bigcup_{m/2^l > \alpha} (\overline{G_{m/2^l}})^c \text{ ist offen.} \quad (1.5)$$

Aus (1.4) und (1.5) folgt mit Satz 1.2.8 ii) die Stetigkeit von  $f$ . □

**Satz 1.6.3** (Fortsetzungssatz von Tietze). *Sei  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge eines T4-Raumes  $X$ .  $f$  sei eine auf  $A$  stetige beschränkte reellwertige Funktion. Dann gibt es eine stetige beschränkte Fortsetzung von  $f$  auf  $X$  mit  $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$ , d.h. eine stetige Funktion  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$  und  $F|_A = f$ .*



*Beweis.* Wir zeigen zuerst: Für eine reellwertige stetige Funktion  $h$  auf  $A$  mit  $\|h\|_{C(A)} = \lambda$  gibt es eine stetige reellwertige Funktion  $g$  auf  $X$  mit  $\|h - g\|_{C(A)} \leq 2\lambda/3$  und  $\|g\|_{C(X)} = \lambda/3$ .

Wir definieren Teilmengen  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  von  $A$  wie folgt:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{x \in A : h(x) \geq \lambda/3\} \\ A_2 &:= \{x \in A : -\lambda/3 < h(x) < \lambda/3\} \\ A_3 &:= \{x \in A : h(x) \leq -\lambda/3\}. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Urysohn gibt es eine stetige Funktion  $g$  auf  $X$ , die  $\lambda/3$  auf  $A_1$  und  $-\lambda/3$  auf  $A_3$  mit  $\|g\|_{C(X)} = \lambda/3$  ist. Auf  $A$  gilt dann  $\|h - g\|_{C(A)} \leq 2\lambda/3$ . Wenden wir diese Konstruktion induktiv an, so erhalten wir durch  $h_{n+1} := h_n - g_n$  Folgen  $(h_n)_n$  und  $(g_n)_n$  stetiger Funktionen auf  $X$ , die  $h_1 = f$ ,

$$\begin{aligned} \|h_{n+1}\|_{C(A)} &= \|h_n - g_n\|_{C(A)} \leq \|f\|_{C(A)} (2/3)^n \quad \text{und} \\ \|g_n\|_{C(X)} &\leq \|f\|_{C(A)} 2^{n-1}/3^n \end{aligned} \quad (1.6)$$

erfüllen. Also konvergiert  $h_{n+1} = h_n - g_n$  auf  $A$  gleichmäßig gegen 0 und es folgt

$$\begin{aligned} f &= h_1 = h_2 + g_1 = h_3 + g_2 + g_1 = \cdots = h_{n+1} + \sum_{i=1}^n g_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h_n + \sum_{i=1}^{\infty} g_i = \sum_{i=1}^{\infty} g_i. \end{aligned}$$

Wegen (1.6) ist die Funktion  $\sum_{i=1}^{\infty} g_i$  als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig. □

**Satz 1.6.4.** *Kompakte Hausdorffräume und metrische Räume sind normal.*

*Beweis.* In Hausdorffräumen sind, wie man unmittelbar sieht, Punkte immer abgeschlossen, es bleibt also T4 zu zeigen.

Für disjunkte abgeschlossene Teilmengen  $A, B$  eines kompakten Hausdorffraumes und  $x \in A$ ,  $y \in B$  gibt es disjunkte offene Umgebungen  $U_{x,y}$  von  $x$  und  $V_{y,x}$  von  $y$ . Da  $B$  als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes kompakt ist gibt es für jedes  $x \in A$  endlich viele  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sodass  $(V_{x,y_i})_{i \leq n}$  eine Überdeckung von  $B$  ist. Sei  $V_x$  die offene Menge  $\cup_{i=1}^n V_{x,y_i}$  und  $U_x$  die offene Umgebung  $\cap_{i=1}^n U_{x,y_i}$  von  $x$ .  $A$  ist kompakt und erlaubt daher eine endliche Teilüberdeckung  $(U_{x_j})_{j=1, \dots, k}$ . Dann sind  $U := \cup_{j=1}^k U_{x_j}$  und  $V := \cap_{j=1}^k V_{x_j}$  disjunkte offene Obermengen von  $A$  respektive  $B$ .

Ist  $X$  ein metrischer Raum. Sei für  $E \subset X$  die Funktion  $d_E$  durch  $d_E(x) := \inf\{d(x, y) : y \in E\}$  definiert. Es gilt klarerweise  $d_E(x) = 0$  für  $x \in E$ . Ist  $E$  abgeschlossen und  $x \notin E$ , so gibt es eine Kugel  $B(x, r)$  um  $x$ , die mit  $E$  leeren Schnitt

hat, woraus  $d_E(x) > r$  folgt. Für abgeschlossene Mengen  $E$  ist also  $E$  genau die Nullstellenmenge von  $d_E$ . Für disjunkte abgeschlossene Teilmengen  $A$  und  $B$  von  $X$  ist demzufolge die Funktion  $d_A/(d_A + d_B)$  wohldefiniert, verschwindet auf  $A$  und ist 1 auf  $B$ .  $\square$

## 1.7 Lokalkompakte Räume

Ein Hausdorffraum heißt **lokalkompakt**, wenn jedes Element eine kompakte Umgebung besitzt.

**Satz 1.7.1.** *In einem lokalkompakten Raum bilden die kompakten Umgebungen eines Elementes eine Umgebungsbasis.*

*Beweis.* Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein lokalkompakter Raum und  $K$  eine kompakte Umgebung von  $x \in X$ . Sei  $\mathcal{T}_s$  die Spurtopologie auf  $K$ . In dieser sind Teilmengen von  $K$  genau dann offen, wenn sie der Durchschnitt von  $K$  mit einer  $\mathcal{T}$ -offenen Menge sind.  $K$  ist aber selbst Umgebung von  $x$ , womit eine Teilmenge von  $K$  genau dann Umgebung von  $x$  in  $(K, \mathcal{T}_s)$  ist, wenn sie Umgebung von  $x$  in  $(X, \mathcal{T})$  ist. Es folgt, dass jede Umgebungsbasis von  $x$  in  $(K, \mathcal{T}_s)$  zugleich Umgebungsbasis von  $x$  in  $(X, \mathcal{T})$  ist.

In Hausdorffräumen sind kompakte Teilmengen abgeschlossen (Satz 1.4.4). Damit sind  $\mathcal{T}_s$ -kompakte Mengen  $\mathcal{T}_s$ -abgeschlossen und somit als Durchschnitt einer  $\mathcal{T}$ -abgeschlossenen Menge mit der abgeschlossenen Menge  $K$  auch  $\mathcal{T}$ -abgeschlossen. Demnach genügt es zu zeigen, dass  $x$  eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen in  $(K, \mathcal{T}_s)$  hat.

Nach Satz 1.6.4 sind kompakte Hausdorffräume normal, also gibt es nach Proposition 1.6.1 zu jeder offenen Umgebung  $U$  von  $x$  in  $(K, \mathcal{T}_s)$  eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  mit  $\bar{V} \subseteq U$ . Das heißt die abgeschlossenen Umgebungen von  $x$  bilden eine Umgebungsbasis von  $x$  in  $(K, \mathcal{T}_s)$ . Als abgeschlossene Teilmengen von  $K$  sind die Mengen dieser Umgebungsbasis aber kompakt in  $(K, \mathcal{T}_s)$  (Satz 1.4.4).  $\square$

Um Eigenschaften die kompakten Räumen zukommen auf nichtkompakte Räume zu übertragen kann man versuchen den gegebenen Raum als dichten Teilraum eines kompakten Raumes zu interpretieren. Unter einer **Kompaktifizierung** eines Hausdorffraumes  $(X, \mathcal{T})$  verstehen wir einen kompakten Hausdorffraum  $(K, \mathcal{T}')$  zusammen mit einer injektiven Abbildung  $\phi : X \rightarrow K$  mit dichtem Bild, also  $\overline{\phi(X)} = K$ , sodass  $\mathcal{T}$  genau die durch  $\phi$  induzierte Initialtopologie ist. D.h. identifiziert man  $X$  vermöge  $\phi$  mit der dichten Teilmenge  $\phi(X)$  von  $K$ , so ist  $\mathcal{T}$  genau die Relativtopologie von  $X$  als Teilmenge von  $(K, \mathcal{T}')$ .

Die einfachste Konstruktion einer Kompaktifizierung ist die **Einpunktkompaktifizierung** (auch **Alexandroff-Kompaktifizierung** genannt): Die Menge  $K$

entsteht durch Hinzunahme eines einzigen Punktes, den man üblicherweise mit  $\infty$  bezeichnet, zu  $X$  und  $\phi$  ist die kanonische Einbettung  $\iota$  von  $X$  in  $K := X \cup \{\infty\}$ . Auf lokalkompakten Räumen kann dann eine Topologie  $\mathcal{T}'$  auf  $K$  so gewählt werden, dass  $(K, \mathcal{T}')$  mit  $\iota$  eine Kompaktifizierung von  $X$  ist:

**Satz 1.7.2.** *Ein Hausdorffraum hat genau dann eine Einpunktkompaktifizierung wenn er lokalkompakt ist. Diese ist für lokalkompakte Räume bis auf Homöomorphie eindeutig.*

*Beweis.* Ist  $K = X \cup \{\infty\}$  eine Einpunktkompaktifizierung des Hausdorffraumes  $X$  und  $O$  eine offene Menge in  $K$ , die  $\infty$  enthält, so ist jede offene Überdeckung  $(O_i)_{i \in I}$  von  $O^c$  vereingt mit  $O$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Diese enthält, da  $K$  kompakt ist, eine endliche Teilüberdeckung  $((O_i)_{i \in F}, O)$ . Damit ist  $(O_i)_{i \in F}$  eine endliche Teilüberdeckung von  $O^c$ . Eine Teilmenge von  $K$ , die  $\infty$  enthält, kann also nur dann offen sein wenn ihr Komplement kompakt in  $K$  und damit in  $X$  ist. Da  $K$  Hausdorffraum ist, muss es zu jedem  $x \in X$  eine kompakte Umgebung geben, d.h. nur lokalkompakte Räume können in diesem Sinn kompaktifiziert werden.

Ist  $X$  lokalkompakt, und  $C$  eine kompakte Teilmenge von  $X$ , so gibt es, da  $K$  Hausdorffraum ist, für jedes  $c \in C$  eine offene relativ kompakte Menge  $O_c$  mit  $\overline{O_c}^c$  ist Umgebung von  $\infty$ . Für eine endliche Teilüberdeckung  $(O_{c_i})_{i=1, \dots, N}$  ist dann  $\bigcap_{i \leq N} \overline{O_{c_i}}^c$  eine offene Umgebung von  $\infty$ , die disjunkt zu  $C$  ist. Also ist auch  $C^c$  eine Umgebung von  $\infty$  die wegen  $C^c = \bigcap_{i \leq N} \overline{O_{c_i}}^c \cup (X \setminus C)$  offen in  $K$  ist. Also sind in lokalkompakten Räumen alle Komplemente kompakter Mengen Umgebungen von  $\infty$ .

Damit ist eine Einpunktkompaktifizierung, sofern sie existiert eindeutig. Tatsächlich gilt: □

**Satz 1.7.3.** *Zu einem lokalkompakten Raum  $(X, \mathcal{T})$  gibt es eine bis auf Homöomorphie eindeutige Einpunktkompaktifizierung.*

*Beweis.* Wir haben nur noch zu zeigen, dass die Menge

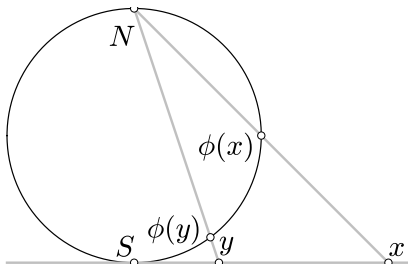
$$\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{C^c : C \text{ kompakt in } (X, \mathcal{T})\}$$

eine Topologie auf  $K$  ist.  $C^c$  bezeichnet hier und im Folgenden das Komplement bezüglich  $K = X \cup \{\infty\}$ ,

$\emptyset, K$  sind in  $\mathcal{T}'$ . Vereinigungen und endliche Durchschnitte von Mengen aus  $\{C^c : C \text{ kompakt in } (X, \mathcal{T})\}$  sind nach Proposition 1.4.5 ebenfalls das Komplement einer  $\mathcal{T}$ -kompakten Menge in  $K$ .  $\mathcal{T}$  ist klarerweise als Topologie stabil unter der Bildung beliebiger Vereinigungen und endlicher Durchschnitte. Es

bleibt zu zeigen, dass für eine  $\mathcal{T}$ -kompakte Menge  $C$  und eine  $\mathcal{T}$ -offene Menge  $O$  die Mengen  $C^{\complement} \cup O$  und  $C^{\complement} \cap O$  in  $\mathcal{T}'$  liegen.  $O \cap C^{\complement} = O \cap (X \setminus C)$  da  $\infty \notin O$ . Nach Satz 1.4.4 ist  $C$  abgeschlossen in  $(X, \mathcal{T})$ , damit ist  $O \cap C^{\complement}$  in  $\mathcal{T}$  und damit in  $\mathcal{T}'$ .  $(X \setminus O) \cap C$  ist kompakt in  $(X, \mathcal{T})$  nach Satz 1.4.4. Damit ist  $((X \setminus O) \cap C)^{\complement} = O \cup C^{\complement}$  in  $\mathcal{T}'$ .  $\square$

### Einpunktkomp. von $\mathbb{R}$



Für  $\mathbb{R}$  lässt sich die Einpunktkompaktifizierung am anschaulichsten durch einen Kreis  $K$ , der die reelle Achse in einem Punkt  $S$  berührt veranschaulichen. Sei  $N$  der Punkt des Kreises, der  $S$  gegenüberliegt. Die Einbettung von  $\mathbb{R}$  in  $K$  lässt sich dann realisieren, indem ein Punkt  $x \in \mathbb{R}$  mit  $N$  durch eine Strecke verbunden wird. Der Schnittpunkt  $\phi(x)$  von  $K \setminus N$  mit dieser Strecke ist dann das Bild von  $x$  unter der Einbettung. Hier entspricht  $N$  dem Punkt  $\infty$ .

Ähnlich lässt sich die Einpunktkompaktifizierung von  $\mathbb{C}$  als eine 2-Sphäre realisieren.

*Beispiel 1.7.4.* Dasselben Überlegungen zeigen, dass die Einpunktkompaktifizierung von  $\mathbb{R}^n$  vermöge der Bijektion

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, 2 - 2\lambda), \quad \lambda = \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-1},$$

$$\infty \mapsto (0, 0, \dots, 0, 2)$$

homöomorph zur  $n$ -Sphäre  $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) : \sum_{i=1}^n x_i^2 + (x_{n+1} - 1)^2\}$  ist.

*Beispiel 1.7.5.* Vermöge der Abbildung  $t \mapsto e^{-t}$  ist die Einpunktkompaktifizierung von  $[0, \infty)$  homöomorph zu einem kompakten Intervall, etwa zu  $[0, 1]$ . Dem Punkt  $\infty$  entspricht dann der Randpunkt 0 des Intervalls  $[0, 1]$ .

## 1.8 Zusammenhang

Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht als Vereinigung zweier offener disjunkter nichtleerer Teilmengen dargestellt werden kann. Eine Teilmenge eines topologischen Raumes ist zusammenhängend, wenn sie als topologischer Raum mit der Spurtopologie zusammenhängend ist.

*Beispiel 1.8.1.* Intervalle sind zusammenhängend: Sei  $I$  ein Intervall d.h. eine Menge der Art  $(-\infty, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $[a, \infty)$  für  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Angenommen  $I = O_1 \cup O_2$  mit  $O_1, O_2$  disjunkt nichtleer und

offen in  $I$ . Dann gibt es  $x \in O_1, y \in O_2$ . Sei o.B.d.A.  $x < y$  und die Menge  $A_1 := \{t : [x, t) \subseteq O_1\}$  ist nichtleer, womit  $\zeta := \sup\{t \in A_1\}$  wohldefiniert ist. Da  $O_1, O_2$  offen sind folgt  $x < \zeta < y$ . Für  $\zeta \in O_i, i \in 1, 2$  gibt es damit, da  $O_i$  offen ist, ein  $s > 0$  mit  $(\zeta - s, \zeta + s) \subset O_i$ . Im ersten Fall folgt  $\zeta \geq \zeta + s$ , im zweiten  $\zeta \leq \zeta - s$ , also in beiden Fällen ein Widerspruch.

**Satz 1.8.2.** *Ist  $A$  eine zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes  $X, B \subseteq X$  mit  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ , dann ist  $B$  zusammenhängend.*

**Beweis:** Seien  $O_1, O_2$  offen und disjunkt in  $X$  mit  $O_1 \cup O_2 \supset B$ . Dann gilt  $O_1 \cup O_2 \supset A$ . Da  $A$  zusammenhängend ist, folgt  $A \subseteq O_i$  für  $i = 1$  oder  $i = 2$ . Sei o.B.d.A.  $A \subseteq O_1$  dann folgt  $O_2 \cap \bar{A} = \emptyset$  und damit  $B \subseteq O_1$ . Also ist  $B$  zusammenhängend.  $\square$

**Satz 1.8.3.** *Sind die Teilmengen  $(A_i)_{i \in I}$  eines topologischen Raumes zusammenhängend mit  $A_i \cap A_j \neq \emptyset \forall i, j \in I$ , so ist  $\cup_{i \in I} A_i$  zusammenhängend.*

**Beweis:** Gilt  $\cup_{i \in I} A_i \subseteq O_1 \cup O_2$  mit  $O_1, O_2$  offen disjunkt, so folgt  $A_i \subseteq O_1 \cup O_2$ . Da  $A_i$  zusammenhängend ist muss  $A_i \subseteq O_{k_i}$  gelten für ein  $k_i \in \{1, 2\}$ . Da  $A_i$  und  $A_j$  nichtleeren Schnitt haben, folgt  $k_i = k_j$  und damit  $\cup_{i \in I} A_i \subseteq O_k$  für ein  $k \in \{1, 2\}$ , also ist die Zerlegung von  $\cup_{i \in I} A_i$  durch  $O_1, O_2$  trivial.  $\square$

Für  $x \in X$  heißt die Vereinigung aller zusammenhängender Mengen, die  $x$  enthalten die **Zusammenhangskomponente** von  $x$ .

**Satz 1.8.4.** *Für  $x \in X$  ist die Zusammenhangskomponente von  $x$  die größte zusammenhängende Menge, die  $x$  enthält. Sie ist abgeschlossen. Zwei Zusammenhangskomponenten in  $X$  sind entweder gleich oder disjunkt, d.h.  $X$  ist die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten.*

**Beweis:** Nach Satz 1.8.3 ist die Vereinigung  $K(x)$  aller zusammenhängender Mengen, die  $x$  enthalten zusammenhängend. Sie ist damit die größte zusammenhängende Menge, die  $x$  enthält. Nach Satz 1.8.2 ist auch der Abschluss von  $K(x)$  zusammenhängend, womit  $K(x)$  abgeschlossen ist.

Für  $z \in K(x) \cap K(y)$  folgt mit der ersten Aussage des Satzes  $K(x) = K(z)$  und  $K(x) = K(y)$ , also  $K(y) = K(z)$ .  $\square$

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegzusammenhängend**, wenn je zwei Elemente  $x, y$  durch einen stetigen Weg in  $X$  verbunden werden können, d.h. es gibt eine stetige Abbildung  $\Gamma : I \rightarrow X$  mit  $\Gamma(0) = x$  und  $\Gamma(1) = y$ . Da zwei stetige Wege, bei denen der Anfangspunkt  $\Gamma'(a')$  gleich dem Endpunkt  $\Gamma(b)$  des anderen ist zu einem stetigen Weg zusammengesetzt werden können, sieht man, dass die Eigenschaft durch einen stetigen Weg in  $X$  verbunden werden zu können ist eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen die **Wegzusammenhangskomponenten** genannt werden.

**Satz 1.8.5.** *Ein wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend.*

**Beweis:** Für  $X = O_1 \cup O_2$  mit  $O_i, O_2$  offen disjunkt nichtleer in  $X$  mit  $x_1 \in O_1, x_2 \in O_2$  und  $\Gamma$  ein Weg mit  $\Gamma(0) = x_1, \Gamma(1) = x_2$ . Dann gilt  $I = \Gamma^{-1}(O_1) \cup \Gamma^{-1}(O_2)$  mit  $\Gamma^{-1}(O_i)$  offen nichtleer und disjunkt. Ein Widerspruch, da das Intervall  $I$  nach Beispiel 1.8.1 zusammenhängend ist.  $\blacksquare$

*Beispiel 1.8.6.* Das folgende Beispiel zeigt, dass aus zusammenhängend nicht wegzusammenhängend folgt: Wir betrachte

$$X := (\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \{0\}) \cup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (\{1/n\} \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

als Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  mit der durch  $\mathbb{R}^2$  induzierten Topologie.  $X = X_1 \cup X_0 \cup X_{-1}$  mit  $(x, y) \in X_i$  genau für  $(x, y) \in X \wedge i = \operatorname{sgn} x$ .  $X_1, X_{-1}$  sind offensichtlich wegzusammenhängend und damit nach Satz 1.8.5 zusammenhängend.  $X_0 \in \overline{X_{\pm 1}}$  deshalb liegt  $X_0$  in der Zusammenhangskomponente von  $X_{\pm 1}$ , womit auch die Zusammenhangskomponenten von  $X_1$  und  $X_{-1}$  nach Satz 1.8.3 gleich sein müssen.  $X$  ist also zusammenhängend.

Angenommen  $\Gamma$  ist ein stetiger Weg vom Einheitsintervall  $I$  nach  $X$  mit  $\Gamma(0) = (1, 0), \Gamma(1) = (0, 1)$ . Dann ist  $t_0 := \min\{t \in I : (\Gamma(t))_1 = 0\}$  wohldefiniert und es gilt wegen  $(0, 0) \notin X$   $\Gamma(t_0) = (0, s)$  mit  $s \neq 0$ . Für ein  $\varepsilon > 0$  gilt dann  $\|\Gamma(t) - (0, s)\| < s/2$  für  $t_0 - \varepsilon < t < t_0$ . Es folgt, dass die erste Komponente von  $\Gamma$  im Intervall  $[t_0 - \varepsilon, t_0]$  nur Werte aus  $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  annimmt.  $\operatorname{pr}_1 \circ \Gamma$  ist aber stetig, also muss das Bild dieses Intervalls zusammenhängend sein. Die Zusammenhangskomponenten von  $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  sind aber einelementig, d.h.  $\operatorname{pr}_1 \circ \Gamma$  muß dort konstant  $1/n_0$  sein im Widerspruch zu  $\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} \operatorname{pr}_1 \circ \Gamma(t) = 0$ .

Aus zusammenhängend folgt nicht wegzusammenhängend. Das folgt auch nicht für Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Aber es gilt:

**Satz 1.8.7.** *Eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann zusammenhängend wenn sie wegzusammenhängend ist.*

*Beweis.* Jede wegzusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes ist nach Satz 1.8.5 zusammenhängend.

Ist  $W$  eine Wegzusammenhangskomponente von  $O$ , so ist  $W$  offen, denn mit  $y \in W$  ist eine Kugel um  $y$  in  $W$ , da Kugeln im  $\mathbb{R}^n$  wegzusammenhängend sind und  $O$  offen ist. Damit ist  $O$  als disjunkte Vereinigung von einer Wegzusammenhangskomponente von  $O$  und der Vereinigung der anderen nicht zusammenhängend falls  $O$  mehr als eine Wegzusammenhangskomponente hat, also falls  $O$  nicht wegzusammenhängend ist.  $\blacksquare$

# Kapitel 2

## Funktionenräume

Das aus der Maßtheorie bekannte Lebesgueintegral ist nicht nur das zentrale Hilfsmittel in der Wahrscheinlichkeitstheorie, sondern ist auch in der reellen Analysis unerlässlich. Zuerst werden wir mit dem maßtheoretischen Satz von Fubini Vertauschungssätze herleiten und dann die aus der Maßtheorie bekannten  $L^p$ -Räume näher untersuchen.

**Satz 2.0.1** (Ungleichungen von Young und Hölder und Minkowski). Sei  $p > 1$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$ .

Dann gilt für  $a, b \geq 0$ :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (\text{Young})$$

und für einen Maßraum  $(X, \mu)$  mit  $f \in L^p(X, \mu)$ ,  $g \in L^q(X, \mu)$  sowie  $1 \leq p$  und  $q = \frac{p}{p-1}$  für  $p > 1$ ,  $q = \infty$  für  $p = 1$ , dann gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (\text{Hölder}).$$

Die Dreiecksungleichung für die  $L^p$ -Norm für  $1 \leq p \leq \infty$  ist die Ungleichung

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (\text{Minkowski}).$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} ab &= \lambda^2(\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < y < b, 0 < x < a\}) \\ &\leq \lambda^2(\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y < x^{p-1}, 0 < x < a\}) \\ &\quad + \lambda^2(\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y > x^{p-1}, 0 < y < b\}) \\ &= \lambda^2(\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y < x^{p-1}, 0 < x < a\}) \\ &\quad + \lambda^2(\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x < y^{1/(p-1)}, 0 < y < b\}) \\ &= \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{1/(p-1)} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \end{aligned}$$

also die Ungleichung von Young.

Die Hölder-Ungleichung ist klar für  $p = 1, q = \infty$ . Für  $p > 1$  folgt mit  $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$  und  $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$  aus der Ungleichung von Young wegen  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ :

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_X |f(x)g(x)| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} d\mu(x) + \frac{1}{q} \int_X \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} d\mu(x) = 1.$$

Mit der Hölder-Ungleichung folgt für  $q = \frac{p}{p-1}$

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\leq \int_X (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\mu = \int_X |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left( \int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \frac{\int_X |f + g|^p d\mu}{\left( \int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \frac{\|f + g\|_p^p}{\|f + g\|_p} \end{aligned}$$

und damit die Minkowski-Ungleichung

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad \square$$

## 2.1 Vertauschungssätze

Aus der Maßtheorie ist bekannt:

**Satz 2.1.1** (Fubini). *Für eine Lebesgue-messbare Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$ , die integrierbar oder positiv ist und jede Permutation  $i_1, \dots, i_n$  von  $1, \dots, n$  sind alle Integrale*

$$\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) d\lambda(x_{i_1}) \cdots d\lambda(x_{i_n}),$$

$\lambda^{n-k}$ -messbare Funktionen auf  $\mathbb{R}^{n-k}$  und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) d\lambda(x_{i_1}) \cdots d\lambda(x_{i_n}).$$

Da das  $n$ -dimensionale Lebesguemaß  $\lambda^n$  offensichtlich  $\sigma$ -endlich ist, können wir auf die explizite Forderung der  $\sigma$ -Endlichkeit verzichten.

**Beispiel 2.1.2.** Unter Verwendung des Satzes von Fubini können wir eine Darstellung der **Betafunktion**  $B(x, y)$  durch die **Gammafunktion**  $\Gamma(x)$  herleiten. Die Gammafunktion ist für  $t > 0$  durch

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$$



definiert, die Betafunktion für  $x, y > 0$  durch

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \int_0^\infty e^{-s} s^{y-1} ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-s} t^{x-1} s^{y-1} dt ds \quad \text{mit } t = u - s \\ &= \int_0^\infty \int_s^\infty e^{-u} (u-s)^{x-1} s^{y-1} du ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} (u-s)^{x-1} s^{y-1} \mathbb{1}_{(s, \infty)}(u) du ds \quad \text{Fubini} \\ &= \int_0^\infty \int_0^u e^{-u} (u-s)^{x-1} s^{y-1} \mathbb{1}_{(0, u)}(s) ds du \quad \text{für } s > 0 \\ &= \int_0^\infty \int_0^u e^{-u} (u-s)^{x-1} s^{y-1} ds du \quad \text{mit } s = ru, ds = u dr \\ &= \int_0^\infty e^{-u} \int_0^1 u^{x-1} (1-r)^{x-1} r^{y-1} u^{y-1} u dr du \\ &= \int_0^\infty e^{-u} u^{x+y-1} B(x, y) du = \Gamma(x+y) B(x, y) \end{aligned}$$

$$\text{also } B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad \square$$

Mithilfe dieser Identität kann etwa  $\Gamma(\frac{1}{2})$  berechnet werden: Es gilt  $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\Gamma(1)$ . Es gilt  $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ . Wegen

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} dt = 2 \int_0^1 (1-u^2)^{-1/2} du = 2 \arcsin 1 = \pi$$

folgt also

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \quad (2.1)$$

*Beispiel 2.1.3.* Beispiel 2.1.2 und den Satz von Fubini verwenden wir um das Volumen  $\omega_n$  der Einheitskugel  $B$  im  $\mathbb{R}^n$  zu berechnen: Da das Lebesguemaß auf  $\mathbb{R}^n$  vom Inhalt auf dem Semiring der halboffenen achsenparallelen Rechtecke induziert wird, sieht man unmittelbar, dass für eine Lebesgue-messbare Menge  $A$  gilt  $\lambda^n(rA) = r^n \lambda^n(A)$ . Insbesondere  $\lambda^n(B(r, 0)) = r^n \omega_n$  gilt. Für festes  $x_n$  ist  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  genau dann in  $B$ , wenn  $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq 1 - x_n^2$  gilt, also wenn  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  in der  $n-1$  dimensionalen Kugel mit Radius  $\sqrt{1 - x_n^2}$  ist. Der

Satz von Fubini zeigt

$$\begin{aligned}\omega_n &= \omega_{n-1} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = \omega_{n-1} \int_0^1 (1-u)^{\frac{n-1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du \quad (t^2 = u) \\ &= \omega_{n-1} B(1/2, (n+1)/2) = \omega_{n-1} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1+n/2)}.\end{aligned}$$

Wegen (2.1) und  $\omega_1 = 2$  führt Induktion und die Identität  $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ , die man unmittelbar durch partielle Integration herleitet unmittelbar auf

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+n/2)} = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} & n \text{ gerade} \\ \frac{\pi^{(n-1)/2} 2^{(n+1)/2}}{n!!} & n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (2.2)$$

□

Auch der folgende Satz, der im wesentlichen besagt dass im  $\mathbb{R}^n$  Kugeln jene Mengen sind, die bei gegebenem Durchmesser größtes Volumen haben ist eine Anwendung des Satzes von Fubini. Der **Durchmesser**  $\text{diam}(A)$  einer Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}^n$  ist durch  $\text{diam}(A) := \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A\}$  definiert. Hier und im Folgenden bezeichnet  $|\mathbf{x}|$  die Euklidische Norm  $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  eines Punktes  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Man beachte, dass diese Aussage für Dimensionen größer eins nichttrivial ist, da es Mengen, wie zum Beispiel das gleichseitige Dreieck im  $\mathbb{R}^2$  gibt, die nicht Teilmenge einer Kugel gleichen Durchmessers ist.

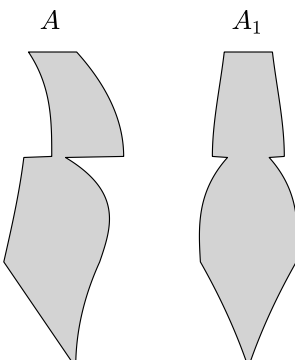
**Satz 2.1.4** (Isodiametrische Ungleichung). *Für eine beschränkte messbare Teilmenge  $A$  des  $\mathbb{R}^n$  gilt*

$$\lambda^n(A) \leq \omega_n (\text{diam}(A)/2)^n,$$

wobei  $\omega_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

*Beweis.* Für um den Ursprung symmetrische Mengen (das sind Mengen die  $\mathbf{x} \in A \Leftrightarrow -\mathbf{x} \in A$  erfüllen) gilt wegen  $2|\mathbf{x}| = |\mathbf{x} - (-\mathbf{x})| \leq \text{diam}(A)$  und der für alle Mengen gültigen Abschätzung  $\text{diam}(A) \leq 2 \sup\{|\mathbf{x}| : \mathbf{x} \in A\}$  die Beziehung  $\text{diam}(A) = 2 \sup\{|\mathbf{x}| : \mathbf{x} \in A\}$ . Es folgt  $A \subseteq B(0, \text{diam}(A)/2)$  und  $\lambda^n(A) \leq \omega_n \text{diam}(A/2)^n$ .

### Steiner Symmetrisierung



Wir führen die Behauptung des Satzes durch eine Symmetrisierung, der sogenannten **Steiner-Symmetrisierungen** auf diesen Spezialfall zurück und definieren für  $\mathbf{x} = (x_1, \dot{\mathbf{x}})$

$$a_1(\dot{\mathbf{x}}) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t, \dot{\mathbf{x}}) d\lambda(t)$$

und  $A_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x_1| < a_1(\dot{\mathbf{x}})\}$ .

$A_1$  geht also aus  $A$  hervor, indem man bei festgehaltenen Koordinaten  $\dot{\mathbf{x}}$  die erste Koordinate von  $\mathbf{x} \in A$  aus dem Intervall

$$\left( -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t, \dot{\mathbf{x}}) d\lambda(t), \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t, \dot{\mathbf{x}}) d\lambda(t) \right) := (-a_1(\dot{\mathbf{x}}), a_1(\dot{\mathbf{x}})) \quad (2.3)$$

wählt. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} \lambda^n(A) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x_1, \dot{\mathbf{x}}) d\lambda(x_1) d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 2a_1(\dot{\mathbf{x}}) d\lambda(\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_1}(x_1, \dot{\mathbf{x}}) d\lambda(x_1) d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \lambda^n(A_1) \end{aligned}$$

und  $A_1$  ist messbar.

Es folgt

$$\begin{aligned} 2a_1(\dot{\mathbf{x}}) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t, \dot{\mathbf{x}}) d\lambda(t) = \int_{\inf\{x_1 : (x_1, \dot{\mathbf{x}}) \in A\}}^{\sup\{x_1 : (x_1, \dot{\mathbf{x}}) \in A\}} \mathbb{1}_A(t, \dot{\mathbf{x}}) d\lambda(t) \\ &\leq \sup\{x_1 : (x_1, \dot{\mathbf{x}}) \in A\} - \inf\{x_1 : (x_1, \dot{\mathbf{x}}) \in A\} \\ &= \sup\{x_1 : (x_1, \dot{\mathbf{x}}) \in A\} + \sup\{-x_1 : (x_1, \dot{\mathbf{x}}) \in A\} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} a_1(\dot{\mathbf{x}}) + a_1(\dot{\mathbf{y}}) &\leq \frac{1}{2} \sup\{x_1 - y_1 : (x_1, \dot{\mathbf{x}}) \in A, (y_1, \dot{\mathbf{y}}) \in A\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sup\{y_1 - x_1 : (x_1, \dot{\mathbf{x}}) \in A, (y_1, \dot{\mathbf{y}}) \in A\} \\ &\leq \sup\{|x_1 - y_1| : (x_1, \dot{\mathbf{x}}) \in A, (y_1, \dot{\mathbf{y}}) \in A\} \end{aligned}$$

und damit für  $\mathbf{x} = (\tilde{x}_1, \dot{\mathbf{x}})$ ,  $\mathbf{y} = (\tilde{y}_1, \dot{\mathbf{y}}) \in A_1$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 &= (\tilde{x}_1 - \tilde{y}_1)^2 + |\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|^2 \leq (a_1(\dot{\mathbf{x}}) + a_1(\dot{\mathbf{y}}))^2 + |\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|^2 \\ &\leq \sup\{|x_1 - y_1|^2 : (x_1, \dot{\mathbf{x}}) \in A, (y_1, \dot{\mathbf{y}}) \in A\} + |\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}|^2 \\ &\leq \text{diam}(A)^2, \end{aligned}$$

woraus  $\text{diam}(A_1) \leq \text{diam}(A)$  folgt.

Wenden wir auf  $A_1$  die Steiner–Symmetrisierung bezüglich der zweiten Koordinate an, so erhalten wir eine Menge  $A_2$  gleichen Volumens und nicht größeren Durchmessers, die symmetrisch in der zweiten Koordinate ist. Die Symmetrie in der ersten Koordinate bleibt dabei erhalten:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_2 &\Leftrightarrow |x_2| < \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_1}(x_1, t, x_3, \dots, x_n) d\lambda(t) \\ &\Leftrightarrow |x_2| < \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_1}(-x_1, t, x_3, \dots, x_n) d\lambda(t) \\ &\Leftrightarrow (-x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_2. \end{aligned}$$

Führen wir nacheinander für alle Koordinaten diese Symmetrisierungsschritte durch, so erhalten wir eine in allen  $n$  Koordinaten symmetrische Menge  $A_n$  mit  $\lambda^n(A_n) = \lambda^n(A)$  und  $\text{diam}(A_n) \leq \text{diam}(A)$ . Da aus der Symmetrie in allen Koordinaten die Symmetrie um den Ursprung folgt und die Behauptung des Satzes für symmetrische Mengen gilt folgt, wie anfangs begründet, die Gültigkeit für alle beschränkten messbaren Mengen.  $\square$

**Satz 2.1.5.** Sei  $f_t(\omega)$  für  $t \in (a, b)$  eine Familie messbarer Funktionen auf einem Maßraum  $(\Omega, \mu)$ . Für  $\mu$ -fast alle  $\omega$  sei die Abbildung  $t \mapsto f_t(\omega)$  in  $t_0$  stetig. Weiters gebe es eine integrierbare Funktion  $g$  auf  $\Omega$  und ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $t$  mit  $|t - t_0| < \delta$   $\mu$ -f.ü.  $|f_t| \leq g$  gilt. Dann ist  $f_t$  für  $|t - t_0| < \delta$  integrierbar und das Parameterintegral  $\int_{\Omega} f_t(\omega) d\mu(\omega)$  ist in  $t_0$  stetig, d.h. es gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\Omega} f_t d\mu = \int_{\Omega} f_{t_0} d\mu$$

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass für jede gegen  $t_0$  konvergente Folge  $(t_n)_n$  die Folge der Integrale  $\int_{\Omega} f_{t_n}(\omega) d\mu(\omega)$  gegen  $\int_{\Omega} f_{t_0}(\omega) d\mu(\omega)$  konvergiert. Dies ist aber unter den getroffenen Voraussetzungen eine unmittelbare Folge des Satzes von der majorisierten Konvergenz.  $\square$

*Beispiel 2.1.6.* Für die Abbildungen

$$f_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{x}{t^2} & x < t \\ 0 & x \geq t \end{cases}$$

gilt für alle  $x > 0$ :  $f_t(x) \rightarrow 0$  für  $t \downarrow 0$ , also  $\int_0^1 \lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) dx = 0$  aber

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 f_t(x) dx = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Für die Familie  $f_t$  gibt es aber keine integrierbare Majorante in einem Intervall  $[0, \delta]$ . Man sieht dass die Integrierbarkeit von  $f_0$  nicht hinreichend für die Vertauschbarkeit der Integration mit der Grenzwertbildung  $t \rightarrow t_0$  ist.  $\square$

**Satz 2.1.7.** Sei  $f_t, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq \mathbb{R}$  eine Familie messbarer Funktionen auf dem Maßraum  $(\Omega, \mu)$ . An der Stelle  $t_0$  existieren für  $\mu$ -fast alle  $\omega$  die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_t}{\partial t}$ . Ferner gebe es eine integrierbare Funktion  $g$  auf  $(\Omega, \mu)$  mit  $\left| \frac{f_t(\omega) - f_{t_0}(\omega)}{t - t_0} \right| \leq g(\omega)$  für  $|t - t_0| < \delta$ . Dann ist die Funktion  $t \mapsto \int_{\Omega} f_t(\omega) d\mu(\omega)$  in  $t_0$  differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f_t(\omega) d\mu(\omega) \Big|_{t=t_0} = \int_{\Omega} \frac{\partial f_t(\omega)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} d\mu(\omega).$$

*Beweis.* Folgt wie Satz 2.1.5 aus dem Satz der majorisierten Konvergenz.  $\square$

**Satz 2.1.8.** Sei  $f_t, t \in [a, b]$  eine Familie messbarer Funktionen auf dem Maßraum  $(\Omega, \mu)$ . Für ein  $\delta > 0$  und alle  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  existieren für  $\mu$ -fast alle  $\omega \in \Omega$  die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_t(\omega)}{\partial t}$  mit  $\left| \frac{\partial f_t(\omega)}{\partial t} \right| \leq g(\omega)$  für eine  $\mu$ -integrierbare Funktion  $g$ . Dann ist die Funktion  $t \mapsto \int_{\Omega} f_t d\mu$  in  $t_0$  differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f_t(\omega) d\mu(\omega) \Big|_{t=t_0} = \int_{\Omega} \frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=t_0}(\omega) d\mu(\omega).$$

Man beachte, dass die Vertauschbarkeit noch nicht aus der Integrierbarkeit von  $\frac{\partial f_t}{\partial t}$  in  $t_0$  folgt.

*Beweis.* Nach dem Mittelwertsatz folgt aufgrund der partiellen Differenzierbarkeit nach  $t$ :  $\left| \frac{f_t(\omega) - f_{t_0}(\omega)}{t - t_0} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t} f_t(\omega) \Big|_{t=t_1} \right| \leq g(\omega)$  für  $|t - t_0| < \delta$  und ein  $t_1$  mit  $|t_1 - t_0| \leq |t - t_0|$ . Also folgt die Behauptung aus Satz 2.1.7.  $\square$

**Beispiel 2.1.9.** Für  $0 < a \leq b$  ist die Funktion  $f_{a,b}(t) := \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$  über  $\mathbb{R}_+$  integrierbar. Die Stammfunktion von  $t \mapsto \frac{e^{-bt}}{t}$  ist zwar nicht durch elementare Funktionen darstellbar, das Integral  $\int_{\mathbb{R}_+} f_{a,b} d\lambda$  lässt sich aber wie folgt berechnen: Zunächst verwenden wir

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = \int_a^b e^{-st} ds$$

und erhalten, da der Integrand positiv ist, mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[a,b]} e^{-st} ds dt = \int_{[a,b]} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-st} dt ds \\ &= \int_a^b \frac{1}{s} ds = \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Ohne diese Berechnung lässt sich aber die Ableitung dieses Parameterintegrals nach  $b$  bestimmen: Es gilt  $\frac{\partial f_{a,b}(t)}{\partial b} = e^{-bt}$ . Diese partielle Ableitung wird für  $b \geq b_0 > 0$  durch die über  $\mathbb{R}_+$  integrierbare Funktion  $t \mapsto e^{-b_0 t}$  majorisiert, es folgt also mit Satz 2.1.8:

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial}{\partial b} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-bt} dt = \frac{1}{b}.$$

□

*Beispiel 2.1.10.* In der Gammafunktion (vgl. Bsp. 2.1.2) ist der Integrand partiell nach  $t$  differenzierbar mit Ableitung  $\ln x e^{-x} x^{t-1}$ . Für  $0 < \delta < t_0$  gilt

$$|\ln x e^{-x} x^{t-1}| \leq |\ln x e^{-x} x^{t_0 + \operatorname{sgn}(x-1)\delta-1}| =: g(x) \quad \text{mit } g \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Mit Satz 2.1.8 folgt die Integraldarstellung der Ableitung der Gammafunktion.

$$\frac{d}{dt} \Gamma(t) = \int_0^\infty \ln x e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Durch Induktion zeigt man mit Satz 2.1.8:

$$\Gamma^{(n)}(t) = \int_0^\infty (\ln x)^n e^{-x} x^{t-1} dx.$$

*Beispiel 2.1.11.* Wir betrachten für  $t \in \mathbb{R}$  das oszillierende Integral

$$f(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} \cos(tx) dx.$$

Der Integrand ist partiell nach  $t$  differenzierbar mit

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-x^2/2} \cos(tx) = -x e^{-x^2/2} \sin(tx).$$

Wegen

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} e^{-x^2/2} \cos(tx) \right| \leq |x| e^{-x^2/2}$$

ist die Funktion  $x \mapsto |x| e^{-x^2/2}$  also für alle Werte des Parameters  $t$  eine integrierbare Majorante der partiellen Ableitung und es folgt mit Satz 2.1.8 und partieller Integration

$$\begin{aligned} f'(t) &= - \int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2/2} \sin(tx) dx \\ &= e^{-x^2/2} \sin(tx) \Big|_{-\infty}^\infty - t \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} \cos(tx) dx = -t f(t), \end{aligned}$$

also  $\frac{f'(t)}{f(t)} = (\ln f)'(t) = -t$  bzw.  $f(t) = f(0)e^{-t^2/2}$ . Wegen  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$  (vgl. Bsp. 4.3.2) folgt also

$$f(t) = \sqrt{2\pi}e^{-t^2/2}.$$

Eine zweite Möglichkeit zur Berechnung von  $f(t)$  ergibt sich durch Reihenentwicklung und dem Satz von der majorisierten Konvergenz: Aus der Taylorreihenentwicklung des Cosinus erhalten wir

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(tx)^{2n}}{(2n)!} e^{-x^2/2} dx. \quad (2.4)$$

Um die Vertauschung von Integration mit Summation zu rechtfertigen berechnen wir zuerst durch die Substitution  $\frac{x^2}{2} = u$  die Integrale

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/2} dx = 2 \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2} 2^n \int_0^{\infty} u^{n-1/2} e^{-u} du \\ &= 2^{n+1/2} \Gamma(n+1/2). \end{aligned}$$

Wegen der Rekursion  $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$  und  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  (2.1)) erhalten wir so

$$I_n = 2^{n+1/2} \sqrt{\pi} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} = \sqrt{2\pi} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \sqrt{2\pi} (2n-1)!!$$

Es folgt aus dem Satz der monotonen Konvergenz für alle  $t$  die Integrierbarkeit der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} x^{2n} e^{-x^2/2}$  mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} x^{2n} e^{-x^2/2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi} t^{2n}}{2^n n!} = \sqrt{2\pi} e^{t^2/2}.$$

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} x^{2n} e^{-x^2/2}$  ist offensichtlich eine Majorante der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} x^{2n} e^{-x^2/2}.$$

Wir dürfen also nach dem Satz der majorisierten Konvergenz in (2.4) Summation und Integration vertauschen und erhalten auch so

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(tx)^{2n}}{(2n)!} e^{-x^2/2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{2\pi} t^{2n}}{2^n n!} = \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2}.$$

## 2.2 Vervollständigung metrischer Räume

Unter einer **Vervollständigung** eines metrischen Raumes  $(M, d)$  verstehen wir einen vollständigen metrischen Raum  $(\tilde{M}, \tilde{d})$  zusammen mit einer isometrischen Abbildung  $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$ , die dichtes Bild in  $\tilde{M}$  hat. Identifiziert man die Teilmenge  $\iota(M)$  von  $\tilde{M}$  mit  $M$ , so kann  $\tilde{M}$  als ein vollständiger metrischer Raum interpretiert werden, der aus  $M$  durch Hinzunahme der Elemente aus  $\tilde{M} \setminus M$  hervorgeht. Die Forderung dass  $\iota$  dichtes Bild hat ist wie man leicht sieht keine wesentliche Einschränkung, da für jeden vollständigen Raum in den  $M$  vermöge  $\iota$  isometrisch eingebettet werden kann auch  $\overline{\iota(M)}$  ein vollständiger Raum mit derselben Eigenschaft ist, in dem dann  $\iota(M)$  dicht liegt.

Eine Abbildung  $x \mapsto \|x\|$  eines linearen Raumes  $X$  (über  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ ) nach  $\mathbb{R}_0^+$  heißt **Norm**, wenn für  $x, y \in X$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  bzw.  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .

Ist auf  $X$  eine Norm  $\|\cdot\|$  definiert, so sprechen wir von einem **normierten Raum**. Jede Norm induziert vermöge  $d(x, y) := \|x - y\|$  eine Metrik auf  $X$ . Ist in einem normierten Raum jede Cauchyfolge konvergent (bezüglich dieser durch die Norm induzierten Metrik), also wenn  $X$  als metrischer Raum vollständig ist, so ist  $X$  ein **Banachraum**.

Ist  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und  $\iota$  eine isometrische lineare Abbildung von  $X$  in einen dichten Teilraum eines Banachraumes  $\tilde{X}$ , so nennen wir  $\tilde{X}$  **Vervollständigung** des normierten Raumes  $X$ .  $\tilde{X}$  ist also eine Vervollständigung des normierten Raumes  $X$ , wenn  $\tilde{X}$  ein Banachraum ist, der eine Vervollständigung von  $X$  aufgefasst als metrischer Raum ist und die zugehörige isometrische Einbettung linear ist.

Wir zeigen, dass jeder metrische Raum im Wesentlichen eindeutig vervollständigt werden kann. Hierfür zeigen wir zuerst die Vollständigkeit der Räume  $\ell^\infty(M)$  aller beschränkten reell- oder komplexwertigen Funktionen auf einer Menge  $M$  mit der Supremumsnorm:

**Proposition 2.2.1.** *Für jede Menge  $M$  sind  $\ell^\infty(M, \mathbb{R})$  und  $\ell^\infty(M, \mathbb{C})$  mit der Supremumsnorm Banachräume.*

*Beweis.* Da jede komplexwertige Funktion als Summe  $f_1 + if_2$  mit  $f_1, f_2$  reellwertig aufgefasst werden kann genügt es sich auf  $\ell^\infty(M, \mathbb{R}) =: \ell^\infty(M)$  zu beschränken.



Wir haben zu zeigen, dass jede Cauchyfolge  $(f_n)_n$  in  $\ell^\infty(M)$  gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion auf  $M$  konvergiert. Da  $(f_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $\ell^\infty(M)$  ist, konvergiert  $(f_n(x))_n$  wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  für jedes  $x \in M$ . Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit  $f(x)$  und zeigen, dass die so definierte Funktion  $f$  beschränkt ist: Da  $(f_n)_n$  eine Cauchyfolge ist gibt es ein  $n_1$ , sodass für  $n, m \geq n_1$  und alle  $x$  in  $M$   $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$  gilt. Es folgt

$$|f(x)| = \lim_m |f_m(x)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x)| \leq 1 + \|f_{n_1}\|_{\ell^\infty(M)},$$

also ist  $f$  beschränkt. □

**Proposition 2.2.2.** *Für einen metrischen Raum  $(M, d)$  ist für beliebiges festes  $x_0 \in M$  die Abbildung  $M \rightarrow \ell^\infty(M) = \ell^\infty(M, \mathbb{R})$ ,  $x \mapsto f_x$  mit  $f_x(t) := d(x_0, t) - d(x, t)$  eine Isometrie.*

*Beweis.* Zunächst folgt aus der Dreiecksungleichung, dass  $|f_x(t)| \leq d(x_0, x)$  gilt, also ist  $f_x$  für jedes  $x$  in  $M$  in  $\ell^\infty(M)$ . Es folgt einerseits aus der Dreiecksungleichung

$$|f_x(t) - f_y(t)| = |d(y, t) - d(x, t)| \leq d(x, y),$$

andererseits gilt  $f_x(x) - f_y(x) = d(x, y)$ , woraus  $\|f_x - f_y\|_{\ell^\infty(M)} = d(x, y)$  folgt, d.h.  $x \mapsto f_x$  ist eine Isometrie. □

**Satz 2.2.3.** *Es seien  $(X_1, d_1)$  und  $(X_2, d_2)$  metrische Räume,  $(X_2, d_2)$  vollständig und  $f$  eine gleichmäßig stetige Funktion von einer Teilmenge  $A$  von  $X_1$  nach  $X_2$ . Dann gibt es eine eindeutige stetige Fortsetzung  $F$  von  $f$  auf  $\bar{A}$ . Diese ist gleichmäßig stetig und wenn  $f$  isometrisch ist ebenfalls isometrisch.*

*Beweis.* Für  $x \in \bar{A}$  ist für jede gegen  $x$  konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$  wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $X_2$ , die wegen der Vollständigkeit von  $X_2$  konvergiert. Wir definieren  $F(x)$  als  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ . Diese Definition ist sinnvoll, da wenn  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  für jede gegen  $x$  konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert alle Grenzwerte übereinstimmen müssen (man betrachte für zwei gegen  $x$  konvergente Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ ). Für  $x \in A$  ist die konstante Folge  $(x)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gegen  $x$  konvergente Folge, also ist  $F$  eine stetige Fortsetzung von  $f$ .

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon)$  mit  $d_2(f(r), f(s)) < \varepsilon$  für  $d_1(r, s) < \delta(\varepsilon) \forall r, s \in A$ .

Für  $x, y \in \bar{A}$  gibt es, da  $A$  dicht in  $\bar{A}$  liegt,  $\tilde{x}, \tilde{y} \in A$  mit  $d_1(x, \tilde{x}), d_1(y, \tilde{y}) < \delta(\frac{\varepsilon}{3})$ . Da  $F$  stetig in  $\bar{A}$  ist, kann  $\tilde{x}, \tilde{y}$  zudem so gewählt werden, dass  $d_2(F(x), F(\tilde{x})) < \frac{\varepsilon}{3}$  und  $d_2(F(y), F(\tilde{y})) < \frac{\varepsilon}{3}$  gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} d_2(F(x), F(y)) &\leq d_2(F(x), F(\tilde{x})) + d_2(f(\tilde{x}), f(\tilde{y})) + d_2(F(\tilde{y}), F(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + d_2(f(\tilde{x}), f(\tilde{y})) + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Wegen  $d_1(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq d_1(\tilde{x}, x) + d_1(x, y) + d_1(y, \tilde{y})$  folgt für  $d_1(x, y) < \frac{1}{3}\delta(\frac{\varepsilon}{3})$  weiters  $d_1(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \delta(\frac{\varepsilon}{3})$  und  $d_2(f(\tilde{x}), f(\tilde{y})) < \frac{\varepsilon}{3}$ . Für  $d_1(x, y) < \frac{1}{3}\delta(\frac{\varepsilon}{3})$  folgt mit (2.5)  $d_2(F(x), F(y)) < \varepsilon$ , also die gleichmäßige Stetigkeit von  $F$ .

Ist  $f$  isometrisch, so folgt aus der koordinatenweisen Stetigkeit von  $d$  für Folgen  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$ :

$$\begin{aligned} d(F(x), F(y)) &= \lim_{m \rightarrow \infty} d((f(x_m), F(y))) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} d((f(x_m), f(y_n))) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_m, y_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, y) = d(x, y), \end{aligned}$$

und  $F$  ist isometrisch.

Da stetige Funktionen durch ihre Werte auf einer dichten Teilmenge bestimmt sind, ist diese Fortsetzung eindeutig.  $\square$

**Satz 2.2.4.** *Jeder metrische Raum  $M$  besitzt eine Vervollständigung. Diese ist bis auf eine Isometrie eindeutig, d.h. für zwei vollständige metrische Räume  $\tilde{M}_i$  mit Isometrien  $\iota_i$  von  $M$  in dichte Teilräume von  $\tilde{M}_i$ ,  $i = 1, 2$  gibt es eine eindeutige surjektive Isometrie  $\iota : \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$  mit  $\iota_2 = \iota \circ \iota_1$ .*

*Beweis.* Nach Proposition 2.2.2 gibt es eine isometrische Abbildung von  $M$  in  $\ell^\infty(M)$ .  $\ell^\infty(M)$  ist nach Proposition 2.2.1 ein Banachraum und damit als metrischer Raum vollständig. Jede abgeschlossene Teilmenge  $A$  eines vollständigen Raumes  $X$  ist vollständig, denn ist  $(x_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $A$ , so ist sie eine Cauchyfolge in  $X$  und damit konvergent gegen ein Element  $x$  aus  $X$ . Dieses kann aber nicht in  $A^c$  liegen weil sonst  $A^c$  als offene Menge eine Umgebung von  $x$  wäre, die kein Folgenglied enthält. Somit ist der Abschluss des Bildes von  $M$  unter dieser Abbildung ein vollständiger metrischer Raum und damit eine Vervollständigung von  $M$ .

Für zwei Vervollständigungen  $\tilde{M}_i$ ,  $\iota_i$ ,  $i = 1, 2$  ist dann die Abbildung  $\iota_2 \circ \iota_1^{-1}$  eine Isometrie von  $\iota_1(M)$  auf  $\iota_2(M)$ . Nach Satz 2.2.3 kann diese Isometrie zu einer Isometrie von  $\tilde{M}_1$  nach  $\tilde{M}_2$  fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung ist surjektiv, da das isometrische Bild eines vollständigen Raumes immer vollständig ist (eine Folge ist genau dann Cauchyfolge wenn ihre Bildfolge eine Cauchyfolge ist) und keine echte Teilmenge von  $\tilde{M}_2$  vollständig sein kann, wenn sie  $\iota_2(M)$  enthält, da nur abgeschlossene Teilmengen  $A$  eines metrischen Raumes vollständig sein können (jede Folge in  $A$ , die gegen ein Element von  $\bar{A} \setminus A$  konvergiert, wäre eine Cauchyfolge in  $A$ , die keinen Grenzwert in  $A$  hat) und  $\iota_2(M)$  dicht in  $\tilde{M}_2$  liegt.  $\square$

Für normierte Räume  $X$  und  $Y$  ist der lineare Raum  $L(X, Y)$  aller linearen beschränkten Abbildungen von  $(X, \|\cdot\|_X)$  nach  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  mit der **Operatornorm** ein normierter Raum. Die Operatornorm eines Elementes  $T \in L(X, Y)$  ist durch

$\|T\| := \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$  gegeben. Unsere Forderung, dass  $T$  beschränkt ist besagt genau, dass die so definierte Norm endlich ist. (Dass die Operatornorm eine Norm ist folgt durch elementares Nachrechnen.)

Der lineare Raum  $X^*$  der bezüglich der Operatornorm beschränkten linearen Abbildungen von  $X$  in den Skalkörper von  $X$  heißt **Dualraum** von  $X$ . Seine Elemente heißen **stetige lineare Funktionale**.

*Beispiel 2.2.5.* Der lineare Raum aller Polynome auf dem Intervall  $[0, 1]$  kann mit verschiedenen Normen versehen werden. Unter der Supremumsnorm  $\|p\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |p(x)|$  ist er ein normierter nicht vollständiger Raum, denn nach dem Satz von Stone-Weierstraß gibt es für jede auf  $[0, 1]$  stetige Funktion  $f$  eine gleichmäßig gegen  $f$  konvergente Folge von Polynomen. Diese ist dann eine Cauchyfolge, die wenn  $f$  kein Polynom ist, keinen Grenzwert im Raum der Polynome hat. Betrachtet man statt dem Raum der Polynome den Raum  $C[0, 1]$  der stetigen Funktionen auf  $[0, 1]$  mit derselben Norm, so ist dieser Raum vollständig: Ist nämlich  $(f_n)$  eine Cauchyfolge in  $C[0, 1]$ , so konvergiert sie auch punktweise, da  $\mathbb{C}$  bzw.  $\mathbb{R}$  vollständig sind. Der punktweise Grenzwert der Folge  $(f_n)$  ist aber eine Funktion, die als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig ist, also in  $C[0, 1]$  liegt.  $C[0, 1]$  kann demnach als Vervollständigung des Raumes aller Polynome mit der Supremumsnorm aufgefasst werden.  $\square$

Wir zeigen, dass jeder normierte Raum als dichter Teilraum eines vollständigen normierten Raumes, also eines Banachraumes aufgefasst werden kann, das heißt dass es zu jedem normierten Raum eine Vervollständigung gibt. Ein normierter Raum  $X$  aufgefasst als metrischer Raum hat nach Satz 2.2.4 eine Vervollständigung, die bis auf Isometrie eindeutig ist. Wir müssen aber noch zeigen, dass diese Vervollständigung so mit einer linearen Struktur und einer Norm versehen werden kann, dass sie ein Banachraum ist und die von dieser Norm induzierte Metrik mit der Metrik auf der Vervollständigung übereinstimmt. Im Beweis von Satz 2.2.4 haben wir zwar über Proposition 2.2.2 die Vervollständigung als Teilmenge des Banachraumes  $\ell^\infty(M)$  realisiert, die so gewonnene Isometrie  $x \mapsto f_x$  ist aber nicht linear!

**Satz 2.2.6.** *Jeder normierte Raum  $X$  kann zu einem Banachraum vervollständigt werden. Dieser Banachraum ist bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig, d.h. für zwei Vervollständigungen  $\tilde{X}_1$  und  $\tilde{X}_2$  von  $X$  mit isometrischen Einbettungen  $\iota_1$  und  $\iota_2$  gibt es einen isometrischen Banachraum-Isomorphismus  $\iota: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ , für den  $\iota_2 = \iota \circ \iota_1$  auf  $X$  gilt.*

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  die Vervollständigung von  $X$  aufgefasst als metrischer Raum nach Satz 2.2.4. Für  $x, y \in \tilde{X}$  und  $(x_n)_n, (y_n)_n$  Folgen in  $X$  mit  $\iota(x_n) \rightarrow x$ ,  $\iota(y_n) \rightarrow y$  definieren wir Addition und skalare Multiplikation durch  $x + y := \lim_n \iota(x_n + y_n)$  und  $\lambda x := \lim_n \iota(\lambda x_n)$ . Da  $\iota(X)$  dicht in  $\tilde{X}$  liegt gibt es

für  $x, y \in \tilde{X}$  solche Folgen. Da  $\iota$  eine Isometrie ist folgt für  $\iota(x_n) \rightarrow x$ ,  $\iota(x'_n) \rightarrow x$ ,  $\iota(y_n) \rightarrow y$ ,  $\iota(y'_n) \rightarrow y$ :

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\iota(x_n + y_n), \iota(x'_n + y'_n)) &= d(x_n + y_n, x'_n + y'_n) \\ &\leq d(x_n + y_n, x_n + y'_n) + d(x_n + y'_n, x'_n + y'_n) \\ &= \|y_n - y'_n\| + \|x_n - x'_n\| = d(y_n, y'_n) + d(x_n, x'_n) \\ &\leq \tilde{d}(\iota(y_n), y) + \tilde{d}(y, \iota(y'_n)) + \tilde{d}(\iota(x_n), x) + \tilde{d}(x, \iota(x'_n)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Also ist unsere Definition der Addition unabhängig von der Wahl der gegen  $x$  bzw.  $y$  konvergenten Folgen  $(\iota(x_n))_n$  und  $(\iota(y_n))_n$  und somit wohldefiniert.

Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &= \lim_n \iota(\lambda(x_n + y_n)) = \lim_n \iota(\lambda x_n + \lambda y_n) \\ &= \lim_n \iota(\lambda x_n) + \lim_n \iota(\lambda y_n) = \lambda x + \lambda y. \end{aligned}$$

Analog verifiziert man  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  und  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ .  $\tilde{X}$  ist darüberhinaus eine Abelsche Gruppe mit neutralem Element  $\iota(0)$ , da für  $\iota(x_n) \rightarrow x$  gilt  $x + (-x) = \lim_n (\iota(x_n) + \iota(-x_n)) = \iota(0)$ . Damit ist  $\tilde{X}$  ein linearer Raum und  $\iota$  eine lineare Abbildung von  $X$  in  $\tilde{X}$ .

Wir versehen  $\tilde{X}$  durch  $\|x\| := \lim_n \|\iota(x_n)\|$  mit einer Norm. Man verifiziert unmittelbar, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Folge in  $X$  für die  $\iota(x_n)$  gegen  $x \in \tilde{X}$  konvergiert ist und so tatsächlich eine Norm definiert wird.

Es gilt für  $x, y \in \tilde{X}$  und  $(x_n)_n, (y_n)_n$  Folgen in  $X$  mit  $\iota(x_n) \rightarrow x$ ,  $\iota(y_n) \rightarrow y$  bezüglich  $\tilde{d}$

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x, y) &= \lim_n \tilde{d}(\iota(x_n), \iota(y_n)) = \lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n \|x_n - y_n\|_X \\ &= \lim_n \|\iota(x_n - y_n)\|_{\tilde{X}} = \|x - y\|_{\tilde{X}}. \end{aligned}$$

Also stimmt  $\tilde{d}$  mit der von der Norm  $\|\cdot\|_{\tilde{X}}$  induzierten Metrik überein womit  $\tilde{X}$  ein Banachraum ist in den  $X$  vermöge  $\iota$  isometrisch eingebettet ist.

Wegen Satz 2.2.4 gibt es zu zwei Vervollständigungen  $\tilde{X}_i$  mit Einbettungen  $\iota_i$ ,  $i = 1, 2$  eine Isometrie  $\iota$  mit  $\iota_2 = \iota \circ \iota_1$ . Für die Eindeutigkeit ist also nur noch zu zeigen dass jede solche Isometrie  $\iota$  eine lineare Abbildung ist: Für  $(x_n)_n$  und  $(y_n)_n$  Cauchyfolgen in  $X$  mit  $\iota(x_n) \rightarrow x$ ,  $\iota(y_n) \rightarrow y$  gilt

$$\iota(\alpha x + \beta y) = \lim_n \iota(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \iota(x) + \beta \iota(y)$$

also ist  $\iota$  linear. □

## 2.3 Banachräume

Für eine wichtige Klasse linearer Abbildungen folgt die Vollständigkeit bezüglich der Operatornorm aus der Vollständigkeit des Bildraumes. Wir bezeichnen mit  $L(X, Y)$  den linearen Raum aller in der Operatornorm beschränkten linearen Abbildungen des normierten Raumes  $X$  in den normierten Raum  $Y$ .  $L(X, Y)$  ist somit genau der lineare Raum aller stetigen linearen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ .

**Satz 2.3.1.** *Ist  $X$  ein normierter Raum und  $Y$  ein Banachraum, so ist  $L(X, Y)$  mit der Operatornorm ein Banachraum. Insbesondere ist der Dualraum eines normierten Raumes vollständig.*

*Beweis.* Sei  $(T_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $L(X, Y)$  dann ist  $(T_n(x))_n$  eine Cauchyfolge in  $Y$ , die wegen der Vollständigkeit von  $Y$  konvergiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit  $T(x)$ . Wegen der Linearität der Abbildungen  $T_n$  folgt, dass  $T : X \rightarrow Y$  linear ist. Weiters gilt

$$\|Tx\| \leq \|T_n x\| + \|Tx - T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| + \sup_{m \geq n} \|T_n - T_m\| \|x\|.$$

Da  $(T_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $L(X, Y)$  ist gibt es  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\|T_n - T_m\| \leq 1$  für  $n, m \geq n_0$ . Für  $n > n_0$  folgt also  $\|T_n x\| \leq (\|T_{n_0}\| + 1) \|x\|$  und damit dass  $T$  beschränkt ist, also  $T \in L(X, Y)$ .

Da  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  vollständige lineare Räume sind, ist der Dualraum eines normierten Raumes vollständig. ■

Für  $1 \leq p < \infty$  ist die Abbildung  $C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f \mapsto (\int |f|^p d\lambda^n)^{\frac{1}{p}} =: \|f\|_p$  eine Norm auf dem linearen Raum  $C_c(\mathbb{R}^n)$  der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, d.h. auf dem Raum aller stetiger Funktionen  $f$  für die der **Träger**  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$  kompakt ist. Nach Satz 2.2.6 gibt es eine Vervollständigung, also einen Banachraum, der eine isometrische Kopie von  $C_c(\mathbb{R}^n)$  enthält, die dicht in diesem Banachraum ist. Dieser Satz gibt uns aber keine brauchbare explizite Darstellung dieses Banachraumes, etwa als einen linearen Raum gewisser Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ .

Da die Abbildung  $\|\cdot\|_p$  auf dem Raum  $\mathcal{L}_p$  aller  $\mathfrak{S}$ -messbaren Funktionen  $f$ , für die  $\int |f|^p d\lambda^n < \infty$  gilt definiert werden kann, liegt es zunächst nahe zu versuchen die Vervollständigung von  $C_c$  als diesen Raum oder einen Teilraum desselben darzustellen. Auf  $\mathcal{L}_p$  ist aber  $\|\cdot\|_p$  keine Norm, da es Funktionen  $0 \neq f \in \mathcal{L}_p$  gibt, für die  $\|f\|_p = 0$  gilt. Aus der Maßtheorie ist bekannt, dass das Integral einer nichtnegativen messbaren reellen Funktion genau dann verschwindet, wenn  $f$   $\mu$ -fast überall verschwindet. Auf  $\mathcal{L}_p$  wird durch  $f \sim g$  für  $f = g$   $\mu$ -fast überall eine Äquivalenzrelation definiert. Die algebraischen Operationen des linearen Raumes  $\mathcal{L}_p$  können auf  $\mathcal{L}_p/\sim$  übertragen werden, indem

wir diese Operation auf Repräsentanten der Äquivalenzklassen anwenden, wenn wir zeigen, dass die Äquivalenzklasse des Bildes unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist. Dies ist sowohl für die Addition, als auch skalare Multiplikation unmittelbar klar. Danach verifizieren wir, dass unter diesen Operationen  $\mathcal{L}^p$  ein linearer Raum ist, auf dem die Norm  $\|\cdot\|_p$  durch  $\|[f]_{\sim}\|_p := \|f\|_p$  erklärt wird, da diese Definition von der Wahl des Repräsentanten  $f$  aus  $[f]$  unabhängig ist. Damit haben wir den linearen Raum  $L^p := \mathcal{L}^p / \sim$  zu einem normierten Raum gemacht.

Aus der Maßtheorie ist bekannt, dass für jeden Maßraum  $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$   $\|\cdot\|_p$  eine Norm und der Raum für  $d_1(x, y) < \frac{1}{3}\delta(\frac{\varepsilon}{3})$ ,  $L^p$  vollständig ist. Wir werden zeigen (Satz 2.5.1), dass für  $1 \leq p < \infty$  der Banachraum  $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda^n)$  als die Vervollständigung von  $C_c(\mathbb{R}^n)$  aufgefasst werden kann.

Für die Supremumsnorm ist die Vervollständigung von  $C_c(\mathbb{R}^n)$  relativ leicht als der Raum  $C_0(\mathbb{R}^n)$  zu erkennen, das ist der Raum „aller im Unendlichen verschwindenden“ stetigen Funktionen, d.h. der Raum aller stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ , für die es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine kompakte Menge  $K_\varepsilon$  gibt, für die  $\sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n \setminus K_\varepsilon\} < \varepsilon$  gilt, gibt.

Für  $p = \infty$  definieren wir den Raum  $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$  als den Raum aller  $\mathfrak{G}$ -messbaren Funktionen  $f$ , für die es eine  $\mu$ -Nullmenge  $N$  gibt, sodass  $f$  auf  $\Omega \setminus N$  beschränkt ist. Wir bilden dann wie zuvor die Äquivalenzklassen  $\mu$ -fast überall gleicher Funktionen, zeigen wie zuvor, dass die für die Elemente dieser Äquivalenzklassen definierten algebraischen Operationen erlauben diese auf den Äquivalenzklassen zu erklären womit auch die Menge dieser Äquivalenzklassen zu einem linearen Raum wird. Schließlich können wir auch auf diesen Äquivalenzklassen die Norm  $\|[f]_{\sim}\|_\infty$  als das **essentielle Supremum** von  $f$  erklären, da dieses von der Wahl des Repräsentanten  $f$  aus  $[f]_{\sim}$  unabhängig ist:

$$\|f\|_\infty := \inf\{\sup\{|f(x)| : x \in \Omega \setminus N\} : \mu(N) = 0\}.$$

So wird auch der Raum  $L^\infty := \mathcal{L}^\infty / \sim$  zu einem Banachraum.

Es zeigt sich also, dass obwohl zur Definition des Raumes  $(C_c(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$  nur das Riemannintegral notwendig ist, die Vervollständigung dieses Raumes nur durch Äquivalenzklassen von in der  $p$ -ten Potenz Lebesgueintegrierbaren Funktionen dargestellt werden kann. Wir sehen also, dass es im Allgemeinen eine nichttriviale Aufgabe ist, eine konkrete Darstellung der Vervollständigung eines normierten Raumes zu finden.

Unter einem **komplexen Maß** auf einem Messraum  $(\Omega, \mathfrak{G})$  verstehen wir eine Abbildung  $\mu$  von  $\mathfrak{G}$  nach  $\mathbb{C}$ , die  $\mu(\emptyset) = 0$  erfüllt und  $\sigma$ -additiv ist, d.h.  $\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$  für jede höchstens abzählbare Familie paarweise disjunkter Mengen  $A_i$  aus  $\mathfrak{G}$ . Stellen wir  $\mu$  als Real und Imaginärteil dar, so lässt sich  $\mu$  eindeutig als  $\mu = \nu_1 + i\nu_2$  mit signierten endlichen Maßen  $\nu_1, \nu_2$  darstellen. Unter

Verwendung der Hahn-Zerlegung können wir  $\nu_1$  und  $\nu_2$  als Differenz endlicher Maße darstellen:  $\nu_i = \nu_i^+ - \nu_i^-$ ,  $i = 1, 2$ . Diese Zerlegung  $\mu = \nu_1^+ - \nu_1^- + i\nu_2^+ - i\nu_2^-$  ist sogar eindeutig, wenn wir fordern, dass für  $i = 1, 2$  die Maße  $\nu_i^+$  und  $\nu_i^-$  zueinander singulär sind. Wir definieren

$$\begin{aligned} \int f d\mu &:= \int \operatorname{Re} f d\nu_1^+ - \int \operatorname{Re} f d\nu_1^- - \int \operatorname{Im} f d\nu_2^+ + \int \operatorname{Im} f d\nu_2^- \\ &+ i \left( \int \operatorname{Re} f d\nu_2^+ - \int \operatorname{Re} f d\nu_2^- + \int \operatorname{Im} f d\nu_1^+ - \int \operatorname{Im} f d\nu_1^- \right) \end{aligned}$$

für alle messbaren komplexwertigen Funktionen  $f$  für die alle Integrale auf der rechten Seite endlich sind.

Für ein komplexes Maß  $\mu$  ist die **Totalvariation**  $|\mu|$  das durch  $|\mu|(E) = \sup\{\sum_i |\mu(E_i)|\}$  definierte endliche Maß, wobei das Supremum über alle messbaren Partitionen  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $E$  gebildet wird.  $|\mu|$  ist tatsächlich ein Maß, denn  $|\mu|(\emptyset) = 0$  wegen  $\mu(\emptyset) = 0$ . Für eine disjunkte messbare Partition  $(E_l)_l$  der disjunkten Vereinigung  $A := \cup_i A_i$  messbarer Menge  $A_i$  ist  $(E_l \cap A_i)_{(i,l) \in \mathbb{N}^2}$  eine messbare Partition von  $A$  mit

$$\begin{aligned} \sum_l |\mu(E_l)| &= \sum_l \left| \sum_i \mu(A_i \cap E_l) \right| \leq \sum_{i,l} |\mu(A_i \cap E_l)| \\ &= \sum_i \sum_l |\mu(A_i \cap E_l)| \leq \sum_i |\mu|(A_i). \end{aligned}$$

Es folgt  $|\mu|(A) = \sup \sum_l |\mu(E_l)| \leq \sum_i |\mu|(A_i)$ . Andererseits ist für messbare Partitionierungen  $(E_l^i)_i$  von  $A_i$   $(E_l^i)_{(i,l) \in \mathbb{N}^2}$  eine messbare Partitionierung von  $A$  woraus  $\sum_i |\mu|(A_i) \leq |\mu|(A)$ , also insgesamt die  $\sigma$ -Additivität  $|\mu|(A) = \sum |\mu|(A_i)$  folgt.

Für  $\mu_1$  und  $\mu_2$  komplexe Maße auf  $(X, \mathfrak{G})$  ist auch  $\alpha\mu_1 + \beta\mu_2$  ein komplexes Maß, komplexe Maße bilden also einen linearen Raum. Wir definieren die **Variationsnorm**  $\|\mu\|$  eines komplexen Maßes  $\mu$  auf  $(\Omega, \mathfrak{G})$  als  $\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$ . Man verifiziert unmittelbar  $|\lambda\mu| = |\lambda|\|\mu\|$  und  $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + \|\mu\|$ . Weiters folgt aus  $|\mu(\Omega)| = 0$  auch  $\mu(A) = 0$  für alle messbaren Teilmengen  $A$  von  $\Omega$ , also  $\mu = 0$ . Die Variationsnorm macht also den linearen Raum der komplexen Maße zu einem normierten Raum  $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ .

**Satz 2.3.2.** *Unter der Variationsnorm ist der Raum  $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$  aller komplexen Maße auf einem Messraum  $(X, \mathfrak{G}, \Omega)$  ein Banachraum.*

*Beweis.* Wir haben die Vollständigkeit von  $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$  zu zeigen.

Sei  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{M}$ . Wir definieren eine Mengenfunktion  $\mu$  auf  $\mathfrak{G}$  durch  $\mu(A) := \lim_n \mu_n(A)$ . Dieser Grenzwert existiert, da für  $A$  aus  $\mathfrak{G}$  die Folge  $(\mu_n(A))_n$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{C}$  ist, wenn  $(\mu_n)$  eine Cauchyfolge in  $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$  ist. Offensichtlich gilt  $\mu(\emptyset) = 0$ .

Da  $(\mu_n)$  eine Cauchyfolge in  $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$  ist, gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für jede Folge paarweise disjunkter Mengen  $(A_i)_i$

$$\sum_i |(\mu_n - \mu_m)(A_i)| < \|(\mu_n - \mu_m)\| < \varepsilon/6 \quad \text{für } n, m \geq n_0 \quad (2.6)$$

gilt. Für eine Folge  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Mengen können wir aufgrund der Konvergenz von  $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\mu_{n_0}(A_i)|$  ein  $i_0$  wählen, sodass  $\sum_{i > i_0} |\mu_{n_0}(A_i)| < \varepsilon/6$  gilt, womit wegen der  $\sigma$ -Additivität von  $\mu_n$  und (2.6)

$$\begin{aligned} |\mu_n(\cup_{i > i_0} A_i)| &\leq \sum_{i > i_0} |\mu_n(A_i)| \leq \sum_{i > i_0} |\mu_{n_0}(A_i)| + \sum_{i > i_0} |(\mu_{n_0} - \mu_n)(A_i)| \\ &< \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \varepsilon/3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

für alle  $n \geq n_0$  folgt.

Aufgrund seiner Definition ist  $\mu$  eine endlich additive Mengenfunktion, also gilt

$$\begin{aligned} \left| \mu(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) - \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \right| &= \left| \mu(\cup_{i > i_0} A_i) - \sum_{i > i_0} \mu(A_i) \right| \\ &\leq |\mu(\cup_{i > i_0} A_i)| + \left| \sum_{i > i_0} \mu(A_i) \right|. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aus der Definition von  $\mu$  folgt, dass es ein  $n_1$  mit  $|(\mu - \mu_n)(\cup_{i > i_0} A_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_1$  gibt. Damit und mit (2.7) folgt für  $n \geq \max(n_0, n_1)$

$$|\mu(\cup_{i > i_0} A_i)| \leq |(\mu - \mu_n)(\cup_{i > i_0} A_i)| + |\mu_n(\cup_{i > i_0} A_i)| \leq 2\varepsilon/3. \quad (2.9)$$

Mit (2.7) erhalten wir auch

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i > i_0} \mu(A_i) \right| &\leq \sum_{i > i_0} |\mu(A_i)| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=i_0+1}^N |\mu(A_i)| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=i_0+1}^N |\mu_n(A_i)| \leq \varepsilon/3 \end{aligned}$$

und daraus mit (2.8) und (2.9)

$$\left| \mu(\cup_i A_i) - \sum_i \mu(A_i) \right| \leq \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig war folgt die  $\sigma$ -Additivität von  $\mu$ .  $\mu$  ist also ein komplexes Maß.



Aus (2.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |(\mu - \mu_n)(A_i)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N |(\mu_m - \mu_n)(A_i)| \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |(\mu_m - \mu_n)(A_i)| < \varepsilon/6 \end{aligned}$$

für alle  $N \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$  und alle messbaren Partitionen  $(A_i)_i$ , woraus  $\sum_{i=1}^{\infty} |(\mu - \mu_n)(A_i)| \leq \varepsilon/6 \forall n \geq n_0$  und alle Partitionen folgt. Also konvergiert  $(\mu_n)_n$  gegen  $\mu$ .  $\square$

## 2.4 Faltung

Für Lebesgue-messbare Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die **Faltung**  $f * g$  durch

$$f * g(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y})$$

falls dieses Integral für  $\lambda^n$ -fast alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  existiert.

Wegen der Stetigkeit der Abbildung  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{y}$  ist diese Abbildung messbar und für jede messbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist die Funktion  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  messbar. Klarerweise ist auch für jede messbare Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Funktion  $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y})$  messbar. Aus dem Satz von Fubini folgt, dass wenn die Funktion  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})$  integrierbar auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  ist, die Funktion  $\mathbf{x} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y})$  für fast alle  $\mathbf{x}$  existiert und integrierbar ist mit

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * g(\mathbf{x})| d\lambda^n(\mathbf{x}) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})||g(\mathbf{y})| d\lambda^n(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\lambda^n(\mathbf{x}) |g(\mathbf{y})| d\lambda^n(\mathbf{y}) = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Also ist die Faltung zweier integrierbarer Funktionen definiert und integrierbar. Mathematisch nicht korrekt aber wegen der kompakteren Formulierung sprechen wir auch von der Faltung zweier Funktionen aus  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , womit wir eigentlich meinen, dass die für integrierbare Funktionen definierte Faltung über Repräsentanten als Operation auf den Äquivalenzklassen des  $L^1$  aufgefasst werden kann. Hierfür müssen wir uns nur überlegen, dass die so definierte Operation als Funktion zwar nicht unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist, das Faltungsprodukt jedoch für jede Wahl von Repräsentanten in der gleichen Äquivalenzklasse liegt. Die Faltung ist also als Abbildung von  $L^1 \times L^1$  nach  $L^1$  wohldefiniert.

Mit ähnlichen Überlegungen zeigt man dass die Faltung als Abbildung von  $L^1 \times L^\infty$  nach  $L^\infty$  definiert ist.

Für Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{T}$  und  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  ist die **Translation**  $\tau_{\mathbf{z}}f$  durch  $\tau_{\mathbf{z}}f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{z})$  definiert.

**Proposition 2.4.1.** Für  $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$  gilt

- $f * g = g * f, \quad (f+g)*h=f*h+g*h$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$
- $\tau_{\mathbf{z}}(f * g) = (\tau_{\mathbf{z}}f) * g = f * (\tau_{\mathbf{z}}g)$
- $\text{supp}(f * g) \subseteq \overline{\{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in \text{supp}(f), \mathbf{y} \in \text{supp}(g)\}}$

*Beweis.* Die ersten Behauptungen verifiziert man unmittelbar durch Nachrechnen.

Die vierte Behauptung folgt wegen

$$\begin{aligned} f * g(\mathbf{x}) \neq 0 &\Rightarrow \exists \mathbf{y} : f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \neq 0 \wedge g(\mathbf{y}) \neq 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{y} + \text{supp}(f) \wedge \mathbf{y} \in \text{supp}(g) \Rightarrow \mathbf{x} \in \text{supp}(f) + \text{supp}(g). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Die Faltung  $f * g$  kann für positive  $g$  mit  $\|g\|_1 = 1$  als Mittelung interpretiert werden, d.h.  $f * g(\mathbf{x})$  ist das bezüglich der Gewichtsfunktion  $g$  gebildete Mittel von  $f$  an  $\mathbf{x}$ .

Für einen **Multiindex**  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  mit **Ordnung**  $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$  bezeichnet  $D^\alpha$  die partielle Ableitung  $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ . Für eine offene Teilmenge  $\Omega$  von  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet  $C^k(\Omega)$  den Raum aller bis zur Ordnung  $k$  stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$  mit  $C^0(\Omega) := C(\Omega)$ , sowie  $C_c^k(\Omega)$  den Raum aller bis zur Ordnung  $k$  stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$  mit kompaktem Träger. Mit  $C_0(\mathbb{R}^n)$  bezeichnen wir den Raum aller stetigen Funktionen  $f$ , die „im Unendlichen verschwinden“ d.h. für die es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^n$  gibt, sodass  $|f(x)| < \varepsilon \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K$  gilt.

**Proposition 2.4.2.** Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$  mit  $0 \leq k \leq \infty$  existiert das Faltungsprodukt  $f * g$  und es gilt  $f * g \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ . Für  $|\alpha| \leq k$  gilt

$$D^\alpha(f * g)(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{y}) D^\alpha g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y}). \quad (2.11)$$

*Beweis.* Das Faltungsprodukt existiert klarerweise, da für  $f \in L^1$  und  $g \in C_c^k$  auch  $f\tau_{\mathbf{y}}g \in L^1$  gilt. Für  $g \in C_c^1$  folgt mit Satz 2.1.8 wegen

$$\left| f(\mathbf{y}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right| \leq |f(\mathbf{y})| \left\| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\|_\infty,$$

dass  $f * g$  differenzierbar mit  $\frac{\partial f * g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{y}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y})$  ist und durch wiederholtes Anwenden von Satz 2.1.8 folgt (2.11).

Ist  $g$  aus  $C_c(\mathbb{R}^n)$ , so ist  $g$  sogar gleichmäßig stetig, d.h.  $|g(\mathbf{z}) - g(\mathbf{w})| < \varepsilon$  für  $|\mathbf{z} - \mathbf{w}| \leq \delta$ , womit folgt

$$\begin{aligned} |f * g(\mathbf{x}) - f * g(\mathbf{x} + \mathbf{z})| &= \left| \int f(\mathbf{y})(g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{z} - \mathbf{y})) d\lambda^n(\mathbf{y}) \right| \\ &\leq \int |f(\mathbf{y})| \varepsilon d\lambda^n(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Also ist  $f * g$  stetig für  $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ . Wegen  $|f * g(\mathbf{x})| \leq \int_{\mathbf{x} - \text{supp}(g)} |f| d\lambda^n \|g\|_\infty$  folgt mit  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, r)} |f| d\lambda^n = 0$ :  $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$  für  $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$  und wegen (2.11) damit  $f * g \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$  für  $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

Die Faltung mit einer differenzierbaren Funktion ist also zugleich eine Glättung, d.h.  $f * g$  ist aus  $C^n$  für  $f \in L^1$  und  $g \in C_c^n$ . Will man eine Funktion durch Faltung durch eine glatte Funktion approximieren, so liegt es nahe für den **Faltungskern**  $g$  eine Funktion zu wählen die möglichst kleinen Träger und möglichst hohe Differenzierbarkeitsordnung hat. Wir werden sehen, dass es sogar  $C^\infty$ -Funktionen mit kompaktem Träger gibt. Klarerweise gibt es keinen kleinsten möglichen Träger, deshalb betrachten wir eine Familie  $(\eta_\delta)_\delta$ ,  $\delta > 0$  von  $C^\infty$ -Funktionen mit Träger in  $B(0, \delta)$  und zeigen zuerst die Existenz solcher Funktionen:

**Lemma 2.4.3.** Für  $\rho > 0$  sind die Funktionen

$$f_\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-\rho^2}{\rho^2 - |\mathbf{x}|^2}\right) & |\mathbf{x}| < \rho \\ 0 & |\mathbf{x}| \geq \rho \end{cases}$$

in  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit Träger  $\overline{B(0, \rho)}$ .

*Beweis.* Wegen  $f_\rho(\mathbf{x}) = f_1(\frac{1}{\rho}\mathbf{x})$  genügt es die Aussage für  $\rho = 1$  zu beweisen:  $f_1$  hat klarerweise Träger  $\overline{B(0, 1)}$  und ist stetig, ist also in  $C_c(\mathbb{R}^n)$ . Durch vollständige Induktion folgt unmittelbar, dass

$$D^\alpha f(\mathbf{x}) = r_\alpha(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x})$$

für  $|\mathbf{x}| < 1$  und eine rationale Funktion  $r(\mathbf{x}) = p_\alpha(\mathbf{x}) / (1 - |\mathbf{x}|^2)^{|\alpha|+1}$ ,  $p_\alpha$  Polynom in  $x_1, \dots, x_n$  gilt. Da  $q(s)e^{-s} \rightarrow 0$  für  $s \rightarrow \infty$  und jedes Polynom  $q$  folgt für  $|\mathbf{x}_0| = 1$ :  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq 1 - |\mathbf{x}|$  und damit für  $|\mathbf{x}| \leq 1$ :

$$2|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq 2(1 - |\mathbf{x}|) \geq (1 + |\mathbf{x}|)(1 - |\mathbf{x}|) = 1 - |\mathbf{x}|^2$$

und somit

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} (D^\alpha f(\mathbf{x}) - D^\alpha f(\mathbf{x}_0)) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} D^\alpha f(\mathbf{x}) \\ &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{p_\alpha(\mathbf{x})}{(1 - |\mathbf{x}|^2)^{|\alpha|+1}} \exp\left(\frac{-1}{1 - |\mathbf{x}|^2}\right) \\ &\leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{2p_\alpha(\mathbf{x})}{(1 - |\mathbf{x}|^2)^{|\alpha|+2}} \exp\left(\frac{-1}{1 - |\mathbf{x}|^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

$f_1$  ist also in  $C^\infty$ . □

Unter einer **Approximativen Einheit** oder einem **Mollifier** verstehen wir eine Familie  $(\eta_\delta)_\delta$  von Funktionen mit  $\eta_\delta(\mathbf{x}) := \delta^{-n} \eta(\frac{1}{\delta} \mathbf{x})$ , wobei

- $\eta \in C_c^\infty$ ,  $\text{supp}(\eta) \subseteq \overline{B(0,1)}$
- $\eta(\mathbf{x}) \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \eta d\lambda^n = 1$ .

Eine mögliche Wahl für  $\eta$  wäre  $(\int f d\lambda^n)^{-1} f$  mit der  $C_c^\infty$ -Funktion aus Lemma 2.4.3. Wir werden im Folgenden jedoch nie explizit mit diesen Funktionen rechnen, sondern nur diese Familie von Faltungskernen für Approximationsargumente verwenden wie in Satz 2.5.3.

Für eine Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes  $X$  und  $x \in X$  definieren wir den Abstand  $\text{dist}(x, A)$  von  $x$  zu  $A$  als  $\inf\{d(x, a) : a \in A\}$ . Als unmittelbare Folge der Definition der Faltung bzw. Satz von Fubini, Proposition 2.4.1 und den Eigenschaften einer approximativen Einheit erhalten wir:

**Proposition 2.4.4.** *Für eine approximative Einheit  $(\eta_\delta)_\delta$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  gilt:*

*Für  $\text{dist}(\mathbf{x}, \text{supp}(f)) \geq \delta$  folgt  $f * \eta_\delta(\mathbf{x}) = 0$ . Ist  $f$  konstant auf einer Menge  $C$  mit Wert  $c$ , so gilt für  $\text{dist}(\mathbf{x}, C^c) \geq \delta$ :  $f * \eta_\delta(\mathbf{x}) = c$ .*

## 2.5 $L^p$ -Räume

Den Elementen des  $L^p$ , d.h. den Äquivalenzklassen messbarer zur  $p$ -ten Potenz integrierbarer Funktionen kann man schwer direkt Eigenschaften ablesen, da die Konstruktion dieser Äquivalenzklassen sowie die von messbaren Funktionen nicht explizit die Elemente des  $L^p$  darstellt. Wir werden deshalb zum Nachweis gewisser Eigenschaften von Elementen des  $L^p$  diese Eigenschaften für eine dichte Teilmenge nachweisen und dann versuchen mit Stetigkeits- bzw. Approximierbarkeitsargumenten auf die Gültigkeit dieser Eigenschaft für alle Elemente

des  $L^p$  zu schließen. In Abhängigkeit von der untersuchten Eigenschaft werden wir also versuchen passende dichte Teilräume zu finden für die die entsprechende Aussage leicht zu verifizieren ist.

Es sei  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$  ( $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ ) der Raum aller reell oder komplex-wertigen **einfachen Funktionen** auf  $\mathbb{R}^n$ . Das ist der lineare Raum aller Funktionen der Art  $\sum_{i \in F} a_i \mathbb{1}_{A_i}$  mit einer endlichen Indexmenge  $F$ , messbaren Mengen  $A_i$  mit  $\lambda^n(A_i) < \infty$  und Koeffizienten  $a_i \in \mathbb{R}$  ( $a_i \in \mathbb{C}$ ).

Für eine offene Teilmenge  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir den linearen Raum aller Funktionen der Art  $\sum_{i \in F} a_i \mathbb{1}_{W_i}$  mit einer endlichen Indexmenge  $F$ , halboffenen dyadischen Würfeln

$$W_i = \times_{l=1}^n [k_{i,l} 2^{-m}, (k_{i,l} + 1) 2^{-m}) \subset \Omega$$

mit  $k_{i,l} \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und  $a_i \in \mathbb{R}$  ( $a_i \in \mathbb{C}$ ) mit  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\Omega)$  ( $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ ),  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  bzw.  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  oder kurz mit  $\mathcal{S}$ .

**Satz 2.5.1.** Für  $1 \leq p < \infty$  sind  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ ,  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  und  $C_{c,\mathbb{R}}^{\infty}$  dicht in  $L_{\mathbb{R}}^p$  und  $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  und  $C_{c,\mathbb{C}}^{\infty}$  dicht in  $L_{\mathbb{C}}^p$ .

In  $L_{\mathbb{R}}^{\infty}$  ( $L_{\mathbb{C}}^{\infty}$ ) sind die Teilräume einfacher Funktionen  $\sum_{i \in F} a_i \mathbb{1}_{A_i}$  mit  $\lambda^n(A_i) \leq \infty$  mit  $a_i \in \mathbb{R}$  resp.  $\mathbb{C}$  dicht.

*Beweis.* Da jede komplexwertige Funktion  $f$  als  $g_1 + ig_2$  mit  $g_1, g_2$  reell dargestellt werden kann genügt es den Beweis für reellwertige Funktionen zu führen.

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{L}^p$  den Raum aller messbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ , deren  $p$ -te Potenz integrierbar ist.  $\|\cdot\|_p$  ist auf  $\mathcal{L}^p$  eine Seminorm und  $L^p = \mathcal{L}^p / K$  mit  $K = \{f \in \mathcal{L}^p : \|f\|_p = 0\}$ .

Wir haben zu zeigen, dass es für  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p$  und  $\varepsilon > 0$  eine Funktion  $g \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$  gibt mit  $\|f - g\|_p < \varepsilon$ , also mit  $\int |f - g|^p d\lambda^n < \varepsilon^p$ . Da jede messbare reellwertige Funktion als Summe einer positiven und einer negativen messbaren Funktion dargestellt werden kann, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass  $f \geq 0$  gilt. Eine positive integrierbare Funktion ist aber der monotone Grenzwert einer Folge  $(g_m)_m$  von positiven Funktionen aus  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ , d.h.  $g_m \uparrow f$ . Wegen  $\int f^p d\lambda^n < \infty$  und  $0 \leq f - g_m \leq f$  folgt aus dem Satz der dominierten Konvergenz

$$\lim_m \int_{\mathbb{R}^n} (f - g_m)^p d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_m (f - g_m)^p d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} 0 d\lambda^n = 0.$$

Damit liegt  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$  dicht in  $L_{\mathbb{R}}^p$ .

Um zu sehen, dass auch  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  dicht in  $L_{\mathbb{R}}^p$  liegt, genügt es zu zeigen, dass jede Funktion aus  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$  bezüglich der  $L^p$ -Norm beliebig genau durch Funktionen aus  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  approximiert werden kann. Hierfür reicht es diese Approximationseigenschaft für charakteristische Funktionen  $\mathbb{1}_A$ ,  $A$  Lebesgue-messbar mit  $\lambda^n(A) < \infty$

zu zeigen. Der Ring der dyadischen Würfel erzeugt aber die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen, da jede offene Teilmenge von  $\Omega$  als abzählbare Vereinigung von dyadischen Würfeln in  $\Omega$  dargestellt werden kann. Für  $\varepsilon > 0$  gibt es nach dem Approximationssatz der Maßtheorie eine Menge  $C_\varepsilon$  aus dem Ring der endlichen Vereinigungen dyadischer halboffener Würfel mit  $\lambda^n(A \Delta C_\varepsilon) < \varepsilon$ . Damit gilt aber  $\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{C_\varepsilon}|^p d\lambda^n \leq \varepsilon$ . Wegen  $\mathbb{1}_{C_\varepsilon} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  folgt, dass  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  dicht in  $L^p$  liegt.

Um zu sehen, dass  $C_c^\infty$  dicht in  $L^p$  liegt, genügt es nun zu zeigen dass die charakteristische Funktionen eines dyadischen Würfels  $W = \times_{l=1}^n [k_l 2^{-m}, (k_l + 1) 2^{-m})$  in der  $L^p$ -Norm durch Funktionen aus  $C_c^\infty$  approximiert werden können. Nach Proposition 2.4.2 ist  $\mathbb{1}_W * \eta_\delta$  aus  $C^\infty$  und wegen Proposition 2.4.1 hat  $\mathbb{1}_W * \eta_\delta$  kompakten Träger. Aus Proposition 2.4.4 folgt  $0 \leq \mathbb{1}_W * \eta_\delta \leq 1$  sowie  $\mathbb{1}_W * \eta_\delta(\mathbf{x}) = 1$  für  $\mathbf{x} \in W$ ,  $\text{dist}(\mathbf{x}, \partial W) \geq \delta$  und  $\mathbb{1}_W * \eta_\delta(\mathbf{x}) = 0$  für  $\mathbf{x} \in W^c$ ,  $\text{dist}(\mathbf{x}, \partial W) \geq \delta$ . Wegen

$$\lambda^n(\{\mathbf{y} : \text{dist}(\mathbf{y}, \partial W) \leq \delta\}) \leq (2^{-m} + 2\delta)^n - (2^{-m} - 2\delta)^n \leq 4\delta n(2^{-m} + 2\delta)^n$$

für  $\delta \leq 2^{-m-1}$  folgt  $\|\mathbb{1}_W * \eta_\delta - \mathbb{1}_W\|_p^p \leq \lambda^n(\{\mathbf{y} : \text{dist}(\mathbf{y}, \partial W) \leq \delta\}) \rightarrow 0$  für  $\delta \rightarrow 0$ .

Jede reellwertige messbare Funktion kann wegen  $|f(\mathbf{x}) - [nf(\mathbf{x})]/n| \leq 1/n$  gleichmäßig durch einfache Funktionen approximiert werden und  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$  liegt damit dicht in  $L^\infty(\mathbb{R})$ .  $\square$

Speziell im folgenden Kapitel über Fourierreihen müssen wir einige dieser Sätze von  $\mathbb{R}$  auf den Torus  $\mathbb{T}$  übertragen. Durch das Lebesguemaß auf  $[-\pi, \pi)$  und die kanonische Abbildung  $\iota_{[-\pi, \pi)} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $x \mapsto x + 2\pi\mathbb{Z}$  wird ein Maß auf  $\mathbb{T}$  induziert. So kann man mit Proposition 1.4.8  $\mathbb{T}$  topologisch und maßtheoretisch mit dem komplexen Einheitskreis identifizieren. Für die Übertragung der vorangegangenen Ergebnisse ist es aber zweckmäßig Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{T}$  in kanonischer Weise mit  $2\pi$ -periodischen Funktionen  $\tilde{f}$  auf  $\mathbb{R}$  zu identifizieren:  $f(x) = \tilde{f}(\iota^{-1}(x))$  und verwenden für beide Funktionen das gleiche Symbol  $f$ . Die Faltung zweier  $2\pi$ -periodischer, auf  $[-\pi, \pi)$  integrierbarer Funktion  $f, g$  kann so durch

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) dt$$

definiert werden, wobei wahlweise über jedes andere Intervall der Länge  $2\pi$  integriert werden kann.

Stetige Funktionen liegen auch auf dem  $d$ -dimensionalen Torus  $\mathbb{T}$  dicht in  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Es gilt sogar

**Satz 2.5.2.** *Der Raum der trigonometrischen Polynome auf  $\mathbb{T}$  liegt für  $1 \leq p < \infty$  dicht in  $L^p(\mathbb{T})$ .*

*Beweis.*  $\mathbb{T}$  ist maßtheoretisch isomorph zu  $W = [0, 2\pi)^d$ , d.h. die Abbildung  $\mathbf{x} \mapsto (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_d})$  ist eine maßtreue Bijektion. Eine Funktion  $f \in L^p(\mathbb{T})$  kann also

mit einer Funktion  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $\text{supp } \tilde{f} \subseteq \overline{W}$  identifiziert werden. Nach Satz 2.5.1 gibt es für  $\varepsilon > 0$  eine Funktion  $\tilde{g} \in C_c(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|\tilde{f} - \tilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$ . Damit gilt auch  $\|\tilde{f} - \tilde{g}\|_{L^p(W)} < \varepsilon$ . Identifiziert man  $\tilde{g}$  mit einer Funktion  $g \in C(\mathbb{T})$ , so ist  $g$  in Punkten von  $\mathbb{T}$  in denen eine Koordinate 1 ist nicht notwendigerweise stetig. Betrachten wir eine Folge stetiger Funktionen  $(\tilde{h}_i)$  auf  $W$  mit Werten in  $[0, 1]$ , die im Inneren von  $W$  gegen 1 konvergiert und auf dem Rand von  $W$  verschwindet, so folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz  $\|\tilde{g} - \tilde{g}\tilde{h}_i\|_{L^p(W)} \rightarrow_{i \rightarrow \infty} 0$ . Die Funktionen  $\tilde{g}\tilde{h}_i$  entsprechen aber auf  $\mathbb{T}$  stetigen Funktionen  $gh_i$ . Es folgt, dass  $C(\mathbb{T})$  dicht in  $L^p(\mathbb{T})$  liegt.

Nach dem Satz von Stone-Weierstraß 1.5.2 ist der Raum der trigonometrischen Polynome aber dicht in  $C(\mathbb{T})$  bezüglich der Maximumsnorm. Wegen  $\|f\|_p \leq (2\pi)^{1/p} \|f\|_\infty$  folgt, dass der Raum der trigonometrischen Polynome dicht in  $L^p(\mathbb{T})$  ist.  $\square$

Als typisches Beispiel eines Beweises, der auf einem Dichtheitsargument beruht zeigen wir, dass Translationen stetig in  $L^p$  sind.

**Satz 2.5.3.** Für  $1 \leq p < \infty$  und  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  oder  $f \in L^p(\mathbb{T})$  ist die Translation  $\mathbb{R}^d \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathbf{z} \mapsto \tau_{\mathbf{z}}f$  eine stetige Abbildung.

*Beweis.* Für  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und  $\varepsilon > 0$  wählen wir eine Funktion  $g \in C_c^\infty$  mit  $\|f - g\|_p \leq \varepsilon/3$ , was nach Satz 2.5.1 möglich ist.  $g$  ist als stetige Funktion mit kompaktem Träger nach Satz 1.4.13 gleichmäßig stetig, also gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $\|g - \tau_{\mathbf{z}}g\|_p < \varepsilon/3$  für  $|\mathbf{z}| < \delta$ . Es folgt mit der Dreiecksungleichung und der Translationsinvarianz der  $L^p$ -Norm für  $|\mathbf{z}| < \delta$

$$\begin{aligned} \|f - \tau_{\mathbf{z}}f\|_p &\leq \|f - g\|_p + \|g - \tau_{\mathbf{z}}g\|_p + \|\tau_{\mathbf{z}}g - \tau_{\mathbf{z}}f\|_p \\ &= 2\|f - g\|_p + \|g - \tau_{\mathbf{z}}g\|_p \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Der Beweis für Funktionen aus  $L^p(\mathbb{T})$  verläuft analog wenn wir für  $g$  trigonometrische Polynome betrachten.  $\square$

**Satz 2.5.4.** Für  $1 \leq p < \infty$  und  $f \in L^p$ ,  $h \in L^1$  gilt  $f * h \in L^p$  mit

$$\|f * h\|_p \leq \|f\|_p \|h\|_1.$$

Für jeden Mollifier  $(\eta_\delta)_\delta$  gilt

$$\|f - f * \eta_\delta\|_p \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} 0.$$

*Beweis.* Für  $g \in L^q$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$  folgt aus der Hölder'schen Ungleichung für alle  $y$

$$\int |f(x-y)g(y)| d\lambda^n(y) \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

damit für  $h \in L^1$  die Integrierbarkeit von  $f(x-y)g(y)h(x)$  und mit Fubini

$$\begin{aligned} \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_1 &\geq \left| \int \int f(x-y)g(y)h(x) d\lambda^n(y) d\lambda^n(x) \right| \\ &= \left| \int \int f(x-y)h(x) d\lambda^n(x) g(y) d\lambda^n(y) \right|. \end{aligned}$$

Insbesondere existiert das Integral  $\int f(x-y)h(x) d\lambda^n(x)$  für fast alle  $y$  und die Abbildung  $g \mapsto \int \int f(x-y)h(x) d\lambda^n(x) g(y) d\lambda^n(y)$  ist ein stetiges lineares Funktional auf  $L^q$  mit Norm  $\leq \|h\|_1 \|f\|_p$ . Nach dem Darstellungssatz von Riesz (vgl. Maßtheorie) ist jedes stetige lineare Funktional  $\Phi$  auf  $L^q$  von der Form  $\Phi(g) = \int \varphi g d\lambda$  mit einem eindeutigen Element  $\varphi \in L^p$ , mit  $p = \frac{q}{q-1}$  und  $\|\Phi\| = \|\varphi\|_p$ . Es folgt  $f * h = \varphi$ ,  $f * h \in L^p$  und  $\|f * h\| \leq \|f\|_p \|h\|_1$ .

Für eine Funktion  $g \in L^q$ , ( $q = p/(p-1)$  für  $1 < p < \infty$ , bzw  $q = \infty$  für  $p = 1$ ) gilt mit dem Satz von Fubini, der Hölder'schen Ungleichung und Satz 2.5.3

$$\begin{aligned} \left| \int (f - f * \eta_\delta) g d\lambda^n \right| &= \left| \int \int (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \eta_\delta(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) \right| \\ &= \left| \int \int (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})) g(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) \eta_\delta(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y}) \right| \\ &\leq \int \|f - \tau_{\mathbf{y}} f\|_p \|g\|_q \eta_\delta(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y}) \leq \sup_{|\mathbf{y}| \leq \delta} \|f - \tau_{\mathbf{y}} f\|_p \|g\|_q \leq \varepsilon \|g\|_q \end{aligned}$$

für  $\delta < \delta_0(\varepsilon)$ . Die Abbildung  $g \mapsto \int (f - f * \eta_\delta) g d\lambda^n$  ist also ein stetiges lineares Funktional auf  $L^q$  mit Norm  $\leq \varepsilon$ . Aus dem Darstellungssatz von Riesz sind damit  $f$  und  $f - f * \eta_\delta$  Elemente des  $L^p$ , also auch  $f * \eta_\delta$  mit  $\|f - f * \eta_\delta\|_p \leq \varepsilon$  für  $\delta < \delta_0(\varepsilon)$ . Es folgt  $\|f - f * \eta_\delta\|_p \rightarrow 0$  für  $\delta \rightarrow 0$ .  $\blacksquare$

## 2.6 Hilberträume

In Verallgemeinerung des Euklidischen  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ) kann man Skalarprodukträume beliebiger Dimension definieren: Auf einem  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ -linearen Raum  $X$  heißt eine positiv definite schiefsymmetrische Sesquilinearform **Skalarprodukt**. Wir betrachten im Folgenden nur den Fall eines  $\mathbb{C}$ -linearen Skalarproduktraumes, alle Sätze gelten aber auch für  $\mathbb{R}$ -lineare Skalarprodukträume. Ein Skalarprodukt ist also eine Abbildung  $X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ , die wir mit  $(x, y)$  bezeichnen und für  $x, y \in X$ ;  $\lambda \in \mathbb{C}$

- i)  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- ii)  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$



$$\text{iii) } (x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$\text{iv) } (x, x) > 0 \text{ für } x \neq 0.$$

erfüllt. Aus iii) folgt dass  $(x, x)$  immer reell ist, aus ii) folgt  $(0, 0) = 0$  und aus i), ii) und iii) folgt dass das Skalarprodukt konjugiert linear im zweiten Argument ist. Ein linearer Raum mit Skalarprodukt heißt **Skalarproduktraum**.

Durch  $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$  wird auf  $x$  durch das Skalarprodukt eine Norm definiert: Nur die Dreiecksungleichung ist nicht unmittelbar klar, d.h. wir müssen zeigen dass  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  gilt. Wegen  $\operatorname{Re}(x, y) \leq |(x, y)|$  folgt dies aber nach Quadratur aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung 2.6.1.

Ist der Skalarproduktraum  $X$  bezüglich dieser Norm vollständig, so heißt er **Hilbertraum** und wird üblicherweise mit  $H$  bezeichnet. Unter der Norm in einem Skalarproduktraum verstehen wir immer diese soeben über das Skalarprodukt definierte Norm.

Es gilt die

**Satz 2.6.1** (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). *In einem Skalarproduktraum  $X$  gilt*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in X,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

*Beweis.* Der Beweis überträgt sich ohne Änderungen vom endlichdimensionalen Fall:

Wegen i), ii) und iii) gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = \lambda^2 (y, y) + 2\operatorname{Re}(x, \lambda y) + (x, x) = (x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0.$$

Diese quadratische Gleichung in  $\lambda$  darf also höchstens eine Nullstelle haben, was genau für  $(\operatorname{Re}(x, y))^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$  der Fall ist. Ersetzen wir  $y$  durch  $\tilde{y} := e^{i \arg(x, y)} y$ , so gilt  $\operatorname{Re}(x, \tilde{y}) = |(x, y)|$  und  $(\tilde{y}, \tilde{y}) = (y, y)$  und die Ungleichung folgt. Wegen iv) gilt Gleichheit genau für  $x + \lambda y = 0$ , also für  $x, y$  linear abhängig.  $\square$

**Korollar 2.6.2.** *Das Skalarprodukt ist stetig als Abbildung von  $X \times X$  nach  $\mathbb{C}$ . ( $X \times X$  ist mit der Produkttopologie versehen).*

*Beweis.* Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |(x, y) - (x_0, y_0)| &= |(x - x_0, y) + (x_0, y - y_0)| \\ &\leq \|x - x_0\| \|y\| + \|x_0\| \|y - y_0\| \\ &\leq \|x - x_0\| \|y - y_0\| + \|x - x_0\| \|y_0\| + \|x_0\| \|y - y_0\| \end{aligned}$$

und hieraus die Stetigkeit aus der Stetigkeit der Norm.  $\square$

Ein Skalarproduktraum kann als normierter Raum gemäß Satz 2.2.6 zu einem Banachraum vervollständigt werden. Ähnlich wie im Beweis von Satz 2.2.6 zeigt man, dass auf dieser Vervollständigung  $H$  ein Skalarprodukt als  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$  für  $\iota(x_n) \rightarrow \tilde{x}$ ,  $\iota(y_n) \rightarrow \tilde{y}$  definiert wird. Dieses ist auf beschränkten Teilmengen von  $H \times H$  gleichmäßig stetig als Abbildung von  $H \times H$  nach  $\mathbb{C}$ , wenn  $H \times H$  etwa mit der Metrik  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|$  versehen wird. (Hier bezeichnet  $(x_i, y_i)$  ein Element von  $H \times H$  und nicht das Skalarprodukt!)

*Beispiel 2.6.3.* Auf dem reell oder komplex-linearen Folgenraum  $\ell^2$  aller quadratisch summierbaren reell oder komplexwertigen Folgen wird durch

$$((a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}}) := \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \bar{b}_i$$

ein Skalarprodukt definiert. Wir bezeichnen diesen Skalarproduktraum mit  $\ell^2(\mathbb{N})$  und seine Norm mit  $\|\cdot\|_2$  und zeigen dass er vollständig, also ein Hilbertraum ist: Für  $\mathbf{a}_j := (a_{j,i})_{i \in \mathbb{N}}$  gilt

$$\|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_l\|_2^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_{k,i} - a_{l,i}|^2 \geq |a_{k,j} - a_{l,j}|^2 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Ist also  $(\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\ell^2$  so konvergieren für alle  $j \in \mathbb{N}$  die Folgen  $(a_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$ . Wir bezeichnen die Folge der Grenzwerte mit  $\mathbf{a}_0$  und zeigen dass  $\mathbf{a}_0 \in \ell^2$  und  $\|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0\|_2 \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt. Für endliche Summen gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\left( \sum_{i \leq n} |a_{0,i}|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i \leq n} |a_{k,i}|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i \leq n} |a_{k,i} - a_{0,i}|^2 \right)^{1/2}.$$

Wegen  $|a_{k,i} - a_{0,i}| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  und alle  $i \in \mathbb{N}$  konvergiert der zweite Summand rechts gegen 0. Zugleich gilt  $(\sum_{i \leq n} |a_{k,i}|^2)^{1/2} \leq \|\mathbf{a}_k\|_2$ . Da  $(\mathbf{a}_k)$  eine Cauchyfolge in  $\ell^2$  ist, ist  $\{\|\mathbf{a}_k\|_2 : k \in \mathbb{N}\}$  durch eine von  $n$  unabhängige Konstante  $C$  beschränkt. Damit folgt mit  $k \rightarrow \infty$

$$\left( \sum_{i \leq n} |a_{0,i}|^2 \right)^{1/2} \leq C,$$

also die Konvergenz von  $\sum_{i \in \mathbb{N}} |a_{0,i}|^2$ .

Für endliche Summen gilt

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i \leq n} |a_{k,i} - a_{0,i}|^2 \right)^{1/2} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \sum_{i \leq n} |a_{k,i} - a_{l,i}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_{k,i} - a_{l,i}|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Da  $(\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist folgt die bezüglich  $n$  gleichmäßige Konvergenz gegen 0 der rechten Seite für  $k \rightarrow \infty$  und damit  $\|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0\|_2 \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

Für  $(x, y) = 0$  folgt unmittelbar

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (\text{Satz von Pythagoras}).$$

Gilt für eine Familie  $(e_i)_{i \in I}$   $(e_i, e_j) = 0$  für  $i \neq j$  und  $\|e_i\| = 1 \forall i \in I$ , so heißt  $(e_i)_{i \in I}$  **Orthonormalsystem**.

Sei  $(e_i)_{i \in I}$  ein Orthonormalsystem in  $H$  und  $M$  der Abschluss der linearen Hülle von  $\{e_i : i \in I\}$ . Für endliche Teilmengen  $E$  von  $I$  sind linearen Abbildungen  $P_E : H \rightarrow M$ ,  $P_E x := \sum_{i \in E} (x, e_i) e_i$  definiert. Man verifiziert unmittelbar, dass  $(P_E x - x, e_i) = 0$  für  $i \in E$  und damit

$$(P_E x - x, y) = 0 \quad \text{für } y \in \text{Span}\{e_i : i \in E\} \text{ insbes. für } y = P_E x. \quad (2.12)$$

Diese Aussage gilt zunächst für Linearkombinationen  $y$  von Vektoren  $e_i, i \in E$  und wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes (Korollar 2.6.2) auch für  $y \in M$ . Mit dem Satz von Pythagoras folgt wegen (2.12)

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x - P_E x + P_E x\|^2 = \|x - P_E x\|^2 + \|P_E x\|^2 \\ &\geq \|P_E x\|^2 = \sum_{i \in E} |(x, e_i)|^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Damit konvergiert die Reihe  $\sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2$  unbedingt mit

$$\sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 = \sup_E \sum_{i \in E} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2. \quad (\text{Bessel'sche Ungleichung}) \quad (2.14)$$

**Satz 2.6.4.** Sei  $(e_i)_{i \in I}$  ein Orthonormalsystem in  $H$  und  $M$  der Abschluss der linearen Hülle von  $\{e_i : i \in I\}$ . Dann sind für  $x \in H$  äquivalent:

i)  $x \in M$

ii)  $\sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2 \quad (\text{Parseval'sche Gleichung})$

iii)  $x = \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i$  (unbedingte Konvergenz)

*Beweis.* Für  $x \in M$  gibt es zu  $\varepsilon > 0$  eine endliche Teilmenge  $E_\varepsilon$  von  $I$  mit  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  für  $i \in E_\varepsilon$  für die

$$\varepsilon^2 > \left\| x - \sum_{i \in E_\varepsilon} \lambda_i e_i \right\|^2$$

gilt. Für endliche Teilmengen  $E$  von  $I$  mit  $E \supseteq E_\varepsilon$  folgt, wenn wir  $\lambda_i = 0$  für  $i \in E \setminus E_\varepsilon$  definieren mit (2.12) und dem Satz von Pythagoras:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &> \left\| x - \sum_{i \in E} \lambda_i e_i \right\|^2 = \left\| x - \sum_{i \in E} \lambda_i e_i + P_E x - P_E x \right\|^2 \\ &= \|x - P_E x\|^2 + \left\| \sum_{i \in E} (\lambda_i - (x, e_i)) e_i \right\|^2 \geq \|x - P_E x\|^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

also  $\|x - P_E x\| = \min\{\|x - P_F x\| : F \subseteq E\}$  i)  $\Rightarrow$  ii): Aus (2.15) und

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 &\geq \sum_{i \in E} |(x, e_i)|^2 = \|P_E x\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|x - P_E x\|^2 \geq \|x\|^2 - \varepsilon^2 \end{aligned}$$

für  $E \supseteq E_\varepsilon$  erhalten wir mit der Bessel'schen Ungleichung (2.14)

$$\sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2.$$

ii)  $\Rightarrow$  iii) Gilt  $\lim_E \|P_E x\|^2 = \lim_E \sum_{i \in E} |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2$  so folgt wegen

$$\|P_E x\|^2 = \|x\|^2 - \|x - P_E x\|^2$$

die Netzkonvergenz von  $P_E x$  gegen  $x$ .

iii)  $\Rightarrow$  i): Aus der Konvergenz von  $\sum_{i \in E} (x, e_i) e_i$  gegen  $x$  für  $E \rightarrow I$  folgt, dass es für  $\varepsilon > 0$  eine endliche Teilmenge  $E_\varepsilon$  von  $I$  gibt mit  $\|\sum_{i \in E} (x, e_i) e_i - x\| < \varepsilon$ , womit  $x \in M$  folgt.  $\square$

Ein Orthonormalsystem dessen Abschluss seiner linearen Hülle der ganze Hilbertraum ist heißt **vollständig** oder **Orthonormalbasis**. Man beachte, dass eine Basis in diesem Sinn keine **algebraische Basis** des Hilbertraumes ist, d.h. die Elemente des Hilbertraumes können im Allgemeinen nicht als endliche Linearkombination von Basisvektoren dargestellt werden sondern nur als konvergente Reihe. Will man dies verdeutlichen so spricht man im Gegensatz zu einer algebraischen Basis von einer **topologischen Basis**.

Wir haben die unbedingte Konvergenz von Reihen als Netzkonvergenz bezüglich der durch Mengeninklusion gerichteten Menge aller endlichen Teilmengen von  $I$  definiert, d.h.  $\sum_{i \in I} x_i$  konvergiert unbedingte gegen  $x$ , wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine endliche Teilmenge  $E_\varepsilon$  von  $I$  gibt sodass  $\|x - \sum_{i \in E} x_i\| < \varepsilon$  für jede endliche Teilmenge  $E$  von  $I$  mit  $E \supseteq E_\varepsilon$  gilt. Für diese Definition ist es unerheblich ob  $I$  abzählbar oder überabzählbar ist. Sei  $I_n := \{i \in I : \|x_i\| \geq 1/n\}$  dann muss  $I_n$  endlich sein falls die Reihe konvergiert anderenfalls gilt  $\sup_{E \subseteq I} \sum_{i \in E} \|x_i\|_2 = \infty$ . Damit muss die Vereinigung  $I_0$  der Mengen  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  als abzählbare Vereinigung

endlicher Mengen abzählbar sein.  $I_0$  ist aber genau die Menge aller Indizes für die  $x_i \neq 0$  gilt. Also kann eine Reihe mit überabzählbarer Indexmenge nur dann konvergieren wenn für alle bis auf abzählbar viele Indizes die Summanden  $x_i$  verschwinden.

Ein Beispiel für einen Hilbertraum mit überabzählbarem Orthogonalsystem ist  $\ell^2(M)$  für eine überabzählbare Menge  $M$ . Das ist der Raum aller Funktionen  $x$  von  $M$  nach  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  mit  $\sum_{i \in M} |x(i)|^2 < \infty$ . Diese Bedingung kann für eine Funktion  $x$  nach obiger Betrachtung nur erfüllt sein, wenn  $x(i) \neq 0$  nur auf einer abzählbaren Teilmenge  $I_x$  von  $I$  gilt.

Ein metrischer Raum heißt **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

**Satz 2.6.5.** *Ein Hilbertraum ist genau dann separabel, wenn er ein endliches oder abzählbar unendliches vollständiges Orthogonalsystem hat.*

*Beweis.* Hat ein Hilbertraum  $H$  ein abzählbares vollständiges Orthogonalsystem  $(e_i)_{i \in I}$ , so gibt es nach Satz 2.6.4 zu jedem  $x \in H$  und  $\varepsilon > 0$  eine endliche Menge  $E$  mit  $\|\sum_{i \in E} (x, e_i)e_i - x\| < \varepsilon/2$ . Approximieren wir die Koeffizienten  $(x, e_i)$  durch Koeffizienten aus einer abzählbaren in  $\mathbb{C}$  dichten Teilmenge  $Q$  (etwa  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in \mathbb{Q}, \operatorname{Im} z \in \mathbb{Q}\}$ ) so finden wir Koeffizienten  $\lambda_i \in Q$  mit  $\|\sum_{i \in E} \lambda_i e_i - (x, e_i)e_i\| \leq \varepsilon/2$  und damit  $\|x - \sum_{i \in E} \lambda_i e_i\| \leq \varepsilon$ . Für eine abzählbare Menge ist die Menge aller endlichen Teilmengen abzählbar (f. unendl Mengen aber nicht die Potenzmenge!) und für jede endl. Teilmenge  $E$  von  $I$  die Menge der Funktionen  $\sum_{i \in E} \lambda_i e_i$  mit  $\lambda_i \in Q \forall i \in E$ . Als abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist die Menge aller Funktionen  $\sum_{i \in E} \lambda_i e_i$  mit  $E \subset I, |E| < \infty, \lambda_i \in Q$  eine abzählbare dichte Teilmenge von  $H$ .

Wählen wir für eine dichte Teilmenge  $D$  von  $H$  für jedes  $i \in I$  ein  $d_i \in D$  mit  $\|e_i - d_i\| < \sqrt{2}/2$ , so folgt wegen  $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$  für  $i \neq j$   $d_i \neq d_j$  für  $i \neq j$ . Ist  $I$  also überabzählbar so folgt dass jede dichte Teilmenge von  $H$  überabzählbar ist.  $\square$

Für zwei Hilberträume  $H_1, H_2$  mit Orthonormalbasen  $(e_i)_{i \in I}$  und  $(f_i)_{i \in I}$  gleicher Kardinalität wird durch die Abbildung  $\phi(\sum_{i \in E} \lambda_i e_i) = \sum_{i \in E} \lambda_i f_i$  für endliche Teilmengen  $E$  von  $I$  eine lineare Bijektion zwischen der linearen Hülle  $S_1$  von  $\{e_i : i \in I\}$  in  $H_1$  und der linearen Hülle  $S_2$  von  $\{f_i : i \in I\}$  in  $H_2$  erklärt. Man sieht unmittelbar, dass für  $u, v \in S_1$ ,  $u = \sum_{i \in I} (u, e_i)e_i$ ,  $v = \sum_{i \in I} (v, e_i)e_i$

$$(u, v) = (\phi(u), \phi(v)) = \sum_{i \in I} (u, e_i)(v, e_i) = \sum_{i \in I} (\phi(u), f_i)(\phi(v), f_i).$$

Wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes (Korollar 2.6.2) gilt

$$(u, v) = (\phi(u), \phi(v)),$$

da  $S_i$  nach Satz 2.6.4 dicht in  $H_i$  liegt.  $\phi$  ist also ein Vektorraumisomorphismus der das Skalarprodukt und damit auch die Norm invariant lässt. Es gibt also bis auf solche isometrische Isomorphismen nur einen Hilbertraum bei gegebener Kardinalität der Orthogonalbasis. Für konkrete Problemstellungen ist jedoch die Wahl einer geeigneten - dieser Problemstellung angepassten - ON-Basis entscheidend.

**Satz 2.6.6.** *Auf dem Raum  $L^2(\mathbb{T}^m)$ , bzw. auf  $L^2(Q)$  für  $Q := \times_{i=1}^m [0, l_i]$  der Äquivalenzklassen quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit Skalarprodukt*

$$(f, g) = \int f(\mathbf{x})\bar{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{Integration über } \mathbb{T} \text{ resp. } Q)$$

bilden die Funktionen  $e_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-m/2} e^{2\pi i \mathbf{n} \mathbf{x}}$  bzw.  $e_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = l^{-m/2} e^{2\pi i \mathbf{n} \mathbf{x}/l}$  für  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$  eine Orthonormalbasis.

*Beweis.* Die Orthonormalität dieser Funktionen sieht man unmittelbar durch Integration. Die Vollständigkeit folgt aus Satz 2.5.2. □

*Beispiel 2.6.7.* Wenden wir die Parseval'sche Gleichung auf das Orthonormalsystem  $(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx))_{k \in \mathbb{N}}$  im Raum der quadratisch integrierbaren ungeraden Funktionen und die Funktion  $f(x) = x$ ,  $x \in [-\pi, \pi)$  an, so erhalten wir

$$4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi^3/3, \quad \text{also} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

*Beispiel 2.6.8.* Für eine positive integrierbare Funktion  $\varphi$  auf einem kompakten Intervall  $[a, b]$  kann durch das Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren aus der Folge der linear unabhängigen Monome  $m_n(x) = x^n$  eine bezüglich dem Skalarprodukt  $(f, g) = \int_{[a, b]} f\bar{g}\varphi d\lambda$  orthonormale Folge von Polynomen  $p_i$   $i$ -ten Grades  $p_0, p_1, \dots$  definiert werden. Es folgt

$$\|f\|_2 = \left( \int_{[a, b]} |f(x)|^2 \varphi(x) dx \right)^{1/2} \leq \|f\|_{\infty} \left( \int_{[a, b]} \varphi(x) d\lambda(x) \right)^{1/2}.$$

Mit dem Satz von Stone-Weierstraß erhält man wieder die Vollständigkeit dieses Orthonormalsystems  $\{p_i : i \in \mathbb{N}_0\}$  im Hilbertraum aller bezüglich der Gewichtsfunktion quadratisch integrierbaren reellwertigen Funktionen auf  $[a, b]$ .

Neben vielen anderen interessanten Eigenschaften erfüllen orthogonale Polynome immer eine Rekursion 2. Ordnung der Art  $p_k(x) = (a_k + xb_k)p_{k-1}(x) + c_k p_{k-2}(x)$  für  $k \geq 2$ . Dies sieht man, wenn man beachtet dass für die Identität  $id$ ,  $id(x) = x(id \cdot p_{k-1}, p_i) = (p_{k-1}, id \cdot p_i) = 0$  für  $i < k - 2$  gilt.  $id \cdot p_{k-1}$  ist also ein Polynom  $k$ -ter Ordnung das orthogonal zu  $p_i$  für  $i < k - 2$  ist. Damit gibt es Koeffizienten  $a_k, b_k, c_k$  mit den gesuchten Eigenschaften. □

# Kapitel 3

## Fouriertransformation

### 3.1 Fourierreihen

Für  $f \in L^2(\mathbb{T})$  gibt die Theorie der Orthogonalbasen in einem Hilbertraum (vgl. Kap. 2.6, Satz 2.6.6) bereits eine vollständige Beschreibung des Konvergenzverhaltens von Fourierreihen bez. der  $L^2$ -Norm: Für  $f \in L^2(\mathbb{T})$  konvergiert die Reihe  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$  bezüglich der  $L^2$ -Norm unbedingte gegen die Funktion  $f(t)$  und es gilt mit der Parseval'schen Gleichung 2.6.4 bezüglich der Orthonormalbasis  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$  auf  $L^2[-\pi, \pi]$ :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2, \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (3.1)$$

Äquivalent dazu kann man die Orthonormalbasis

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

auf  $L^2[-\pi, \pi]$  betrachten. Hat  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  bezüglich dieser Orthonormalsysteme die Entwicklungen

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1,$$

so folgt  $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n))$ ,  $b_n = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n))$ , bzw. umgekehrt  $\hat{f}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(a_n - ib_n)$ ,  $\hat{f}(-n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(a_n + ib_n)$ . Sowohl die Reihenentwicklung

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$  als auch  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$  werden **Fourierreihen** von  $f$  genannt. Damit ist die Konvergenz der Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$  äquivalent zur Konvergenz der Folge  $(\sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx})_N$  der Partialsummen und wir können uns für die Untersuchung des Konvergenzverhaltens auf die Darstellung  $(\sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx})_N$  beschränken.

Aus der Konvergenz bezüglich der  $L^2$ -Norm folgt nicht die Konvergenz fast überall, auch nicht, wenn wir statt unbedingter Konvergenz nur die Konvergenz der Partialsummen

$$S_N f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx} \quad (3.2)$$

für  $N \rightarrow \infty$  fordern.

Da die durch (3.1) definierten Koeffizienten  $\hat{f}(n)$  genau für  $f \in L^1(\mathbb{T})$  definiert sind, liegt es nahe die Konvergenz von Fourierreihen für integrierbare Funktionen zu untersuchen. Es ist bekannt, dass für  $f \in L^p$ ,  $1 < p < \infty$  diese Reihen sogar punktweise fast überall gegen  $f$  konvergieren (Satz von Carleson). Besonders für  $1 < p \leq 2$  ist der Beweis äußerst aufwendig. Andererseits gibt es integrierbare Funktionen, deren Fourierreihe überall divergiert und es gibt sogar für jede Nullmenge eine stetige Funktion, deren Fourierreihe auf dieser Nullmenge divergiert. Wir werden im Folgenden hinreichende Bedingungen für die punktweise Konvergenz von Fourierreihen geben (Satz 3.1.6 und 3.1.12) Man beachte dass  $L^2(\mathbb{T})$  ein echter Unterraum von  $L^1(\mathbb{T})$  ist.

Wir beschäftigen uns hier mit der Frage der Konvergenz bezüglich der  $L^1$ -Norm einer  $L^1$ -Funktion  $f$  und der punktweisen Konvergenz der Reihe (3.2) für geeignete Funktionen, sowie mit der Konvergenz bezüglich anderer Summationsverfahren.

**Lemma 3.1.1.** *Für  $f \in L^1(\mathbb{T})$  gilt*

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1. \quad (3.3)$$

und wenn darüberhinaus  $\|f - \tau_s f\|_1 \leq 2\sqrt{2\pi}\varepsilon$  für  $s < \delta$  gilt, so folgt

$$|\hat{f}(n)| \leq \varepsilon \quad \text{für } |n| > \frac{\pi}{\delta}. \quad (3.4)$$

*Beweis.* (3.3) folgt unmittelbar aus (3.1).

Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-in(x+\pi/n)} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - \pi/n) e^{-inx} dx = -\widehat{\tau_{\pi/n} f}(n), \end{aligned}$$



also mit (3.3)

$$|\hat{f}(n)| = \frac{1}{2} |(\hat{f} - \widehat{\tau_{\pi/n} f})(n)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \|f - \tau_{\pi/n} f\|_1 \leq \varepsilon \quad \text{für } |n| > \frac{\pi}{\delta}. \quad \square$$

**Satz 3.1.2** (Riemann-Lebesgue Lemma). *Für  $f \in L^1(\mathbb{T})$  gilt*

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0.$$

*Beweis.* Die Aussage folgt aus Satz 2.5.3 und Lemma 3.1.1. □

Differentiation ermöglicht bei Fourierreihenentwicklung eine einfache Darstellung:

**Satz 3.1.3.** *Für  $f \in C^{(k)}(\mathbb{T})$  gilt*

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \hat{f}(n).$$

*Beweis.* Bei periodischen Funktionen fallen bei partieller Integration über eine Periode die Randterme weg. Durch  $k$ -malige partielle Integration erhalten wir die Behauptung. □

Als Anwendung beweisen wir

**Lemma 3.1.4** (Wirtinger-Ungleichung). *Für eine  $2\pi$ -periodische stetig differenzierbare Funktion  $f$  auf  $\mathbb{T}$  gilt*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - m_f|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

wobei  $m_f$  das Mittel  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$  bezeichnet.

*Beweis.* Offensichtlich gilt  $m_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(0)$ , also  $\widehat{f - m_f}(0) = 0$ .  $f$  ist quadratisch integrierbar und mit der Parseval'schen Gleichung Satz 2.6.4 folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - m_f|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Andererseits folgt für  $f'$  mit Satz 3.1.3  $\widehat{f'}(n) = in \hat{f}(n)$  und somit aus der Parseval'schen Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |\hat{f}(n)|^2. \quad \square$$

Den linearen Raum aller Funktionen mit absolut konvergenter Fourierreihe bezeichnen wir mit  $A(\mathbb{T})$ , d.h.  $f \in A(\mathbb{T})$  für  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$ .

**Satz 3.1.5.** Für  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$  gilt

$$\widehat{f * g}(n) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(n) \hat{g}(n).$$

Für  $f, g \in A(\mathbb{T})$  gilt  $f \cdot g \in C(\mathbb{T})$  und

$$\sqrt{2\pi} \widehat{f g}(n) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n-l) \hat{g}(l) =: \hat{f} * \hat{g}(n).$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) g(t) dt e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) e^{-in(x-t)} dx g(t) e^{-int} dt = \sqrt{2\pi} \hat{f}(n) \hat{g}(n). \end{aligned}$$

Für  $f \in A(\mathbb{T})$  konvergiert  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$  unbedingt und gleichmäßig in  $x$  und damit gegen eine stetige Funktion  $\tilde{f}$ . Zugleich folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz auf  $\mathbb{T}$  die  $L^2$ -Konvergenz dieser Reihe gegen  $\tilde{f}$ . Nach Satz 2.6.4 konvergiert aber diese Reihe in der  $L^2$ -Norm gegen  $f$ . Es folgt  $\tilde{f} = f$ , also die unbedingte gleichmäßige Konvergenz von  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$  gegen  $f$ .

Für  $f, g \in A(\mathbb{T})$  dürfen wegen dem Satz der dominierten Konvergenz die folgenden Integrationen mit den Reihenentwicklungen vertauscht werden. Mit Fubini folgt

$$\begin{aligned} \widehat{f g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \hat{g}(l) e^{ikx} e^{ilx} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \hat{g}(l) \int_{\mathbb{T}} e^{i(k+l-n)x} dx \end{aligned}$$

Das letzte Integral verschwindet für  $k \neq n-l$  und ergibt  $2\pi$  für  $k = n-l$ . ▣

Die Partialsummen (3.2) kann man durch Faltung mit dem **Dirichletkern**

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \tag{3.5}$$

ausdrücken:

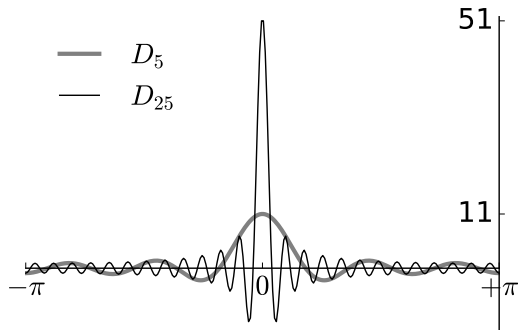
$$\begin{aligned}
 S_n f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^n f(t) e^{-in(t-x)} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} D_n * f(x) = \frac{1}{2\pi} f * D_n(x). \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Aus der Formel für eine geometrische Progression  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$  für  $q \neq 1$  erhalten wir für den Dirichletkern und  $x \neq 2\pi\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned}
 D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{-ix/2} e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{-ix/2} e^{ix} - 1} \\
 &= \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Für die Konvergenz der Fourierreihe einer Funktion  $f$  in einem Punkt ist nicht einmal die Stetigkeit von  $f$  hinreichend. Man kann sogar zeigen, dass es für jede Lebesgue-Nullmenge  $N$  von  $\mathbb{T}$  eine auf  $\mathbb{T}$  stetige Funktion gibt, deren Fourierreihe auf  $N$  nicht konvergiert. Als quadratisch integrierbare Funktion hat  $f$  aber nach einem Satz von Carleson eine fast überall (gegen  $f$ ) konvergente Fourierreihe. Unter den integrierbaren Funktionen gibt es aber welche, deren Fourierreihe nirgends konvergiert.

Dirichletkern  $n = 5, 25$



Ein hinreichendes Kriterium für die punktweise Konvergenz einer Fourierreihe ist

**Satz 3.1.6 (Dini-Test).** Für  $x_0 \in \mathbb{T}$ ,  $c \in \mathbb{C}$  und eine auf  $\mathbb{T}$  integrierbare Funktion  $f$ , für die auch die Funktion

$$t \mapsto \frac{1}{t} \left| \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t)}{2} - c \right|$$

auf  $[0, \pi]$  integrierbar ist gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x_0) = c$ .

*Beweis.* Es genügt wegen  $S_n(\tau_z f) = \tau_z(S_n f)$  und  $S_n(f - c) = S_n f - c$  den Fall  $x_0 = c = 0$  zu betrachten. Nach de l'Hospital gilt  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = 0$  woraus die

Integrierbarkeit der Funktion  $h$ :

$$h(t) = \frac{f(-t) + f(t)}{\sin \frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2}$$

auf  $[-\pi, \pi]$  folgt.

Mit (3.2), (3.7),  $D_n(x) = D_n(-x)$  und dem Additionstheorem folgt

$$\begin{aligned} S_n f(0) &= \frac{1}{2\pi} f * D_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(0-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t) + f(-t)) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t) + f(-t)}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t) + f(-t)}{\sin \frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2} \sin(nt) + (f(t) + f(-t)) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{8\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) (e^{int} - e^{-int}) dt + \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (e^{int} + e^{-int}) dt \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}i} (\hat{h}(n) - \hat{h}(-n)) + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)). \end{aligned}$$

Mit dem Riemann-Lebesgue-Lemma 3.1.2 folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(0) = 0$ . ▣

Für  $L^1$ -Funktionen  $f_1, f_2$  die auf einem Teilintervall  $[a, b]$  von  $(-\pi, \pi)$  übereinstimmen sind die Fourierkoeffizienten i.A. unterschiedlich weshalb die Fourierreihen dieser Funktionen auch wenn man sie in Punkten  $x \in (a, b)$  auswertet unterschiedlich sind. Aus dem Dini-Test folgt aber dass das Konvergenzverhalten von  $S_n f$  für eine  $L^1$ -Funktion  $f$  eine lokale Eigenschaft ist:

**Korollar 3.1.7** (Lokalisierungssatz). *Wenn zwei integrierbare Funktionen  $f_1, f_2$  auf einem Intervall  $(a, b)$  übereinstimmen und die Fourierreihe  $(S_n f_1)_n$  in  $x \in (a, b)$  konvergiert, so konvergiert auch  $(S_n f_2)_n$  in  $x$  und beide Fourierreihen haben in  $x$  denselben Grenzwert.*

Eine hinreichende Bedingung für den Dini-Test ist

**Korollar 3.1.8.** *Existieren für eine auf  $(-\pi, \pi]$  integrierbare Funktion  $f$  die einseitigen Grenzwerte*

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) =: f(x_0 \pm 0),$$

sowie die einseitigen Ableitungen

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} \frac{f(x) - f(x_0 \pm 0)}{x - x_0},$$

so konvergiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x_0)$  gegen  $(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))/2$ .

*Beweis.* Die Funktion  $g(t) := \frac{1}{2} \left( \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t} + \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \right)$  ist aufgrund der Integrierbarkeit von  $f$  für  $\varepsilon > 0$  auf  $[\varepsilon, \pi]$  integrierbar. Wegen der Existenz der einseitigen Ableitungen ist sie für hinreichend kleine  $\varepsilon$  auf  $[0, \varepsilon]$  beschränkt und damit auf  $[0, \pi]$  integrierbar. Mit  $c = (f(x_0+0) + f(x_0-0))/2$  folgt die Behauptung aus dem Dinitest.  $\square$

Ist eine Funktion stückweise stetig differenzierbar (d.h. sie ist für  $-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_l = \pi$  für alle  $1 \leq i < l$  in allen Intervallen  $(a_{i-1}, a_i)$  stetig differenzierbar und besitzt dort stetige Fortsetzungen der Ableitungen auf die abgeschlossenen Intervalle  $[a_{i-1}, a_i]$ ), so folgt mit dem Hauptsatz die Existenz der einseitigen Grenzwerte  $f(x_0 \pm 0)$  und mit dem Mittelwertsatz die Existenz der einseitigen Ableitungen in allen Punkten und damit

**Korollar 3.1.9.** *Für eine stückweise stetig differenzierbare Funktion  $f$  konvergiert ihre Fourierreihe in allen Punkten  $x_0$  gegen  $(f(x_0+0) + f(x_0-0))/2$ .*

Den folgenden Jordantest (Satz 3.1.12 für die punktweise Konvergenz einer Fourierreihe werden wir zwar unter Zuhilfenahme des Dini-Tests beweisen. er ist aber weder stärker noch schwächer als dieser, d.h. es gibt Funktionen für die die Konvergenz ihrer Fourierreihe mithilfe des Jordantests aber nicht mithilfe des Dini-Tests gezeigt werden kann und umgekehrt.

Die Folge der  $L^1$ -Normen der Dirichlet-Kerne  $(D_n)_n$  wächst logarithmisch gegen unendlich. Wir benötigen aber für den Beweis von Satz 3.1.12 die folgende Abschätzung für  $\left| \int_a^b D_n(t) dt \right|$  für Teilintervalle  $[a, b]$  von  $[0, \pi]$  und  $n \in \mathbb{N}$ :

**Lemma 3.1.10.** *Es gilt  $\left| \int_a^b D_n(x) dx \right| \leq 6\pi$  für  $0 \leq a \leq b \leq \pi$  und  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Wegen (3.5) (3.7) gilt für  $0 \leq x \leq \pi/(n + \frac{1}{2})$ :  $0 \leq D_n(x) \leq 2n + 1$  und damit für  $0 \leq \alpha \leq \pi/(n + \frac{1}{2})$

$$0 \leq \int_0^\alpha D_n(x) dx \leq \int_0^{\pi/(n+\frac{1}{2})} D_n(x) dx \leq \frac{\pi}{(n+\frac{1}{2})} (2n+1) = 2\pi. \quad (3.8)$$

Die Funktion  $f(x) = \sin \frac{x}{2} - \frac{x}{\pi}$  hat in  $(0, \pi)$  negative 2. Ableitung, damit kein lokales Minimum in  $(0, \pi)$  und verschwindet in  $\{0, \pi\}$ . Sie ist somit in  $[0, \frac{\pi}{2}]$  positiv, d.h.  $\sin \frac{x}{2} \geq \frac{x}{\pi}$  für  $0 \leq x \leq \pi$ . Durch partielle Integration erhalten wir so für  $a = \pi/(n + \frac{1}{2}) < b \leq \pi$ :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b D_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} dx \right| \\
& = \left| \frac{-\cos((n + \frac{1}{2})x)}{(n + \frac{1}{2}) \sin \frac{x}{2}} \Big|_a^b - \frac{1}{2(n + \frac{1}{2})} \int_a^b \frac{\cos((n + \frac{1}{2})x) \cos \frac{x}{2}}{\sin^2(\frac{x}{2})} dx \right| \quad (3.9) \\
& \leq \frac{2}{(n + \frac{1}{2}) \sin \frac{a}{2}} + \frac{1}{(n + \frac{1}{2})} \int_{\sin \frac{a}{2}}^{\sin \frac{b}{2}} \frac{1}{t^2} dt \leq 2 + \frac{1}{(n + \frac{1}{2}) \sin \frac{a}{2}} \leq 2 + \frac{\pi}{(n + \frac{1}{2})a} = 3.
\end{aligned}$$

Für  $b \in [0, \pi]$  folgt aus (3.8) und (3.9)

$$\left| \int_0^b D_N(x) dx \right| \leq 2\pi + 3 < 3\pi \text{ und für } 0 \leq a \leq b \leq \pi: \left| \int_a^b D_N(x) dx \right| < 6\pi. \quad \blacksquare$$

**Lemma 3.1.11.** Sei  $f$  eine auf  $[0, b]$ ,  $0 < b \leq \pi$  monoton steigende auf  $[0, \pi]$  integrierbare Funktion mit  $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi D_n(t) f(t) dt = 0.$$

*Beweis.* Da  $f$  monoton ist, ist  $f^{-1}((s, f(\rho)))$  für  $0 < s < f(\rho)$  ein Intervall und es folgt mit Fubini und Lemma 3.1.10:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^\rho D_n(t) f(t) dt \right| = \left| \int_0^\rho \int_0^{f(\rho)} D_n(t) \mathbb{1}_{[0, f(t)]}(s) ds dt \right| \\
& = \left| \int_0^\rho \int_0^{f(\rho)} D_n(t) \mathbb{1}_{f^{-1}(s, f(\rho))}(t) ds dt \right| \leq \int_0^{f(\rho)} \left| \int_0^\rho D_n(t) \mathbb{1}_{f^{-1}(s, f(\rho))}(t) dt \right| ds \\
& \leq \int_0^{f(\rho)} 6\pi ds = 6\pi f(\rho). \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Aus dem Lokalisierungssatz 3.1.7 und dem Dini-Test Satz 3.1.6 folgt für  $\rho > 0$ :

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\rho^\pi D_n(t) f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^\pi D_n(t) f(t) \mathbb{1}_{[\rho, \pi]}(t) dt \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n * (f \mathbb{1}_{[\rho, \pi]})(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n * 0(0) = 0. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Für  $0 < \rho < \pi$  gilt  $\int_0^\pi D_n(t) f(t) dt = \int_0^\rho D_n(t) f(t) dt + \int_\rho^\pi D_n(t) f(t) dt$  und die Behauptung folgt wegen  $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0$  aus (3.10) und (3.11).  $\blacksquare$

**Satz 3.1.12.** Ist die Funktion  $f \in L^1(\mathbb{T})$  im Intervall  $[x - \delta, x + \delta]$  für ein  $\delta > 0$  von beschränkter Variation, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)).$$

(Da Funktionen von beschränkter Variation genau jene Funktionen sind, die als Differenz zweier monotoner Funktionen dargestellt werden können existieren die Grenzwerte  $f(x \pm 0)$  für Funktionen von beschränkter Variation.)

*Beweis.* Wegen  $S_n(\tau_{-x}f)(0) = S_n f(x)$  dürfen wir o.B.d.A.  $x = 0$  voraussetzen. Weiters dürfen wir wegen  $S_n f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(t) dt = \int_0^{\pi} D_n(t)(f(t) + f(-t)) dt$  annehmen, dass  $f$  gleich 0 auf  $(-\pi, 0)$  ist. Da mit  $f$  auch  $x \mapsto f(x) + f(-x)$  von beschränkter Variation und damit Differenz zweier monoton steigender Funktionen ist, genügt es  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(0) = f(0+)$  für monotone Funktionen von beschränkter Variation, die auf  $(-\pi, 0)$  verschwinden zu zeigen. Solche Funktionen kann man als  $f(0+) + \tilde{f}$  darstellen mit einer Funktion  $\tilde{f}$ , die den Voraussetzungen von Lemma 3.1.11 genügt. Da konstante Funktionen eine gegen diese Konstante konvergierende Fourierreihenentwicklung haben folgt die Behauptung aus Lemma 3.1.11.  $\square$

*Beispiel 3.1.13.* Die Entwicklung der  $2\pi$ -periodischen Funktion

$$f(x) = x \begin{cases} x & x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$

in eine Sinusreihe gibt die Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx = - \frac{x \cos(kx)}{k\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx \\ &= - \frac{\pi(-1)^k - (-\pi)(-1)^k}{k\pi} = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \end{aligned}$$

also die Reihe

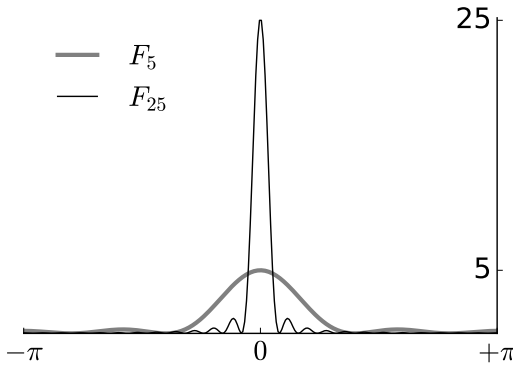
$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi).$$

Sowohl der Dini-Test als auch der Jordantest gewährleisten die punktweise Konvergenz dieser Reihe gegen  $f$ . Für  $x = \pi/2$  erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Wenden wir die Parseval'sche Gleichung auf das Orthonormalsystem  $(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx))_{k \in \mathbb{N}}$  im Raum der quadratisch integrierbaren ungeraden Funktionen und die Funktion  $f$  an, so erhalten wir

$$4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi^3/3, \quad \text{also } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Fejérkern**  $n = 5, 25$ 

Obwohl die punktweise Konvergenz der Fourierreihe einer stetigen Funktion gegen diese Funktion beziehungsweise die Normkonvergenz im  $L^1$  nicht sichergestellt ist, kann dies durch ein anderes Summationsverfahren erreicht werden: Für eine konvergente Folge  $(a_n)_n$  konvergiert die Folge ihrer arithmetischen Mittel  $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)_n$  immer gegen denselben

Grenzwert.

Es gibt aber Folgen  $(a_n)_n$ , die nicht konvergieren aber eine konvergente Folge von arithmetischen Mitteln  $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$  erzeugen. Man nennt Reihen deren arithmetische Mittel der Partialsummen konvergieren **Cesàro-summierbar**. Wir zeigen dass die Folge der **Cesàromittel** von  $(S_n f)_{n \in \mathbb{N}}$  für eine stetige Funktion  $f$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert und die Folge der Cesàromittel dieser Folge für  $L^1$ -Funktionen in der  $L^1$ -Norm gegen die Funktion konvergiert.

Für das  $n$ -te Cesàromittel der Folge  $(S_n f)_{n \in \mathbb{N}}$  erhalten wir mit (3.6)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k f(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k * f(x) = \frac{1}{2\pi} F_n * f(x)$$

für

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \frac{n-|k|}{n} e^{ikx}. \quad (3.12)$$

Dieser Faltungskern  $F_n$  wird als **Fejérkern** bezeichnet. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) &= \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(i\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) \\ &= \operatorname{Im} \exp\left(i\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \exp(ikx) = \operatorname{Im} \left( \exp\left(i\frac{x}{2}\right) \frac{\exp(inx) - 1}{\exp(ix) - 1} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \exp\left(i\frac{nx}{2}\right) \frac{\exp(i\frac{nx}{2}) - \exp(-i\frac{nx}{2})}{\exp(i\frac{x}{2}) - \exp(-i\frac{x}{2})} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \exp\left(i\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$



und es folgt für den Fejérkern mit (3.7)

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (3.13)$$

**Lemma 3.1.14.** Für den Fejérkern  $F_n$  gilt

- $F_n(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{T}$
- $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = 2\pi$
- $F_n(x) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Teilmenge von  $[-\pi, \pi]$  die 0 nicht enthält.

*Beweis.* Aus (3.13) folgt die erste Behauptung, aus (3.12) die zweite. Aus (3.13) folgt, dass  $F_n$  in  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$  durch  $\frac{1}{n} \frac{1}{\sin^2(\delta/2)}$  beschränkt ist und damit die dritte Behauptung. ▣

Wir bezeichnen den durch den Faltungskern  $F_n$  erzeugten linearen Operator mit

$$\sigma_n : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow P_{n-1}(\mathbb{T}), \quad \sigma_n f = \frac{1}{2\pi} F_n * f,$$

wobei  $P_{n-1}$  der Raum der trigonometrischen Polynome vom Grad  $< n$  ist.

**Satz 3.1.15.** Für eine auf  $\mathbb{T}$  stetige Funktion  $f$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(x) = f(x) \quad \text{gleichmäßig in } x.$$

*Beweis.*  $f$  ist als stetige Funktion auf dem Kompaktum  $\mathbb{T}$  gleichmäßig stetig, also gibt es für  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta$  mit  $|\tau_y f(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $|y| < \delta$  und  $x \in \mathbb{T}$ . Es folgt mit Lemma 3.1.14

$$\begin{aligned} |\sigma_n f(x) - f(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\tau_y f - f)(x) F_n(y) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |\tau_y f - f|(x) |F_n(y)| dy + \frac{1}{\pi} \|f\|_{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} F_n(y) dy \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für hinreichend große  $n$ . ▣

**Satz 3.1.16.** Für  $f \in L^1(\mathbb{T})$  gilt  $\|\sigma_n f - f\|_1 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Mit Fubini und Lemma 3.1.14 folgt  $\|\sigma_n f\|_1 \leq \|f\|_1$ . Sei  $p$  ein trigonometrisches Polynom mit  $\|f - p\|_1 < \varepsilon/3$  (vgl. Satz 2.5.2). Wegen  $\|\sigma_n h\|_1 \leq \|h\|_1$  gilt dann

$$\|\sigma_n f - f\|_1 \leq \|\sigma_n(f - p)\|_1 + \|\sigma_n p - p\|_1 + \|p - f\|_1 < \varepsilon$$

für  $\|\sigma_n p - p\|_1 < \varepsilon/3$ , was nach Satz 3.1.15 für  $n \geq n_0$  und ein geeignetes  $n_0$  immer gilt. ▣

**Korollar 3.1.17.** Die Fouriertransformation auf  $L^1(\mathbb{T})$  ist injektiv.

*Beweis.* Verschwinden für eine Funktion alle Fourierkoeffizienten, so gilt wegen (3.12)

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n+1}^{n-1} \frac{n-|k|}{n} \hat{f}(k) e^{ikx} = 0.$$

Mit Satz 3.1.16 folgt  $f = 0$  und wegen der Linearität der Fouriertransformation die Injektivität. □

## 3.2 Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R})$

Die **Fouriertransformation**  $f \mapsto f^\wedge$  und die **Fourierkotransformation**  $f \mapsto f^\vee$  von  $f$  sind für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  durch

$$f^\wedge(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad (3.14)$$

$$f^\vee(\mathbf{x}) = f^\wedge(-\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} f(\boldsymbol{\xi}) d\lambda^n(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.15)$$

definiert.

**Satz 3.2.1** (Riemann-Lebesgue Lemma). Auf  $L^1(\mathbb{R}^n)$  ist die Fourier(ko)transformation eine stetige lineare Abbildung nach  $C_0(\mathbb{R}^n)$  mit Abbildungsnorm  $\leq (2\pi)^{-n/2}$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} |f^\wedge(\boldsymbol{\xi}_0) - f^\wedge(\boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\xi})| &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi}_0 \cdot \mathbf{x}} (1 - e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}) d\lambda^n(\mathbf{x}) \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| |1 - e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}| d\lambda^n(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Für  $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow 0$  konvergiert  $\mathbf{x} \mapsto 1 - e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}$  punktweise gegen 0. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt die Stetigkeit von  $f^\wedge$ .

Wegen der Linearität des Integrals ist die Fourier(ko)transformation eine lineare Abbildung des  $L^1$  in den Raum der stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ .

Wegen  $|f^\wedge(\boldsymbol{\xi})| \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$  für alle  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$  folgt, dass  $f^\wedge$  beschränkt ist und die Operatornorm der Fouriertransformation als lineare Abbildung von  $L^1$  in den Raum der stetigen beschränkten Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  mit der Supremumsnorm durch  $(2\pi)^{-n/2}$  beschränkt ist. Also ist die Fouriertransformation eine stetige, in der Operatornorm durch  $(2\pi)^{-n/2}$  beschränkte Abbildung von  $L^1$  nach  $C_b$ .

Für  $\xi \neq \mathbf{0}$  gilt

$$\begin{aligned} f^\wedge(\xi) &= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\mathbf{x} + \pi|\xi|^{-2}\xi) \cdot \xi} f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} f(\mathbf{y} - \pi|\xi|^{-2}\xi) d\lambda^n(\mathbf{y}) = -(\tau_{\pi|\xi|^{-2}\xi} f)^\wedge(\xi) \end{aligned}$$

und damit

$$|f^\wedge(\xi)| = \frac{1}{2} |f^\wedge(\xi) - (\tau_{\pi|\xi|^{-2}\xi} f)^\wedge(\xi)| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|f - \tau_{\pi|\xi|^{-2}\xi} f\|_1.$$

Mit Satz 2.5.3 folgt  $f^\wedge(\xi) \rightarrow \mathbf{0}$  für  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Wegen  $f^\vee(\xi) = f^\wedge(-\xi)$  folgen die entsprechenden Behauptungen für die Fourierkotransformation.  $\square$

Für einen Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  bezeichnen wir mit  $m_\alpha$  das Monom  $m_\alpha(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$  und mit  $D^\alpha$  wieder den Differenzialoperator  $\frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ .

**Proposition 3.2.2.** *Ist die Funktion  $m_\alpha f$  für jeden Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq k$  integrierbar, so folgt  $f^\wedge \in C^k(\mathbb{R}^n)$  und für  $|\alpha| \leq k$  gilt*

$$D^\alpha(f^\wedge) = (-i)^{|\alpha|} (m_\alpha f)^\wedge.$$

Aus  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ,  $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  für alle  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq k$  folgt

$$(D^\alpha f)^\wedge = i^{|\alpha|} m_\alpha f^\wedge \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

für  $|\alpha| \leq k$ .

*Beweis.* Ist die Funktion  $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})x_j$  integrierbar, so darf Differentiation mit Integration nach Satz 2.1.8 vertauscht werden, wenn man als von  $\xi$  unabhängige Majorante der partiellen Ableitung in einer Umgebung von  $\xi_0$  etwa  $g(\mathbf{x}) = |x_j f(\mathbf{x})|$  wählt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} f^\wedge(\xi) = \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) x_j e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Durch Induktion nach  $|\alpha|$  folgt  $D^\alpha(f^\wedge) = (-i)^{|\alpha|} (m_\alpha f)^\wedge$  und mit dem Riemann-Lebesgue Lemma 3.2.1  $D^\alpha(f^\wedge) \in C_0$ .

Da die  $L^1$ -Norm der partiellen Ableitung von  $f$  genau die Variationsnorm von  $f$  ist, sieht man dass für eine differenzierbare Funktion  $f$ , deren Ableitung integrierbar ist,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$  gilt. Durch partielle Integration folgt damit unter der Voraussetzung der zweiten Behauptung:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_j} f \right)^\wedge(\xi) = i \xi_j f^\wedge(\xi).$$

Durch Induktion folgt die Aussage für Ableitungen höherer Ordnung.  $\square$

Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist die Fouriertransformierte  $f^\wedge$  nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma zwar in  $C_0(\mathbb{R}^n)$  aber im Allgemeinen nicht integrierbar. Damit kann die Fourierkotransformation nicht immer auf die Fouriertransformation angewendet werden. Es gilt aber:

**Satz 3.2.3.** Für  $f, f^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^n)$  gelten  $\lambda^n$ -fast überall die Umkehrformeln:

$$f(\mathbf{x}) = (f^\wedge)^\vee(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} f^\wedge(\xi) d\lambda^n(\xi)$$

bzw.

$$f(\mathbf{x}) = (f^\vee)^\wedge(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} f^\vee(\xi) d\lambda^n(\xi).$$

*Beweis.* Man erhält bei formaler Vertauschung der Integrationsreihenfolge das Integral

$$(f^\wedge)^\vee(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} d\xi f(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y}),$$

das offensichtlich nicht existiert. Wir betrachten daher, um Integrierbarkeit des Integranden zu erzwingen, statt  $f$  eine durch Faltung mit der Funktion

$$h_\lambda(\mathbf{x}) := \frac{\lambda^n}{\pi^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\lambda^2 + x_j^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda \sum_{j=1}^n |t_j|} e^{it \cdot \mathbf{x}} d\lambda^n(\mathbf{t}), \quad \lambda > 0$$

geglättete Funktion  $f * h_\lambda$ .

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} (f * h_\lambda)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) e^{it \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \lambda \sum_{j=1}^n |t_j|} d\lambda^n(\mathbf{t}) d\lambda^n(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it \cdot \mathbf{x} - \lambda \sum_{j=1}^n |t_j|} f^\wedge(\mathbf{t}) d\lambda^n(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Der Integrand ist betragsmäßig durch  $|f^\wedge(\mathbf{t})|$  beschränkt, aus  $e^{-\lambda|t_j|} \uparrow 1$  für  $\lambda \downarrow 0$  folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} f * h_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it \cdot \mathbf{x}} f^\wedge(\mathbf{t}) d\lambda^n(\mathbf{t}) = (f^\wedge)^\vee(\mathbf{x}). \quad (3.17)$$

Wegen

$$\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\lambda^2 + x^2} dx = \frac{1}{\lambda^2} \lambda \int_{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{2}{\lambda} \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{\pi}{\lambda} \quad (3.18)$$

gilt

$$\int_{[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]^n} h_\lambda(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) = \frac{\lambda^n 2^n}{\pi^n \lambda^n} \left( \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)^n = \left( \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)^n. \quad (3.19)$$

Es folgt mit Fubini sowie (3.18) und (3.19)

$$\begin{aligned} \|f * h_\lambda - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x})) h_\lambda(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y}) \right| d\lambda^n(\mathbf{x}) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| d\lambda^n(\mathbf{x}) h_\lambda(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y}) \\ &\leq \int_{[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]^n} \|\tau_{\mathbf{y}} f - f\|_1 h_\lambda(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y}) \\ &\quad + 2\|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]^n} h_\lambda(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y}) \\ &\leq \sup_{|\mathbf{y}| \leq \sqrt{n\lambda}} \|\tau_{\mathbf{y}} f - f\|_1 + 2\|f\|_1 \left( 1 - \left( \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)^n \right). \end{aligned}$$

Der erste Summand geht wegen Satz 2.5.3 für  $\lambda \rightarrow 0$  gegen 0, der zweite wegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} \arctan t = \pi/2$ .

$f * h_\lambda$  konvergiert also bezüglich der  $L^1$ -Norm gegen  $f$  und wegen (3.17) punktweise gegen  $(f^\wedge)^\vee$ . Wegen (3.16) ist  $|f * h_\lambda|$  durch  $\frac{1}{(2\pi)^n} \|f^\wedge\|_1$  beschränkt, mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt die Konvergenz von  $f * h_\lambda$  gegen  $(f^\wedge)^\vee$  in  $L^1([-N, N]^n)$  und aus der Konvergenz von  $f * h_\lambda$  gegen  $f$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  die von  $f * h_\lambda$  gegen  $f$  in  $L^1([-N, N]^n)$  für  $\lambda \rightarrow 0$ . Es folgt  $f = (f^\wedge)^\vee = f$  f.ü in  $[-N, N]^n$  und damit  $f = (f^\wedge)^\vee = f$  f.ü in  $\mathbb{R}^n$ .

Die Gültigkeit der zweiten Umkehrformel folgt wegen  $f^\vee(\boldsymbol{\xi}) = f^\wedge(-\boldsymbol{\xi})$  aus der ersten: Setzen wir  $\tilde{f}(\boldsymbol{\xi}) := f(-\boldsymbol{\xi})$ , so gilt

$$(f^\vee)^\wedge = ((\tilde{f})^\wedge)^\wedge = \widetilde{(\tilde{f})^\wedge} = \tilde{\tilde{f}}. \quad \blacksquare$$

**Korollar 3.2.4.** Die Fouriertransformation auf  $L^1$  ist injektiv.

*Beweis.* Da die Fouriertransformation linear ist, genügt es zu zeigen dass ihr Kern trivial ist. Für  $f \in L^1$  mit  $f^\wedge = 0$  sind die Voraussetzungen von Satz 3.2.3 erfüllt und es folgt  $f = (f^\wedge)^\vee = 0^\vee = 0$ .  $\blacksquare$

Wegen (2.10) ist die Faltung eine Abbildung von  $L^1 \times L^1$  nach  $L^1$ . Für die Fouriertransformation des Faltungsproduktes gilt:

**Satz 3.2.5.** Die Abbildung  $f \mapsto (2\pi)^{\frac{n}{2}} f^\wedge$  ist ein Isomorphismus der Faltungsalgebra  $(L^1(\mathbb{R}^n), *)$  in eine Unter algebra  $A(\mathbb{R}^n)$  von  $C_0(\mathbb{R}^n)$  mit punktweiser Multiplikation. Es gilt

$$(f * g)^\wedge = (2\pi)^{\frac{n}{2}} f^\wedge g^\wedge \text{ für } f, g \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

*Beweis.* Aufgrund von (2.10) ist die Faltung eine Abbildung von  $L^1 \times L^1$  nach  $L^1$ . Wegen dem Riemann-Lebesgue Lemma 3.2.1 bildet die Fouriertransformation  $L^1(\mathbb{R}^n)$  in  $C_0(\mathbb{R}^n)$  ab. Es gilt für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(\mathbf{z}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{z}} d\mathbf{z} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{y})} e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{y} d\mathbf{z} \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} f^\wedge(\boldsymbol{\xi}) g^\wedge(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Nach Korollar 3.2.4 ist diese Abbildung injektiv. □

### 3.3 Fouriertransformation in $\mathcal{S}$ und $L^2$

Die Definition der Fouriertransformation (3.14) legt die Vermutung nahe, dass  $L^1(\mathbb{R}^n)$  der natürliche Rahmen ist, um die Fouriertransformation zu betrachten, da die Integraltransformation genau für integrierbare Funktionen erklärt ist. Es stellt sich aber heraus, dass die Betrachtung der Einschränkung der Fouriertransformation auf Unterräume von  $L^1(\mathbb{R})$  insbesondere in Hinblick auf die Umkehrabbildung und die Darstellung der Differentialoperatoren  $D^\alpha$  sehr zweckmäßig ist. So kann die Fouriertransformation dann zu einem unitären Operator auf  $L_2$  ausgedehnt werden. Man beachte, dass im Gegensatz zum Raum  $L^1(\mathbb{T})$ , der den Raum  $L^2(\mathbb{T})$  als Unterraum enthält, auf  $\mathbb{R}$  weder  $L^1(\mathbb{R})$  ein Unterraum von  $L^2(\mathbb{R})$ , noch  $L^2(\mathbb{R})$  ein Unterraum von  $L^1(\mathbb{R})$  ist.

Es bezeichne  $m_\beta$  wieder das Monom  $m_\beta(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}$ . Der **Schwartzraum**  $\mathcal{S}$  ist der lineare Raum aller komplexwertigen  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen  $f$  für die  $m_\beta D^\alpha f$  für alle Multiindizes  $\alpha, \beta$  beschränkt ist. Aus der Beschränktheit von  $m_\beta D^\alpha f$  für alle  $\alpha, \beta$  schließt man leicht, dass  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} m_\beta D^\alpha f(\mathbf{x}) = 0$  für alle  $\alpha, \beta$  gilt. Man bezeichnet  $\mathcal{S}$  deshalb oft als den Raum aller Funktionen, die mit allen ihren Ableitungen rasch abklingen.

**Proposition 3.3.1.** *Für  $1 \leq p \leq \infty$  ist  $\mathcal{S}$  ein linearer Unterraum von  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Die Fouriertransformation sowie die Abbildungen  $f \mapsto D^\alpha f$  und  $f \mapsto m_\beta f$  bilden  $\mathcal{S}$  in sich ab. Die Fouriertransformation ist ein Automorphismus auf  $\mathcal{S}$ .*

Ein Automorphismus eines linearen Raumes ist eine lineare bijektive Selbstabbildung.

*Beweis.*  $\mathcal{S} \subseteq L^\infty$ , da Funktionen in  $\mathcal{S}$  beschränkt und stetig und daher messbar sind.

Für  $g \in \mathcal{S}$  gibt es eine Konstante  $M_g$  mit  $g(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n (1+x_i^2) \leq M_g$ , woraus folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g|^p d\lambda^n \leq M_g^p \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x_i^2)^p} d\lambda(x_i) \leq M_g^p \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x_i^2)} d\lambda(x_i) = M_g^p \pi^n,$$

also  $\mathcal{S} \subseteq L^p$ .

Dass mit  $f$  alle Ableitungen  $D^\alpha f$  und alle Funktionen  $f \mapsto m_\beta f$  in  $\mathcal{S}$  liegen folgt unmittelbar aus der Definition von  $\mathcal{S}$ .

Wegen Proposition 3.2.2 gilt für  $f \in \mathcal{S}$ :

$$m_\beta D^\alpha f^\wedge = (-i)^{|\alpha|} m_\beta (m_\alpha f)^\wedge = i^{-|\beta|} (-i)^{|\alpha|} (D^\beta (m_\alpha f))^\wedge,$$

also ist mit  $f$  auch  $f^\wedge$  in  $\mathcal{S}$ .

Um zu sehen, dass die Fouriertransformation ein Automorphismus ist, müssen wir wegen Korollar 3.2.4 nur noch zeigen, dass sie surjektiv ist. Dies ist aber eine unmittelbare Folgerung der Umkehrformel Satz 3.2.3:  $(f^\vee)^\wedge = f$ .  $\square$

**Satz 3.3.2.** Die Fouriertransformation bzw. Fourierkotransformation ist eine Isometrie von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  auf sich und kann zu einer surjektiven Isometrie  $\mathcal{F}$  bzw.  $\mathcal{F}^{-1}$  von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  auf sich fortgesetzt werden.

$\mathcal{F}$  wird auch **Fourier-Plancherel Operator** oder **Fouriertransformierte auf  $L^2$**  genannt.

*Beweis.* Für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt bezüglich dem Skalarprodukt von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  mit dem Satz von Fubini und der Umkehrformel Satz 3.2.3:

$$\begin{aligned} \langle f^\wedge, g^\wedge \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} f(\mathbf{x}) \overline{g^\wedge(\boldsymbol{\xi})} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \overline{e^{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} g^\wedge(\boldsymbol{\xi})} d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} = \langle f, g^{\wedge\vee} \rangle = \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

Mit Satz 3.3.1 ist die Fouriertransformation eine Isometrie von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  mit der  $L^2$ -Norm auf sich. Nach Satz 2.5.1 ist  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  dicht in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Da  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ein Unterraum von  $\mathcal{S}$  ist, folgt dass  $\mathcal{S}$  dicht in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  liegt. Nach Satz 2.2.3 hat die Isometrie  $f \mapsto f^\wedge$  eine eindeutige isometrische Fortsetzung  $\mathcal{F}$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Diese ist surjektiv, da  $f^\wedge(\mathcal{S})$  dicht in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  liegt und das isometrische Bild eines vollständigen Raumes vollständig und damit abgeschlossen ist.  $\square$

**Proposition 3.3.3.** Für  $f \in L^1 \cap L^2$  gilt  $\mathcal{F} f = f^\wedge$  und  $\mathcal{F}^{-1} f = f^\vee$ .

*Beweis.* Für  $f \in L^1 \cap L^2$  konvergiert  $\mathbb{1}_{B_r(0)}f$  in der  $L^1$ -sowie der  $L^2$ -Norm für  $r \rightarrow \infty$  gegen  $f$ . Für  $g \in L^1 \cap L^2$  und einen Mollifier  $(\eta_\delta)_\delta$  gilt nach Satz 2.5.4  $g * \eta_\delta \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} g$  ebenfalls in beiden Normen. Es folgt wegen  $\|f - (\mathbb{1}_{B_r(0)}f) * \eta_\delta\|_i \leq \|f - \mathbb{1}_{B_r(0)}f\|_i + \|\mathbb{1}_{B_r(0)}f - (\mathbb{1}_{B_r(0)}f) * \eta_\delta\|_i$ ,  $i = 1, 2$  dass es für  $f \in L^1 \cap L^2$  Funktionenfolgen  $(f_n)_n$  in  $C_c^\infty \subseteq \mathcal{S}$  gibt, die in beiden Normen gegen  $f$  konvergieren. Wegen Satz 3.2.1 und der Isometrie von  $\mathcal{F}$  konvergiert  $f_n^\wedge = \mathcal{F}f_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen  $f^\wedge$  und in der  $L^2$ -Norm gegen  $\mathcal{F}f$ . Eine Funktionenfolge die gleichmäßig gegen eine Funktion  $f^\wedge$  konvergiert, kann in der  $L^2$ -Norm, sofern sie in  $L^2$  konvergiert, nur gegen diese Funktion  $f^\wedge$  konvergieren, denn auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz die Konvergenz in  $L^2$ , woraus  $f^\wedge = \mathcal{F}f$  für  $f \in L^1 \cap L^2$  folgt.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten wegen  $f^\vee(-\xi) = f^\wedge(\xi)$ , woraus  $\mathcal{F}^{-1}f(-\xi) = \mathcal{F}f(\xi)$  zunächst für  $f \in \mathcal{S}$  folgt und da  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}^{-1}$  die eindeutigen stetigen Fortsetzungen von  $\mathcal{S}$  auf  $L^2$  sind, die Gültigkeit für  $f \in L^1 \cap L^2$ .  $\square$

*Beispiel 3.3.4.* Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

kann nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma Satz 3.1.2 nicht Fouriertransformierte einer  $L^1$ -Funktion sein. Nach Satz 3.3.2 ist sie, da  $f \in L^2(\mathbb{R})$  gilt, die Fourier-Plancherel-Transformierte einer Funktion  $\mathcal{F}^{-1}f \in L^2(\mathbb{R})$ . Da sie in  $L^1 \cap L^2$  liegt, gilt nach Proposition 3.3.3:

$$\mathcal{F}^{-1}f(t) = f^\vee(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x+ixt} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x+ixt}}{-1+it} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-it)}$$

und für

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-it)} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R}).$$

gilt  $f = \mathcal{F}g$ .  $\square$

Mit Proposition 3.2.2 und 3.3.1 erhalten wir mit Proposition 3.3.3

**Korollar 3.3.5.** Für Funktionen  $g$  aus dem Schwartzraum  $\mathcal{S}$  gilt

$$D^\alpha \mathcal{F}g = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(m_\alpha g) \text{ und } D^\alpha \mathcal{F}^{-1}g = i^{|\alpha|} \mathcal{F}^{-1}(m_\alpha g)$$

und (für  $f = \mathcal{F}g$  bzw. für  $f = \mathcal{F}^{-1}g$ ):

$$D^\alpha f = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(m_\alpha \mathcal{F}^{-1}f) = i^{|\alpha|} \mathcal{F}^{-1}(m_\alpha \mathcal{F}f).$$



Während die linke Seite dieser Gleichung zunächst nur für hinreichend glatte Funktionen definiert ist, ist die rechte Seite für alle Funktionen  $f \in L^2$  mit  $m_\alpha \mathcal{F}^{-1} f \in L^2$  sinnvoll erklärt.

Für den Multiplikationsoperator  $M_p : M_p f(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$  und  $p$  ein Polynom oder allgemeiner eine Funktion in  $\mathbf{x}$  heißen die linearen Operatoren  $\mathcal{F} M_p \mathcal{F}^{-1}$  **Pseudodifferentialoperatoren**. Sie können als Verallgemeinerungen der Differentialoperatoren  $D^\alpha$  aufgefasst werden. So kann man etwa Ableitungen nicht ganzzahliger Ordnung definieren, zum Beispiel

$$f^{(1/2)} := \sqrt{i} \mathcal{F} (w \mathcal{F}^{-1} f) \quad \text{für } w(x) = \sqrt{x} \quad \text{also } (w \mathcal{F}^{-1} f)(x) = \sqrt{x} \mathcal{F}^{-1} f(x).$$



# Kapitel 4

## Hausdorffmaß, Transformations- und Flächenformel

Unsere Zielsetzung ist die Definition eines Flächenmaßes für glatte Flächen im  $\mathbb{R}^n$ . Als Spezialfall dieser Flächenformel werden wir dabei die Transformationsregel, die die höherdimensionale Verallgemeinerung der Substitutionsregel ist, erhalten.

Obwohl eine Fläche eine sehr anschauliche Begriffsbildung ist, führt der naheliegende Versuch durch eine immer feiner werdende Approximation durch affine Flächenstücke für Dimensionen größer als 1 nicht zum Ziel. Für Kurven, also eindimensionale Flächen, war dies über die Weglänge möglich, die als Grenzwert der Längen von approximierenden Polygonzügen definiert wurde. Für  $C^1$ -Wege  $\Gamma$  erhalten wir so für die Weglänge

$$|\Gamma| = \int_{[a,b]} |\gamma'(t)| dt.$$

Diese Formel werden wir nach der Definition des Flächenmaßes durch die Flächenformel (Satz 4.2.8) auf höhere Dimensionen übertragen. Das folgende Beispiel zeigt, dass schon für 2-dimensionale glatte Flächen der naheliegende Versuch ein sinnvolles Flächenmaß über die Approximation durch immer kleiner werdende Dreiecke zu definieren nicht funktioniert: Es stellt sich heraus, dass auch wenn diese immer kleinere Seiten haben und ihre Eckpunkte in der Fläche liegen, die Summe der Dreiecksflächen nicht konvergieren muss oder unbeschränkt sein kann. Der Grund liegt darin, dass auch sehr kleine Dreiecke eine gekrümmte Fläche in dem Sinn sehr schlecht approximieren können, dass ihre Normale fast senkrecht zur Flächennormalen stehen kann, wenn das Verhältnis der Längen der Seiten entsprechend gewählt wird:

*Beispiel 4.0.1 (Schwarz'scher Zylinder).* Approximiert man den Mantel  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}$  eines Zylinders für  $n, m \in \mathbb{N}$  durch Wahl der

Punkte

$$\mathbf{x}_{k,l,n} = \begin{cases} \left( \cos \frac{2k\pi}{n^2}, \sin \frac{2k\pi}{n^2}, \frac{l}{n^m} \right) & l \text{ gerade} \\ \left( \cos \frac{(2k+1)\pi}{n^2}, \sin \frac{(2k+1)\pi}{n^2}, \frac{l}{n^m} \right) & l \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$0 \leq k < n^2$ ,  $0 \leq l \leq n^m$ , so berechnen sich die Flächen  $A(n, m)$  der Dreiecke mit den Eckpunkten  $\mathbf{x}_{k,l,n}$ ,  $\mathbf{x}_{k+1,l,n}$ ,  $\mathbf{x}_{k,l\pm 1,n}$  für  $k$  gerade, bzw. mit den Eckpunkten  $\mathbf{x}_{k,l,n}$ ,  $\mathbf{x}_{k+1,l,n}$ ,  $\mathbf{x}_{k+1,l\pm 1,n}$  für  $k$  ungerade zu

$$A(n, m) = \left( n^{-2m} + (1 - \cos(\pi/n^2))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\pi/n^2).$$

Bei dieser Zerlegung entstehen  $N(n, m) = 2n^2(n^2 - 1)^m + 2n^2$  Dreiecke mit Fläche  $A(n, m)$ . Wir erhalten als Grenzwert der Flächen dieser Polytope

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(n, m)A(n, m) = \begin{cases} 2\pi & m = 1 \\ 2\pi\sqrt{1 + \pi^2} & m = 2 \\ \infty & m \geq 3 \end{cases}$$

woraus ersichtlich ist, dass die Forderung, dass die approximierenden Flächenstücke immer kleiner werden, nicht ausreicht um ein eindeutiges Flächenmaß zu definieren.

Unser Zugang das Maß einer Teilmenge eines metrischen Raumes über Überdeckungseigenschaften zu definieren wird zugleich eine Verallgemeinerung des Dimensionsbegriffes liefern: Für einen  $d$ -dimensionalen Würfel im  $\mathbb{R}^n$  ist die Zahl von Würfeln der Kantenlänge  $\varepsilon$  von der Ordnung  $\varepsilon^{-d}$ . Durch diese Eigenschaft lässt sich für Teilmengen eines metrischen Raumes ein Dimensionsbegriff einführen, der auch nichtganzzahlige Dimensionen definiert und den klassischen Dimensionsbegriff erweitert.

## 4.1 Hausdorffmaß und Hausdorffdimension

Die Schwierigkeit das Maß einer gekrümmten Fläche zu definieren kommt daher, dass wir im Gegensatz zum Lebesguemaß auf  $\mathbb{R}^n$  keine Semialgebra von Flächenstücken mit vorgegebenem Inhalt haben. Beim Hausdorffmaß definieren wir Mengenfunktionen auf metrischen Räumen über Überdeckungseigenschaften. Das Hausdorffmaß kann so auch wesentlich allgemeiner als für Flächen definiert und sinnvoll verwendet werden.

Für eine Teilmengen  $A$  eines metrischen Raumes  $(M, d)$  ist der **Durchmesser**  $\text{diam}(A)$  als  $\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$  definiert. Für  $0 \leq s \in \mathbb{R}$  und  $\delta > 0$  definieren wir

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \omega_s \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\text{diam}(C_i)}{2} \right)^s : \text{diam}(C_i) \leq \delta, \cup_{i=1}^{\infty} C_i \supseteq A \right\} \quad (4.1)$$

und das  $s$ -dimensionale Hausdorffmaß von  $A$

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) \in [0, \infty]$$

mit  $\omega_s = \frac{\Gamma(1/2)^s}{\Gamma(1+s/2)}$ . Da  $\mathcal{H}_\delta^s(A)$  offensichtlich eine in  $\delta$  monoton fallende Funktion ist, existiert das  $s$ -dimensionale Hausdorffmaß für alle Teilmengen von  $M$ , wenn wir auch  $\infty$  zulassen.

*Bemerkung 4.1.1.* Da  $\text{diam}(C) = \text{diam}(\bar{C})$  gilt, kann man in obiger Definition das Infimum auch über Überdeckungen durch abgeschlossene Mengen bilden. Wegen  $\text{diam}(\cup_{x \in C} B(x, \varepsilon)) \leq \text{diam}(C) + 2\varepsilon$  sieht man, dass das Infimum ebenso über offene Überdeckungen gebildet werden kann.

Die in dieser Definition auftretenden Faktoren 2 und  $\omega_s$  wirken willkürlich und werden in der Literatur nicht einheitlich bei der Definition des Hausdorffmaßes herangezogen. Für  $s \in \mathbb{N}$  ist  $\omega_n$  das Volumen der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  und mit genau dieser Definition stimmt das  $n$ -dimensionale Hausdorffmaß auf dem  $\mathbb{R}^n$  dann mit dem Lebesguemaß  $\lambda^n$  überein (vgl. (2.2)), was sich für uns bei der Flächenformel als vorteilhaft erweist.

**Proposition 4.1.2.** *Für eine Abbildung  $f$  von  $(M, d)$  nach  $(M', d')$ , die*

$$d'(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$$

*erfüllt gilt  $\tilde{\mathcal{H}}^s(f(A)) \leq K^s \mathcal{H}^s(A)$ , wenn  $\mathcal{H}^s$  resp.  $\tilde{\mathcal{H}}^s$  die Hausdorffmaße auf  $(M, d)$  resp.  $(M', d')$  bezeichnen. Insbesondere gilt für Isometrien  $f$ :  $\mathcal{H}^s(f(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ .*

*Beweis.* Überdecken Mengen  $C_i$  mit  $\text{diam}(C_i) \leq \delta$  die Menge  $A \subseteq M$ , so überdecken die Mengen  $f(C_i) \subseteq f(A)$  mit  $\text{diam}(f(C_i)) \leq K\delta$ , woraus  $\tilde{\mathcal{H}}^s_{K\delta}(f(A)) \leq K^s \mathcal{H}_\delta^s(A)$  folgt. Mit  $\delta$  konvergiert  $K\delta$  gegen 0, also gilt  $\tilde{\mathcal{H}}^s(f(A)) \leq K^s \mathcal{H}^s(A)$ . Für eine Isometrie gilt diese Ungleichung für  $f$  und  $f^{-1}$  und  $K = 1$ .  $\square$

Wir bezeichnen für  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{\lambda}x \in A\}$  als  $\lambda A$ .

**Proposition 4.1.3.** *Für  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\lambda > 0$  gilt  $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ .*

*Beweis.* Die Behauptungen folgen unmittelbar aus der Definition des Hausdorffmaßes, wenn man berücksichtigt, dass  $\text{diam}(\lambda C_i) = \lambda \text{diam}(C_i)$  gilt und für eine Bijektion  $f$  zwischen  $A$  und  $f(A)$  ( $f(C_i)$ ) $_{i \in \mathbb{N}}$  genau dann eine Überdeckung von  $f(A)$  ist, wenn  $(C_i)$  $_{i \in \mathbb{N}}$  eine Überdeckung von  $A$  ist.  $\square$

**Satz 4.1.4.**  $\mathcal{H}^0$  ist das Zählmaß. Gilt für eine Menge  $A \subseteq M$   $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ , so folgt  $\mathcal{H}^t(A) = 0$  für alle  $t > s$ , d.h. das Hausdorffmaß  $\mathcal{H}^s(A)$  nimmt höchstens für einen Wert von  $s$  einen endlichen Wert größer 0 an.

*Beweis.* Dass  $\mathcal{H}^0$  das Zählmaß ist, folgt unmittelbar aus der Definition und  $\Gamma(1) = 1$ .

Für  $t > s$  und  $\text{diam}(C_i) < \delta$  folgt, da  $r \mapsto r^{s-t}$  auf  $\mathbb{R}_+$  monoton fallend ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\text{diam}(C_i)}{2} \right)^s > \left( \frac{\delta}{2} \right)^{s-t} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\text{diam}(C_i)}{2} \right)^t.$$

Wegen  $\delta^{s-t} \rightarrow \infty$  für  $\delta \rightarrow 0$  folgt die Behauptung.  $\square$

Das Hausdorffmaß ist wie man unmittelbar aus der Definition von  $\mathcal{H}_\delta^s$  sieht für  $\delta < 1$  in  $s$  monoton fallend, d.h. für jede Menge  $A$  und  $\delta < 1$  gilt  $\mathcal{H}_\delta^s(A) > \mathcal{H}_\delta^t(A)$  für  $t > s$ . Aus Satz 4.1.4 folgt, dass  $\inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$  gilt. Die **Hausdorffdimension**  $\dim_{\mathcal{H}} \in [0, \infty]$  einer nichtleeren Menge  $A$  definieren wir durch

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

Die Hausdorffdimension ist besonders einfach für selbstähnliche Mengen, also Mengen die als disjunkte Vereinigung von verkleinerten Kopien dieser Menge dargestellt werden können, zu berechnen.

*Beispiel 4.1.5.* Der halboffene Würfel  $W := \times_{i=1}^n [0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  hat Hausdorffdimension  $n$ :

Zerlegen wir  $W$  in  $k^n$  gleichgroße achsenparallele halboffene disjunkte Würfel der Kantenlänge  $1/k$ , so erhalten wir

$$\mathcal{H}_{1/k}^s(W) \leq \omega_s k^n \left( \text{diam} \left( \frac{1}{k} W \right) \frac{1}{2} \right)^s = \omega_s k^{n-s} \left( \frac{\sqrt{n}}{2} \right)^s,$$

woraus  $\mathcal{H}^s(W) = 0$  für  $s > n$  folgt.

Andererseits gilt für jede Überdeckung von  $W$  durch Mengen  $C_i$  mit  $\mathbf{x}_i \in C_i$   $C_i \subseteq \overline{B(\mathbf{x}_i, \text{diam}(C_i))}$ , also

$$1 = \lambda^n(W) \leq \sum_i \lambda^n(\overline{B(\mathbf{x}_i, \text{diam}(C_i))}) = 2^n \omega_n \sum_i (\text{diam}(C_i)/2)^n,$$

woraus  $\mathcal{H}^n(W) \geq \mathcal{H}_\delta^n(W) \geq 1/(2^n \omega_n) > 0$  folgt. Mit Satz 4.1.4 erhalten wir  $\dim_{\mathcal{H}} = n$ .

*Beispiel 4.1.6.* (Hausdorffdimension der Cantormenge) Auf dem Einheitsintervall  $I = [0, 1]$  seien die Abbildungen  $T_0, T_1$  in sich durch  $T_0(x) = x/3$ ,  $T_1(x) = 2/3 + x/3$  erklärt, sowie die Abbildung  $T : \mathcal{P}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{P}([0, 1])$ ,  $T(B) = T_0(B) \cup T_1(B)$  auf ihrer Potenzmenge. Wir definieren eine Folge von Mengen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  induktiv durch  $A_0 := I$  und  $A_{n+1} := T(A_n)$ . Man verifiziert unmittelbar durch

Induktion dass  $A_n$  die disjunkte Vereinigung von  $2^n$  abgeschlossenen Intervallen der Länge  $3^{-n}$  ist und  $A_{n+1} \subset A_n$  gilt, wobei  $A_{n+1}$  aus  $A_n$  durch Entfernen des inneren Drittels der  $2^n$  Intervalle von  $A_n$  hervorgeht. Da  $I$  kompakt ist und die abgeschlossenen Mengen  $A_n$  wegen  $\bigcap_{i=1}^n A_{n_i} = A_{\max n_i}$  die endliche Durchschnittseigenschaft haben, ist die **Cantormenge**  $C := \bigcap_n A_n$  eine nach Satz 1.4.2 nichtleere kompakte Teilmenge von  $I$ .

Wegen  $\bigcap_{n=0}^{N+1} A_n = A_{N+1} = \frac{1}{3}A_N \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}A_N)$  folgt die Selbstähnlichkeit der Cantormenge  $C = \frac{1}{3}C \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C)$ , d.h. die Cantormenge ist die Vereinigung zweier verkleinerter Kopien von sich selbst. Mengen mit solchen Selbstähnlichkeiten werden **Fraktale** genannt.



Wir zeigen dass die Hausdorffdimension der Cantormenge gleich  $\frac{\log 2}{\log 3}$  ist. Wie bei der Bestimmung der Hausdorffdimension vieler Fraktale ist es relativ einfach durch eine naheliegende Überdeckung eine obere Schranke zu finden, von der man dann mit deutlich mehr Aufwand zeigen kann, dass es die kleinste obere Schranke ist:

Da für alle  $n \in \mathbb{N}$   $A_n$  eine Überdeckung von  $C$  durch  $2^n$  Intervalle der Länge  $3^{-n}$  ist, ist  $\mathcal{H}_\delta^s$  für  $3^{-n} < \delta$  durch  $\omega_s 2^n \left(\frac{3^{-n}}{2}\right)^s$  beschränkt. Für  $2 \cdot 3^{-s} < 1$ , also für  $s > \frac{\log 2}{\log 3}$  folgt  $\mathcal{H}^s(C) = 0$  und die Hausdorffdimension von  $C$  ist somit nach oben durch  $\frac{\log 2}{\log 3}$  beschränkt.

Aus der Definition von  $\mathcal{H}_\delta^s$  folgt, dass wir uns o.B.d.A. auf Überdeckungen von  $C$  durch offene Intervalle  $C_i$  beschränken können. Ist  $C \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$  für offene Teilmengen  $C_i$  so gibt es, da  $C$  kompakt ist,  $N \in \mathbb{N}$  mit  $C \subseteq \bigcup_{i \leq N} C_i$ . Für  $3^{-k-1} < \text{diam} C_i \leq 3^{-k}$  hat  $C_i$  mit höchstens einem der  $2^k$  Intervalle von  $A_k$  nichtleeren Schnitt. Wir dürfen also in der Überdeckung jedes  $C_i$  durch ein abgeschlossenes Intervall  $D_i$  der Länge  $3^{-k_i}$  ersetzen, das in der Mengen  $A_{k_i}$  liegt ( $A_{k_i}$  besteht ja genau aus  $2^{k_i}$  Intervallen der Länge  $3^{-k_i}$ ). Es gilt dann

$$3^{-s} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{diam}(D_i)}{2}\right)^s \leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{diam}(C_i)}{2}\right)^s \tag{4.2}$$

und  $\bigcup_{i \leq N} D_i \supseteq A_{k_0}$ , wenn  $3^{-k_0}$  die kleinste Intervalllänge der Intervalle  $D_i$ ,  $i \leq N$  bezeichnet. Da zwei Intervalle  $D_i, D_l$  der Mengen  $A_k$  und  $A_l$  zueinander disjunkt oder sind oder eines Teilmenge des anderen Intervalls ist dürfen wir (gegebenenfalls nach Elimination von Teilintervallen) annehmen, dass alle  $D_i$  zueinander

disjunkt sind ohne die Überdeckungseigenschaft zu verlieren. Ist  $D_{i_1}$  in einem Intervall von  $A_{k_0}$  enthalten, so gibt es in  $A_{k_0-1}$  ein Intervall  $\tilde{D}_i$  mit  $\tilde{D}_i \subset D_{i_1}$ . Dann muss aber auch das Intervall  $D_{i_2} := \tilde{D}_i \setminus D_{i_1}$  ein Teilintervall von  $A_{k_0}$  sein, das in unserer Überdeckung enthalten ist. Ersetzen wir in dieser Überdeckung  $D_{i_1} \cup D_{i_2}$  durch  $\tilde{D}_i$ , so ändert sich in (4.2) die linke Summe um  $\left(\frac{3^{-k_0+1}}{2}\right)^s - 2\left(\frac{3^{-k_0}}{2}\right)^s$ , sie wird also für  $s < \frac{\log 2}{\log 3}$  kleiner. Verfahren wir so mit allen Intervallen  $D_i$  der Länge  $k_0$ , so erhalten wir eine Überdeckung von  $\cup_{i \leq N} D_i$  durch Intervalle  $D'_k$  der Länge  $\geq 3^{-k_0+1}$ , mit

$$\sum_{k=1}^{N'} \left(\frac{\text{diam}(D'_k)}{2}\right)^s \leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{diam}(D_i)}{2}\right)^s.$$

Wiederholen wir diesen Schritt für alle Intervalle der Länge  $3^{-k_0+1}$ , danach für die so gewonnene Überdeckung für die Intervalle der Länge  $3^{-k_0+2}$  u.s.w., so erhalten wir für  $3^{-n_0-1} < \delta \leq 3^{-n_0}$  und  $s < \frac{\log 2}{\log 3}$ , da keine der Mengen  $C_i$  einen Durchmesser größer als  $\delta$  hat eine Überdeckung von  $C$ , die genau aus den Intervallen  $A_{n_0,j}$  der Menge  $A_{n_0}$  besteht und es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{diam}(C_i)}{2}\right)^s &\geq 3^{-s} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{diam}(D_i)}{2}\right)^s \geq 3^{-s} \sum_{j=1}^{2^{n_0}} \left(\frac{\text{diam}(A_{n_0,j})}{2}\right)^s \\ &\geq 6^{-s} (2 \cdot 3^{-s})^{n_0}. \end{aligned}$$

Also gilt  $\mathcal{H}_\delta^s(C) \geq \omega_s 6^{-s} (2 \cdot 3^{-s})^{n_0}$  für  $\delta < 3^{-n_0}$ . Für  $s < \frac{\log 2}{\log 3}$  geht  $6^{-s} (2 \cdot 3^{-s})^{n_0}$  für  $n_0 \rightarrow \infty$  gegen  $\infty$ , Die Hausdorffdimension von  $C$  ist also auch nach unten durch  $\frac{\log 2}{\log 3}$  beschränkt, d.h. sie ist  $\frac{\log 2}{\log 3}$ .

**Satz 4.1.7.** *In einem metrischen Raum  $(M, d)$  sind durch das Hausdorffmaß  $\mathcal{H}^s$  und die Mengenfunktionen  $\mathcal{H}_\delta^s$  für jedes  $0 \leq s, 0 < \delta$  äußere Maßfunktionen definiert.*

*Beweis.* Aus der Definition des Hausdorffmaßes folgt unmittelbar für alle  $\delta > 0$ :

- $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = \mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$
- $\mathcal{H}_\delta^s(A), \mathcal{H}^s(A) \in [0, \infty] \forall A \subseteq M$
- $\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \mathcal{H}_\delta^s(B), \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$  für alle  $A \subseteq B$  (Monotonie).

Um zu sehen, dass  $\mathcal{H}_\delta^s$  und  $\mathcal{H}^s$  äußere Maßfunktionen sind bleibt also noch die  $\sigma$ -Subadditivität zu zeigen. Sei  $A \subseteq \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ ,  $\delta > 0$  und für  $i \in \mathbb{N}$  sei  $A_i \subseteq \cup_{l \in \mathbb{N}} C_{i,l}$  mit  $\text{diam}(C_{i,l}) \leq \delta$ .  $((C_{i,l})_l)$  ist  $\delta$ -Überdeckung von  $A_i$ . Dann ist  $\cup_{(i,l) \in \mathbb{N}^2} C_{i,l}$  eine  $\delta$ -Überdeckung von  $A$ , womit folgt

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \omega_s \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{N}} (\text{diam}(C_{i,l})/2)^s.$$



Bilden wir rechts das Infimum der Summen  $\sum_{l \in \mathbb{N}} (\text{diam}(C_{i,l})/2)^s$  aller  $\delta$ -Überdeckungen der Mengen  $A_i$ , so erhalten wir

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_i),$$

also die  $\sigma$ -Subadditivität von  $\mathcal{H}_\delta^s$  und wenn wir in dieser Ungleichung  $\delta$  gegen 0 gehen lassen die von  $\mathcal{H}^s$ :

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_i).$$

Damit sind  $\mathcal{H}^s$  und  $\mathcal{H}_\delta^s$  äußere Maßfunktionen. □

Um zu zeigen, dass das Hausdorffmaß ein Borelmaß ist, werden wir nicht die  $\sigma$ -Supadditivität von  $\mathcal{H}_\delta^s$  beweisen die Carathéodory-Messbarkeit bezüglich einer äußeren Maßfunktion verwenden. Dafür benötigen wir folgenden Hilfssatz, der eine hinreichende Bedingung dafür gibt, dass die  $\sigma$ -Algebra der Carathéodory-messbaren Teilmengen bez. eines äußeren Maßes auf  $M$  die Borel- $\sigma$ -Algebra umfasst.

Wir bezeichnen mit  $\text{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$  den Abstand der Mengen  $A$  und  $B$ . Ein äußeres Maß, das

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad (4.3)$$

für alle Teilmengen  $A, B$  von  $M$  mit  $\text{dist}(A, B) > 0$  erfüllt heißt *metrisches äußeres Maß*.

**Satz 4.1.8.** *Für eine äußere Maßfunktion  $\mu^*$  auf einem metrischen Raum  $M$  sind alle Borelmengen  $\mu^*$ -messbar.*

*Beweis.* Das Mengensystem der bezüglich einer äußeren Maßfunktion Carathéodory-messbaren Mengen ist immer eine  $\sigma$ -Algebra (vgl. [EL]). Zugleich ist die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen in einem topologischen Raum genau die von den offenen Mengen oder äquivalent die von den abgeschlossenen Mengen erzeugte  $\sigma$ -Algebra. Es genügt nach dem Carathéodory-Kriterium zu zeigen, dass  $\mu^*$  eine äußere Maßfunktion ist, bezüglich der alle abgeschlossenen Mengen messbar sind, d.h. wir müssen zeigen, dass für jede abgeschlossene Menge  $C$  und jede Menge  $A \subset M$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \cap C^c) \quad (\text{Carathéodory-Messbarkeit der Menge } C)$$

gilt. Es ist  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \cap C^c)$  wegen der Subadditivität der äußeren Maßfunktion  $\mu^*$ , es bleibt also

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \cap C^c) \quad \text{für } C = \bar{C}, A \subseteq M \quad (4.4)$$

zu zeigen, wobei wir uns klarerweise auf den Fall  $\mu^*(A) < \infty$  beschränken können. Wir setzen  $C_n := \{x \in M : \text{dist}(x, C) > 1/n\}$  mit  $\text{dist}(x, C) = \inf\{d(x, c) : c \in C\}$ . Es gilt  $\text{dist}(C, C_n) \geq 1/n$  und damit wegen der Monotonie äußerer Maßfunktionen und (4.3)

$$\mu^*(A) \geq \mu^*((A \cap C) \cup (A \cap C_n)) = \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \cap C_n),$$

womit für (4.4) nur noch zu zeigen ist, dass

$$\mu^*(A \cap C_n) \nearrow \mu^*(A \cap C^{\complement}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

gilt. Wir definieren  $D_k := \{x \in A : 1/k \geq \text{dist}(x, C) > 1/(k+1)\}$ . Da  $C$  abgeschlossen ist gilt  $\text{dist}(x, C) = 0$  genau für  $x \in C$  und damit

$$A \cap C^{\complement} = (A \cap C_n) \cup_{k \geq n} D_k. \quad (4.6)$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt  $\text{dist}(y, C) \leq d(x, y) + \text{dist}(x, C)$  und damit

$$\text{dist}(D_k, D_l) \geq \frac{1}{l+1} - \frac{1}{k} > 0 \quad \text{für } k > l+1$$

und wegen (4.3) und der Monotonie von  $\mu^*$

$$\sum_{n \leq 2k \leq N} \mu^*(D_{2k}) = \mu^*(\cup_{n \leq 2k \leq N} D_{2k}) \leq \mu^*(A) < \infty,$$

also die Konvergenz der Reihe  $\sum_{n \leq 2k < \infty} \mu^*(D_{2k})$ . Analog folgt die Konvergenz von  $\sum_{n \leq 2k+1 < \infty} \mu^*(D_{2k+1})$ , also konvergiert  $\sum_{n \leq k < \infty} \mu^*(D_k)$ . Mit der Monotonie und der  $\sigma$ -Subadditivität von  $\mu^*$  erhalten wir schließlich

$$\mu^*(A \cap C_n) \leq \mu^*(A \cap C^{\complement}) = \mu^*((A \cap C_n) \cup_{k \geq n} D_k) \leq \mu^*(A \cap C_n) + \sum_{k \geq n} \mu^*(D_k)$$

und wegen der Konvergenz der Reihe  $\sum_{n \leq k < \infty} \mu^*(D_k)$  folgt die gewünschte Beziehung (4.5) und die  $\mu^*$ -Messbarkeit abgeschlossener Mengen ist gezeigt.  $\blacksquare$

Wir können jetzt mithilfe eines Satzes von Carathéodory zeigen, dass die Bezeichnung Maß für die Mengenfunktion  $\mathcal{H}^s$  gerechtfertigt ist, genauer gilt:

**Satz 4.1.9.** *Alle Borelmengen sind  $\mathcal{H}^s$ -messbar, d.h. das Hausdorffmaß  $\mathcal{H}^s$  ist ein Borelmaß. Dieses besitzt die Regularitätseigenschaft, dass es zu jeder Menge  $A \subseteq M$  eine Borelmenge  $B \supseteq A$  mit  $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$  gibt.*

*Beweis.* Nach einem Satz von Carathéodory bildet das Mengensystem aller bezüglich einem äußeren Maß  $\mu^*$  auf einer Menge  $M$  Carathéodory-messbaren Teilmengen von  $M$  immer eine  $\sigma$ -Algebra (vgl. [EL]). Dabei heißt eine Teilmenge  $A$  von  $M$  Carathéodory-messbar bezüglich  $\mu^*$  oder  $\mu^*$ -messbar, wenn  $\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$  für alle Teilmengen  $E$  von  $M$  gilt.

Um zu sehen, dass alle Borelmengen  $\mathcal{H}^s$ -messbar sind, haben wir nach Satz 4.1.8 zu zeigen, dass  $\mu^*$  ein metrisches äußeres Maß ist. Da  $\mathcal{H}^s$  als äußere Maßfunktion subadditiv ist, genügt es

$$\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B) \tag{4.7}$$

für hinreichend kleine  $\delta > 0$  und  $\text{dist}(A, B) > 0$  zu zeigen. Für  $\text{diam}(C) < \text{dist}(A, B)$  kann aber  $C$  aufgrund der Dreiecksungleichung nicht sowohl mit  $A$  als auch mit  $B$  nichtleeren Schnitt haben. Es folgt, dass es für jede Überdeckung von  $A \cup B$  durch Mengen  $C_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  mit  $\text{diam}(C_i) < \text{dist}(A, B)$  eine Teilmenge  $I \subseteq \mathbb{N}$  gibt mit  $A \subseteq \cup_{i \in I} C_i$  und  $B \subseteq \cup_{i \in \mathbb{N} \setminus I} C_i$ , woraus für  $\delta < \text{dist}(A, B)$  (4.7) und damit dass  $\mu^*$  ein äußeres metrisches Maß ist folgt.

Es bleibt die letzte Behauptung des Satzes, die Regularitätseigenschaft, zu zeigen. Sei  $A \subseteq M$  mit  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$  (anderenfalls wählen wir  $B = M$ ). Dann gilt  $\mathcal{H}_\delta^s(A) < \infty$  für alle  $\delta > 0$ . Wir wählen für  $k \in \mathbb{N}$  eine Überdeckung von  $A$  durch Mengen  $C_i^k$  mit  $\text{diam}(C_i^k) \leq \frac{1}{k}$  und

$$\mathcal{H}_\frac{1}{k}^s(A) + \frac{1}{k} \geq \omega_s \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(C_i^k)/2)^s \geq \mathcal{H}_\frac{1}{k}^s(\cup_i C_i^k) \geq \mathcal{H}_\frac{1}{k}^s(A). \tag{4.8}$$

Wegen  $\text{diam}(C) = \text{diam}(\bar{C})$  für alle  $C \subseteq M$  können wir die Mengen  $C_i^k$  in dieser Ungleichung durch ihren Abschluss ersetzen, bzw. annehmen dass alle Mengen  $C_i^k$  abgeschlossen sind. Es gilt nach (4.8)  $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\frac{1}{k}^s(\cup_i C_i^k)$ . Die Mengen  $\cup_i C_i^k$  sind aber als abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen Borelmengen, damit ist auch  $B := \cap_k (\cup_i C_i^k)$  als abzählbarer Durchschnitt von Borelmengen eine Borelmenge für die  $A \subseteq B$  gilt, womit wir mit der Monotonie des Hausdorffmaßes und (4.8)

$$\mathcal{H}^s(B) \geq \mathcal{H}^s(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\frac{1}{k}^s(A) \geq \mathcal{H}_\frac{1}{k}^s(\cup_i C_i^k) - \frac{1}{k} \geq \mathcal{H}_\frac{1}{k}^s(B) - \frac{1}{k}$$

erhalten. Wegen  $\mathcal{H}_\frac{1}{k}^s(B) \nearrow \mathcal{H}^s(B)$  folgt  $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$ , also die Regularität von  $\mathcal{H}^s$ . □

## 4.2 Flächenformel

Auf dem  $\mathbb{R}^m$  wird wegen der Translations- und Rotationsinvarianz der Metrik durch die Hausdorffmaße  $\mathcal{H}^n$  rotations und translationsinvariante Borelmaße auf

$\mathbb{R}^m$  definiert. Bei geeigneter Normierung wird so ein Flächenmaß gegeben, das im  $\mathbb{R}^n$  mit dem Lebesguemaß übereinstimmt, aber auch für gekrümmte Flächen ein ‘‘Oberflächenmaß’’ liefert. Die Definition des Hausdorffmaßes ist aber offensichtlich äußerst unhandlich um damit explizit ein solches Flächenmaß zu bestimmen. Die folgende Flächenformel erlaubt es für glatt parametrisierte Flächen das Flächenmaß als das Integral über den Parameterbereich mit einer Dichtefunktion darzustellen. Diese Dichtefunktion kann man als die Radon-Nikodým-Dichte des durch das  $n$ -dimensionale Hausdorffmaß vermöge der Parametrisierung durch eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  auf dieser Menge induzierten Maßes auffassen.

Wir zeigen zunächst, dass im  $\mathbb{R}^n$  das  $n$ -dimensionale Hausdorffmaß  $\mathcal{H}^n$  ein Vielfaches des  $n$ -dimensionalen Lebesguemaßes ist, d.h. es gibt eine Konstante  $\omega_n$  mit  $\omega_n \mathcal{H}^n = \lambda^n$ . Damit liefert das  $n$ -dimensionale Hausdorffmaß ein Maß, das unserer Vorstellung eines  $n$ -dimensionalen Oberflächenmaßes im  $\mathbb{R}^m$  entspricht. Da die Definition des Hausdorffmaßes aber eine direkte Berechnung auch für einfache Flächen nur mit sehr hohem Aufwand ermöglicht, benötigen wir eine Formel, die diese Berechnung einfach ermöglicht. Für glatte Flächen liefert diese die Flächenformel.

Wir zeigen zuerst:

**Satz 4.2.1.** *Ein Borelmaß auf  $\mathbb{R}^n$ , das translationsinvariant und auf beschränkten Mengen endlich ist, ist ein Vielfaches des Lebesguemaßes  $\lambda^n$ .*

*Beweis.* Da die Borel- $\sigma$ -Algebra von dem Ring der dyadischen Würfel erzeugt wird, und ein translationsinvariantes Maß, das auf kompakten Mengen endlich ist, durch das Maß eines dyadischen Würfels bestimmt ist, folgt aus dem Fortsetzungssatz ([EL]) dass dieses Maß ein Vielfaches des Lebesguemaßes ist.  $\square$

**Lemma 4.2.2.** *Sei  $W$  der abgeschlossene Einheitswürfel in  $\mathbb{R}^n$  und  $\delta > 0$ . Dann gibt es eine Folge  $(\bar{B}(x_i, r_i))$  abgeschlossener disjunkter Kugeln in  $W$  mit*

$$i) \quad r_i < \delta \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$ii) \quad \lambda^n(W \setminus \cup_{i \in \mathbb{N}} \bar{B}(x_i, r_i)) = 0$$

$$iii) \quad \forall k \in \mathbb{N} : W \subseteq \cup_{i \leq k} \bar{B}(x_i, r_i) \cup \cup_{i > k} \bar{B}(x_i, 3r_i)$$

*Beweis.* Wir wählen die Folge disjunkter Kugeln  $\bar{B}(x_i, r_i)$  mit Radius kleiner  $\delta$  in  $W$  induktiv wie folgt:  $\bar{B}(x_1, r_1) \subset W$  sei beliebig mit  $r_1 < \delta$ . Sind die Kugeln  $\bar{B}(x_i, r_i)$  für  $i \leq k$  gewählt, wählen wir

$$\bar{B}(x_{k+1}, r_{k+1}) \subset W \setminus \cup_{i \leq k} \bar{B}(x_i, r_i)$$

so, dass  $2\delta > 2r_{k+1} > \min(\sup\{r : \exists \mathbf{x} \in W, \bar{B}(\mathbf{x}, r) \subset W \setminus \cup_{i \leq k} \bar{B}(x_i, r_i)\}, \delta)$  gilt. (D.h. wir wählen eine Kugel mit relativ großem möglichem Radius  $< \delta$ .) Da

die Kugeln  $\bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i)$  disjunkte Teilmengen von  $W$  sind muss die Reihe  $\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^n$  konvergieren und  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge sein.

Sei  $\mathbf{x} \in W^\circ \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i)$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Wir wählen für  $k \in \mathbb{N}$  ein  $\rho > 0$  so, dass  $\bar{B}(\mathbf{x}, \rho) \cap \bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i) = \emptyset \quad \forall i \leq k$  gilt. Da die Kugeln abgeschlossen sind gibt es zu jedem  $k$  ein solches  $\rho > 0$ .

Es können nicht alle  $\bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i)$  für  $i > k$  disjunkt zu  $\bar{B}(\mathbf{x}, \rho)$  sein, da im  $i$ -ten Konstruktionsschritt der Folge nur dann  $\bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i)$  statt  $\bar{B}(\mathbf{x}, \rho)$  gewählt werden kann wenn  $2r_i > \rho$  gilt, zugleich aber  $(r_i)_i$  eine Nullfolge ist.

Sei  $i_0 := \min\{i : \bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i) \cap \bar{B}(\mathbf{x}, \rho) \neq \emptyset\}$ . Dann gilt auch  $2r_{i_0} > \rho$ , woraus mit der Dreiecksungleichung  $\mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{x}_{i_0}, 3r_{i_0})$  folgt. Das heißt für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\mathbf{x} \in \bigcup_{i > k} \bar{B}(\mathbf{x}_i, 3r_i)$ , also gilt iii). Aufgrund der Konvergenz der Reihe  $\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^n$  wird  $\sum_{i > k} \lambda^n(\bar{B}(\mathbf{x}_i, 3r_i))$  beliebig klein, wenn  $k$  hinreichend groß wird, also auch die Teilmenge  $W^\circ \setminus \bigcup_{i \leq k} \bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i)$ . Es folgt, dass  $W^\circ \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i)$  und damit auch  $W \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i)$  eine  $\lambda^n$ -Nullmenge wie in ii) behauptet ist.  $\square$

**Satz 4.2.3.** *Im  $\mathbb{R}^n$  gilt  $\mathcal{H}^n = \lambda^n$ .*

*Beweis.* Das Hausdorffmaß ist nach Proposition 4.1.2 translationsinvariant, da die Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  translationsinvariant ist. Da translationsinvariante Borelmaße auf  $\mathbb{R}^n$ , die auf beschränkten Mengen endlich sind nach Satz 4.2.1 Vielfache des Lebesguemaßes sind, genügt es zu zeigen, dass  $\mathcal{H}^n$  auf beschränkten Mengen endlich ist und  $\mathcal{H}^n(W) = 1$  für den Einheitswürfel  $W$  zu zeigen.

Für den Einheitswürfel  $W$  gilt  $\mathcal{H}_{\sqrt{n}/k}^n(W) \leq k^n \frac{\sqrt{n}}{k^n} = \sqrt{n}$ , wie man durch die Überdeckung von  $W$  mit  $k^n$  Würfeln der Kantenlänge  $1/k$  sieht. Es folgt  $\mathcal{H}^n(W) < \infty$  und wegen der Translationsinvarianz, dass  $\mathcal{H}^n$  auf beschränkten Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  endlich ist. Nach Satz 4.2.1 gilt damit  $\mathcal{H}^n = \alpha_n \lambda^n$  für eine geeignete Konstante  $\alpha_n$ .

Für jede Menge  $C$  gilt  $\text{diam}(C) = \text{diam}(\bar{C})$ , deshalb dürfen wir in der Definition des Hausdorffmaßes (4.1) die Mengen  $C_i$  durch  $\bar{C}_i$  ersetzen. Abgeschlossene Mengen sind Borel-messbar und es folgt aus der isodiametrischen Ungleichung 2.1.4  $\omega_n(\text{diam}(C)/2)^n \geq \lambda^n(C)$ , also  $\mathcal{H}_\delta^n(W) \geq 1$  und damit

$$\mathcal{H}^n(W) \geq 1. \quad (4.9)$$

Nach Lemma 4.2.2 können wir eine Folge  $(\bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i))_{i \in \mathbb{N}}$  von disjunkten abgeschlossenen Kugeln mit Radien kleiner  $\delta/2$  und danach  $k$  so groß wählen, dass  $\omega_n \sum_{i > k} (3r_i)^n < \varepsilon$  und  $3r_i < \delta/2$  für alle  $i > k$  gilt. Das ist möglich, da die Kugeln  $\bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i)$  paarweise disjunkt sind, aber alle in  $W$  liegen, also  $\sum_i \lambda^n(\bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i))$  und damit auch  $\sum_i \lambda^n(\bar{B}(\mathbf{x}_i, 3r_i)) = \sum_i 3^n \lambda^n(\bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i))$  konvergiert und  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist.

Wählen wir  $C_i = \bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i)$  für  $i \leq k$  und  $C_i := \bar{B}(\mathbf{x}_i, 3r_i)$  für  $i > k$  als  $\delta$ -Überdeckung von  $W$ , so folgt

$$\mathcal{H}_\delta^n(W) \leq \omega_n \left( \sum_{i \leq k} r_i^n + \sum_{i > k} (3r_i)^n \right) \leq \sum_{i \leq k} \lambda^n(\bar{B}(\mathbf{x}_i, r_i)) + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon$$

und damit  $\mathcal{H}^n(W) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^n \leq 1 + \varepsilon$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, sehen wir  $\mathcal{H}^n(W) \leq 1$ , also mit (4.9)  $\mathcal{H}^n(W) = 1$ .  $\square$

**Korollar 4.2.4.** Für eine lineare Transformation  $L$  des  $\mathbb{R}^n$  gilt

$$\lambda^n(L(B)) = |\det(L)| \lambda^n(B) \quad \forall B \in \mathcal{L}^n.$$

*Beweis.* Wegen der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes ist auch das Maß  $\mu(B) := \lambda^n(L(B))$  translationsinvariant und nach Satz 4.2.1 ein Vielfaches des  $n$ -dimensionalen Lebesguemaßes. Damit genügt es die Behauptung für den  $n$ -dimensionalen Einheitswürfel  $W_n$  zu zeigen. Für  $n = 1$  folgt die Aussage aus der Substitutionsregel. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach  $n$ : Sei  $O$  eine orthogonale Transformation, für die  $A := OL$  eine Matrixdarstellung mit  $a_{n,i} = 0$  für  $1 \leq i < n$  hat. Dann gilt mit Proposition 4.1.2 und Satz 4.2.3

$$\lambda^n(L(B)) = \mathcal{H}^n(L(B)) = \mathcal{H}^n(OL(B)) = \lambda^n(OL(B)).$$

Mit der Translationsinvarianz von  $\lambda^n$ , dem Satz von Fubini und der Induktionsvoraussetzung folgt für

$$OL = A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{a} \\ 0, \dots, 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{1}_{A(W)}(\mathbf{y}, t) = \mathbb{1}_{A_{n-1}(W_{n-1}) + \mathbf{a}(t)}(\mathbf{y}) \mathbb{1}_{[0, a_{n,n}]}(t)$$

$$\begin{aligned} \lambda^n(A(W_n)) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{A_{n-1}(W_{n-1}) + \mathbf{a}(t)}(\mathbf{x}, t) d\lambda^{n-1}(\mathbf{x}) \mathbb{1}_{[0, a_{n,n}]}(t) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{A_{n-1}(W_{n-1})}(\mathbf{x}) d\lambda^{n-1}(\mathbf{x}) \mathbb{1}_{[0, a_{n,n}]}(t) d\lambda(t) \\ &= |\det(A_{n-1})| |a_{n,n}|. \end{aligned}$$

Wegen  $|\det(L)| = |\det(OL)| = |\det(A_{n-1})| |a_{n,n}|$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 4.2.5.** Für eine lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und eine messbare Teilmenge  $A$  des  $\mathbb{R}^n$  gilt

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = \sqrt{\det(L^T L)} \mathcal{H}^n(A).$$

*Beweis.* Hat  $L$  nicht Rang  $n$ , so gilt  $\det(L^T L) = 0$  und wegen Proposition 4.1.2  $\mathcal{H}^n(L(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{H}^n(\mathbb{R}^l)$  für ein  $l < n$ . Wegen Beispiel 4.1.5 und der Monotonie des Hausdorffmaßes gilt dann auch  $\mathcal{H}^n(L(A)) \leq \mathcal{H}^n(\mathbb{R}^l) = 0$ . Wir dürfen also annehmen, dass  $L$  vollen Rang hat. Dann gibt es eine lineare Isometrie  $U$  von  $L(\mathbb{R}^n)$  auf  $\mathbb{R}^n$  und mit Proposition 4.1.2, Satz 4.2.3 und Korollar 4.2.4 folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(L(A)) &= \mathcal{H}^n(UL(A)) = \lambda^n(UL(A)) = |\det(UL)|\lambda^n(A) \\ &= \sqrt{\det((UL)^T UL)}\lambda^n(A) = \sqrt{\det(L^T L)}\lambda^n(A) \\ &= \sqrt{\det(L^T L)}\mathcal{H}^n(A). \quad \square \end{aligned}$$

Mit  $|\mathbf{x}| := (\sum_{i=1}^n (x_i)^2)^{1/2}$  bezeichnen wir hier und im Folgenden die Euklidische Norm von  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Eine Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist in  $\mathbf{y}$  genau dann differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung  $d\varphi(\mathbf{y})$  gibt für die gilt:

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) - d\varphi(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\omega(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$$

mit einer Funktion  $\omega$ , die  $\lim_{h \searrow 0} \omega(h) = 0$  erfüllt. Die lineare Abbildung  $d\varphi(\mathbf{y})$  ist dann eindeutig. Wir beweisen im Folgenden, dass für  $C^1$ -Funktionen  $\varphi$  eine ähnliche Abschätzung lokal auch gilt, wenn wir  $d\varphi(\mathbf{y})$  durch  $d\varphi(\mathbf{y}_0)$  ersetzen, dafür aber in  $\omega$  das Argument  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  durch  $\max(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|, |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|)$  ersetzen.

**Lemma 4.2.6.** *Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge einer offenen Teilmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\varphi = (\varphi_i)_{i \leq m}^T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^1$ -Funktion. Dann gibt es eine nichtfallende Funktion  $\omega: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $\lim_{h \searrow 0} \omega(h) = 0$ , sodass für  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \in K$*

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) - d\varphi(\mathbf{y}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\omega(\max(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|, |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|)) \quad (4.10)$$

*gilt.*

*Beweis.* Die stetige Funktion  $x \mapsto \text{dist}(x, \Omega^c)$  nimmt auf  $K$  ihr Minimum  $2\delta_0$  an. Wegen  $K \subseteq \Omega$  und  $\Omega$  offen gilt  $\delta_0 > 0$ . Die Menge  $\tilde{K} := \overline{\cup_{x \in K} B(x, \delta_0)}$  ist dann kompakt mit  $K \subset \tilde{K} \subset \Omega$ . Wegen der stetigen Differenzierbarkeit sind alle partiellen Ableitungen auf der kompakten Menge  $\tilde{K}$  nach Satz 1.4.13 gleichmäßig stetig, es gibt also eine nichtfallende Funktion  $\omega_0$  auf  $\mathbb{R}_+$  mit  $\lim_{h \searrow 0} \omega_0(h) = 0$  und

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{z}) \right| \leq \frac{\omega_0(|\mathbf{x} - \mathbf{z}|)}{\sqrt{m}} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \tilde{K}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.11)$$

Für konvexe Teilmengen  $C$  von  $\tilde{K}$  liegt mit  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  auch  $\mathbf{y} + t(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  für  $t \in [0, 1]$  in  $\tilde{K}$  und wegen der Differenzierbarkeit der Funktion  $\varphi = (\varphi_i)^T$ ,  $i = 1, \dots, m$  gilt nach dem Mittelwertsatz für  $1 \leq i \leq m$  und die Funktion  $t \mapsto \varphi_i(\mathbf{y} + t(\mathbf{x} - \mathbf{y}))$

$$\varphi_i(\mathbf{x}) - \varphi_i(\mathbf{y}) = \frac{d}{dt}(\varphi_i(\mathbf{y} + t(\mathbf{x} - \mathbf{y}))) \Big|_{t=t_i} = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{y} + t_i(\mathbf{x} - \mathbf{y})), \quad (4.12)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \varphi_i(\mathbf{x}) - \varphi_i(\mathbf{y}) - d\varphi_i(\mathbf{y}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{y} + t_i(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}_0) \right) (x_j - y_j). \end{aligned} \quad (4.13)$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Da  $B(x, \delta_0)$  konvex ist, gilt (4.13) insbesondere für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$  mit  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta_0$ . Es folgt aus (4.11), (4.13) und

$$|\mathbf{y} + t_i(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \mathbf{y}_0| \leq \max(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|, |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|)$$

für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$  mit  $|\mathbf{x}, \mathbf{y}| < \delta_0$

$$\begin{aligned} |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) - d\varphi(\mathbf{y}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2 &= \sum_{i=1}^m (\varphi_i(\mathbf{x}) - \varphi_i(\mathbf{y}) - d\varphi_i(\mathbf{y}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{y}))^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{y} + t_i(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}_0) \right) (x_j - y_j) \right)^2 \\ &\leq m \frac{\omega_0^2(\max(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|, |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|))}{m} \sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \\ &= \omega_0^2(\max(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|, |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|)) |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Der Satz gilt also unter der zusätzlichen Voraussetzung  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta_0$ .

Wegen der Stetigkeit der Ableitung ist  $\|d\varphi\|$  auf der kompakten Menge  $K$  durch ein  $C_1 \in \mathbb{R}_+$  beschränkt. Es folgt

$$|d\varphi(\mathbf{y}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq C_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_0. \quad (4.15)$$

Wegen der Stetigkeit von  $\varphi$  auf  $K$  ist  $\varphi$  auf  $K$  durch ein  $C_2 \in \mathbb{R}_+$  beschränkt und es folgt

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| \leq 2\|\varphi\| \leq 2C_2 \leq C_3 |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (4.16)$$

für  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \delta_0$  und  $C_3 = 2C_2/\delta_0$ . Für  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \delta_0$  folgt also mit (4.15) und (4.16)

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) - d\varphi(\mathbf{y}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq (C_1 + C_3) |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (4.17)$$



Für

$$\omega(\delta) := \begin{cases} \omega_0(\delta) & \delta < \delta_0 \\ \max(\omega_0(\delta_0), C_1 + C_3) & \delta \geq \delta_0 \end{cases}$$

folgt (4.10) aus (4.14) und (4.17).  $\square$

**Lemma 4.2.7.** *Ist  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega$  offen in  $\mathbb{R}^n$  eine injektive  $C^1$ -Abbildung, für die  $d\varphi$  auf einer kompakten Teilmenge  $K$  von  $\Omega$  Rang  $n$  hat, so gibt es eine Konstante  $C$  mit*

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq C|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K. \quad (4.18)$$

*Beweis.* Für  $x \in K$  gibt es einen  $n$ -dimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^m$  für den die Funktion  $\tilde{\varphi} := \text{pr}_{\mathbf{x}} \varphi$  in  $\mathbf{x}$  vollen Rang  $n$  hat, wobei  $\text{pr}_{\mathbf{x}}$  die Projektion auf diesen Unterraum ist.  $\tilde{\varphi}$  ist  $C^1$  und damit nach dem Umkehrsatz Satz 8.1.3 in einer offenen Umgebung  $U_{\mathbf{x}}$  von  $\mathbf{x}$  ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung  $V_{\mathbf{x}}$  von  $\tilde{\varphi}(\mathbf{x})$  in  $\text{pr}_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^m)$  ist.

Aus der stetigen Differenzierbarkeit von  $\tilde{\varphi}^{-1}$  auf  $V_{\mathbf{x}}$  folgt mit Lemma 4.2.6 angewandt auf  $\tilde{\varphi}^{-1}$  mit  $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ ,  $\tilde{\varphi}(\mathbf{y}) = \mathbf{z}$ , für  $\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{z}_0 \in V_{\mathbf{x}}$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= |\tilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{w}) - \tilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{z})| \\ &\leq \|d\tilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{z}_0)\| |\mathbf{w} - \mathbf{z}| + |\mathbf{w} - \mathbf{z}| \omega(\max(|\mathbf{w} - \mathbf{z}_0|, |\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|)) \\ &\leq C_{\mathbf{x}} |\mathbf{w} - \mathbf{z}| = C_{\mathbf{x}} |\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) - \tilde{\varphi}(\mathbf{y})| \end{aligned} \quad (4.19)$$

für  $C_{\mathbf{x}} = \|d\tilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{z}_0)\| + \omega(\text{diam}(\varphi(K)))$  und  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_{\mathbf{x}}$ .

Sei  $(U_{\mathbf{x}_1}, \dots, U_{\mathbf{x}_r})$  eine Überdeckung von  $K$ , die (4.19) mit  $(C_{\mathbf{x}_1}, \dots, C_{\mathbf{x}_r})$  erfüllen. Dann ist  $(U_{\mathbf{x}_1} \times U_{\mathbf{x}_1}, \dots, U_{\mathbf{x}_r} \times U_{\mathbf{x}_r})$  eine offene Überdeckung der Diagonale  $D := \{(x, x) : x \in K\}$  von  $K$  und  $W := \cup_{i=1}^r U_{\mathbf{x}_i} \times U_{\mathbf{x}_i}$  ist eine offene Obermenge von  $D$  in  $K \times K$ , auf der

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq C_{\alpha} |\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) - \tilde{\varphi}(\mathbf{y})| \quad \text{für } C_{\alpha} := \min\{C_{\mathbf{x}_1}, \dots, C_{\mathbf{x}_r}\} \quad (4.20)$$

gilt. Auf der kompakten Menge  $K \times K \setminus W$  ist die Funktion  $\Phi : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})|}$  wegen der Injektivität von  $\varphi$  definiert und stetig und damit durch eine Konstante  $C_{\beta}$  beschränkt. Mit 4.20 folgt (4.18) für  $C = \max\{C_{\alpha}, C_{\beta}\}$ .  $\square$

Sei  $E$  eine messbare Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$ . Die Euklidische Metrik  $d_m$  auf  $\mathbb{R}^m$  induziert eine Metrik  $d_m$  auf  $E$ . Das  $n$ -dimensionale **Flächenmaß** auf  $\varphi(\Omega)$  sei als das  $n$ -dimensionale Hausdorffmaß  $\mathcal{H}^n$  auf  $(E, d_m)$  definiert.

Wir haben damit ein Maß definiert, das invariant unter Isometrien ist und im Fall  $m = n$  mit dem  $n$ -dimensionalen Lebesgemaß übereinstimmt. Die Definition des Flächenmaßes über die dem Hausdorffmaß zugrundeliegende Überdeckungseigenschaft ist aber für die konkrete Berechnung auch einfacher Flächen

äußerst aufwendig oder macht diese nicht möglich. Wir benötigen also eine Formel zur Berechnung von Flächenmaßen.

Eine  $C^1$ -Abbildung  $\varphi$  von einer offenen Teilmenge  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^m$  heißt **Immersion**, wenn  $d\varphi$  auf ganz  $\Omega$  Rang  $n$  hat.

**Satz 4.2.8** (Flächenformel für injektive Immersionen). *Auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  sei eine injektive Immersion  $\varphi$  nach  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq n$  gegeben. Für das  $n$ -dimensionale Flächenmaß  $\mathcal{H}^n$  auf  $\varphi(\Omega)$  gilt für jede messbare Teilmenge  $A$  von  $\Omega$*

$$\mathcal{H}^n(\varphi(A)) = \int_A \sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)} d\lambda^n, \quad (4.21)$$

das heißt das durch die messbare Abbildung  $\varphi$  durch  $\mathcal{H}^n$  auf  $\Omega$  induzierte Maß ist absolut stetig bezüglich dem  $n$ -dimensionalen Lebesguemaß  $\lambda^n$  mit Dichtefunktion  $\sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)}$ .

*Beweis.* Jede offene Teilmenge  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^n$  ist der Grenzwert einer monoton steigenden Folge  $(\bigcup_{\mathbf{i}: \overline{W_{\mathbf{i}}^k} \subset \Omega} W_{\mathbf{i}}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  von disjunkten Vereinigungen halboffener dyadischer Würfel

$$W_{\mathbf{i}}^k := \times_{l=1}^n [i_l 2^{-k}, (i_l + 1) 2^{-k})$$

mit  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$  und  $\overline{W_{\mathbf{i}}^k} \subset \Omega$ .

Ein halboffener Würfel  $W$  sowie  $\overline{W}$  sind klarerweise Borel-messbar in  $\mathbb{R}^n$ . Wegen dem Satz von der monotonen Konvergenz genügt es (4.21) für halboffene Würfel  $W$  mit  $\overline{W} \subset \Omega$  zu zeigen. Wir zerlegen  $W$  in  $k^n$  gleichgroße halboffene Würfel  $W_{k,l}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq l \leq k^n$  und wählen für alle  $k, l$  ein  $\mathbf{y}_{k,l} \in W_{k,l}$ . Ist  $d_W$  die Länge der Diagonale von  $W$ , so gilt  $\text{diam}(W_{k,l}) = d_W/k$ . Wenden wir Lemma 4.2.6 und 4.2.7 auf  $W$  und die Funktion  $\varphi$  an, so erhalten wir eine Funktion  $\omega$  mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$  und eine Konstante  $C$ , für die

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) - d\varphi(\mathbf{y}_{k,l})(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \omega(\delta) \leq C |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| \omega(\delta)$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_{k,l} \in W$  mit  $\max(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_{k,l}|, |\mathbf{y} - \mathbf{y}_{k,l}|) \leq \delta$  gilt. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir damit

$$\begin{aligned} |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| &\leq |d\varphi(\mathbf{y}_{k,l})(\mathbf{x} - \mathbf{y})| + C |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| \omega(\delta) \quad \text{und} \\ |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| &\geq |d\varphi(\mathbf{y}_{k,l})(\mathbf{x} - \mathbf{y})| - C |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| \omega(\delta) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| (1 - C\omega(d_W/k)) &\leq |d\varphi(\mathbf{y}_{k,l})(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \\ &\leq |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| (1 + C\omega(d_W/k)) \end{aligned}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq l \leq k^n$  und  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_{k,l}$ . Mit Proposition 4.1.2 folgt

$$\begin{aligned} (1 - C\omega(d_W/k))^n \mathcal{H}^n(\varphi(W_{k,l})) &\leq \mathcal{H}^n(d\varphi(\mathbf{y}_{k,l})(W_{k,l})) \\ &\leq (1 + C\omega(d_W/k))^n \mathcal{H}^n(\varphi(W_{k,l})). \end{aligned}$$

Für  $k \rightarrow \infty$  gilt  $C\omega(d_W/k) \rightarrow 0$  und es folgt aus der Additivität von  $\mathcal{H}^n$ , Korollar 4.2.5 und Satz 4.2.3

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(\varphi(W)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{k^n} \mathcal{H}^n(\varphi(W_{k,l})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{k^n} \mathcal{H}^n(d\varphi(\mathbf{y}_{k,l})(W_{k,l})) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{k^n} \sqrt{\det(d\varphi(\mathbf{y}_{k,l})^T d\varphi(\mathbf{y}_{k,l}))} \lambda^n(W_{k,l}) \\ &= \int_W \sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)} d\lambda^n. \end{aligned}$$

Das ist genau die geforderte Gleichung (4.21) für Würfel  $W$ . □

Mit der Flächenformel können wir einen wichtigen Satz der Differentialtopologie herleiten: Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Abbildung auf einer offenen Teilmenge  $\Omega$  von  $\mathbb{R}^n$ . Ein Element  $x \in \Omega$  heißt **kritischer Punkt**, wenn  $\text{Ran}(df)(x) < n$  gilt. Eine  $C^1$ -Abbildung kann keine kritischen Punkte haben oder wie eine konstante Abbildung nur aus kritischen Punkten bestehen. Ein Element  $y$  des Wertebereichs von  $f$  heißt **kritischer Wert**, wenn es in seinem Urbild einen kritischen Punkt gibt. Im Gegensatz zu kritischen Punkten ist die Menge der kritischen Werte maßtheoretisch immer klein. Es gilt nämlich:

**Satz 4.2.9 (Sard).** *Für eine  $C^1$ -Abbildung  $\varphi$  von  $\mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega$  offen, hat die Menge der kritischen Werte von  $\varphi$   $n$ -dimensionales Hausdorffmaß 0.*

*Beweis.* Wir betrachten für  $\varepsilon > 0$  die Abbildung

$$F_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}, \quad x \mapsto (\varphi(x), \varepsilon x).$$

$dF_\varepsilon$  hat auf  $\Omega$  vollen Rang. Sei  $N$  die Menge der kritischen Punkte von  $\varphi$ . Aus jeder Überdeckung von  $F_\varepsilon(N)$  durch Mengen  $C_i \subset \mathbb{R}^{m+n}$  geht durch Projektion auf die ersten  $m$  Koordinaten eine Überdeckung von  $\varphi(N)$  durch Mengen  $\tilde{C}_i \subset \mathbb{R}^m$  hervor, für die gilt  $\text{diam}(\tilde{C}_i) \leq \text{diam}(C_i)$ . Es folgt aus der Definition des Hausdorffmaßes und der Flächenformel Satz 4.2.8

$$\mathcal{H}^n(\varphi(N)) \leq \mathcal{H}^n(F_\varepsilon(N)) = \int_N \sqrt{\det(dF_\varepsilon^T dF_\varepsilon)} d\lambda^n.$$

Es gilt

$$dF_\varepsilon^T dF_\varepsilon = (d\varphi^T, \varepsilon E_n) \begin{pmatrix} d\varphi \\ \varepsilon E_n \end{pmatrix} = d\varphi^T d\varphi + \varepsilon^2 E_n,$$

wobei  $E_n$  die  $n$ -dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.  $\det(dF_\varepsilon^T dF_\varepsilon)$  ist also das charakteristische Polynom von  $d\varphi^T d\varphi$  ausgewertet bei  $-\varepsilon^2$ , das an kritischen Punkten eine Nullstelle in 0 hat. Es folgt, da die Koeffizientenfunktionen von  $d\varphi$  stetig sind, dass  $\sqrt{\det(dF_\varepsilon^T dF_\varepsilon)}$  auf kompakten Teilmengen  $K$  von  $N$  für  $\varepsilon \in [0, 1]$  beschränkt sind und für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen 0 konvergiert. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt  $\mathcal{H}^n(\varphi(K)) = 0$ . Da  $\mathbb{R}^n$   $\sigma$ -kompakt ist folgt  $\mathcal{H}^n(\varphi(N)) = 0$ .  $\square$

Die hier formulierte Version des Satzes von Sard ist nur für  $n \leq m$  nichttrivial. Der allgemeine Satz von Sard sagt dass für  $n > m$  und eine  $C^{n-m+1}$ -Funktion  $\varphi$  die Menge der kritischen Werte eine Nullmenge bezüglich dem  $m$ -dimensionalen Hausdorffmaß ist. Der Beweis ist dann allerdings aufwendiger.

Mit dem Satz von Sard können wir die Flächenformel für injektive  $C^1$ -Funktionen herleiten deren Ableitungsmatrix nicht notwendigerweise überall vollen Rang hat:

**Satz 4.2.10** (Flächenformel für injektive  $C^1$ -Abbildungen). *Sei  $\varphi$  eine injektive  $C^1$ -Abbildung einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq n$ . Für das  $n$ -dimensionale Flächenmaß  $\mathcal{H}^n$  auf  $\varphi(\Omega)$  gilt für jede messbare Teilmenge  $A$  von  $\Omega$*

$$\int_{\varphi(A)} d\mathcal{H}^n(y) = \int_A \sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)} d\lambda^n. \quad (4.22)$$

*Beweis.* Für eine messbare Teilmenge  $A$  von  $\Omega$  gilt nach dem Satz von Sard  $\mathcal{H}^n(\varphi(A \cap N)) = 0$ , wir können Satz 4.2.8 auf die Abbildung  $f: A \setminus N \rightarrow \varphi(A \setminus N)$  anwenden und erhalten, da der Integrand  $\sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)}$  auf  $N$  verschwindet:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(A)} d\mathcal{H}^n(y) &= \int_{\varphi(A \setminus N)} d\mathcal{H}^n(y) = \int_{A \setminus N} \sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)} d\lambda^n \\ &= \int_A \sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)} d\lambda^n, \end{aligned} \quad \square$$

**Korollar 4.2.11.** *Für einen stetig differenzierbaren injektiven Weg  $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt die Flächenformel  $\mathcal{H}^1(\gamma(a, b)) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ , also genau die Formel für die Weglänge eines stetig differenzierbaren Weges  $\gamma$ .*

Die Forderung der Injektivität kann klarerweise nicht ersatzlos gestrichen werden. Parametrisiert man etwa den Einheitskreis über die Abbildung  $t \mapsto e^{it}$  und das Intervall  $[0, 4\pi]$ , so bleibt die Bildmenge gleich aber  $\int_{[0, 4\pi]} d\lambda^1 = 4\pi$ .

**Satz 4.2.12** (Flächenformel für  $C^1$ -Abbildungen). *Sei  $\varphi$  eine  $C^1$ -Abbildung einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq n$ . Für das  $n$ -dimensionale Flächenmaß  $\mathcal{H}^n$  auf  $\varphi(\Omega)$  gilt für jede messbare Teilmenge  $A$  von  $\Omega$*

$$\int_A \sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)} d\lambda^n = \int_{\varphi(A)} \#(\varphi^{-1}(y)) d\mathcal{H}^n(y). \quad (4.23)$$

**Beweis:** Wir betrachten zunächst eine messbare Teilmenge  $A$  von  $\Omega$  auf der  $d\varphi$  vollen Rang hat aber nicht notwendigerweise injektiv ist.. Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen gibt es für  $x \in A$  eine Umgebung  $U_x$  von  $x$  in der  $\varphi$  injektiv ist und  $d\varphi$  vollen Rang hat. Sei  $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots$  eine abzählbare Überdeckung von  $A$  durch solche Umgebungen und  $A_1 := U_{x_1} \cap A, (A_{i+1} := U_{x_{i+1}} \setminus A_i) \cap A.$   $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ist dann eine Folge paarweise disjunkter messbarer Mengen, die  $A$  überdecken. Nach der Flächenformel 4.2.8 gilt:

$$\begin{aligned} \int_A \sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)} d\lambda^n &= \sum_i \int_{A_i} \sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)} d\lambda^n = \sum_i \mathcal{H}^n(\varphi(A_i)) \\ &= \sum_i \int_{\varphi(A_i)} \mathbb{1}_{\varphi(A_i)} d\mathcal{H}^n = \int_{\varphi(A)} \sum_i \mathbb{1}_{\varphi(A_i)} d\mathcal{H}^n = \int_{\varphi(A)} \#(\varphi^{-1}(y)) d\mathcal{H}^n(y). \end{aligned}$$

□

*Beispiel 4.2.13.* Die durch die Gleichung  $z = x^2 - y^2$  2-dimensionale Fläche im  $\mathbb{R}^3$  ist ein **Hyperbolisches Paraboloid**- Wir berechnen das Flächenmaß, also das 2-dimensionale Hausdorffmaß für das durch  $x^2 + y^2 < R$  beschriebene Flächenstück:

Für

$$\begin{aligned} \theta(r, \varphi) &= \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ r^2(\cos 2\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten wir

$$d\theta(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \\ 2r \cos 2\varphi & -2r^2 \sin 2\varphi \end{pmatrix}$$

und

$$d\theta(r, \varphi)^t d\theta(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 + 4r^2 \cos^2 2\varphi & -4r^3 \cos 2\varphi \sin 2\varphi \\ -4r^3 \cos 2\varphi \sin 2\varphi & r^2 + 4r^4 \sin^2 2\varphi \end{pmatrix}$$

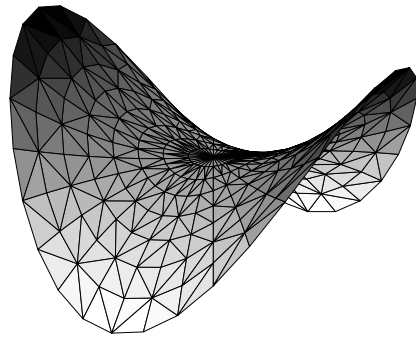
also  $\det(d\theta(r, \varphi)^t d\theta(r, \varphi)) = r^2 + 4r^4$ . Damit ist das Flächenmaß

$$\mathcal{H}^2(\theta(B(0, R))) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{\det(d\theta^t d\theta)} dr d\varphi = 2\pi \int_0^R r \sqrt{1 + 4r^2} dr.$$

Die Substitution  $1 + 4r^2 = u$  führt auf

$$\mathcal{H}^2(\theta(B(0, R))) = \frac{2\pi}{8} \int_1^{1+4R^2} \sqrt{u} du = \frac{\pi}{6} \left( (1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$$

**Hyperbolisches Paraboloid**



**Satz 4.2.14.** *Es sei die  $n$ -dimensionale Fläche im  $\mathbb{R}^{n+1}$  vermöge der Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$  mit einer  $C^1$ -Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  offen, definiert. Dann gilt für jede auf  $\varphi(\Omega)$  messbare Funktion  $g$*

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \sqrt{1 + |\nabla f(\mathbf{x})|^2} d\lambda^n(\mathbf{x}) = \int_{\varphi(\Omega)} g d\mathcal{H}^n,$$

wobei das linke Integral genau dann existiert, wenn das rechte Integral existiert.

*Beweis.* Wir haben wegen Satz 4.2.8 nur zu zeigen, dass  $\det(d\varphi^T d\varphi) = 1 + |\nabla f|^2$  gilt. Die Ableitungsmatrix  $d\varphi$  von  $\varphi$  berechnet sich zu

$$d\varphi = \begin{pmatrix} E_n \\ (\nabla f)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

und damit

$$(d\varphi)^T d\varphi = (E_n, \nabla f) \begin{pmatrix} E_n \\ (\nabla f)^T \end{pmatrix} = E_n + \nabla f (\nabla f)^T.$$

Sei  $O$  eine orthogonale  $n \times n$ -Matrix, mit  $O\nabla f = (|\nabla f|, 0, 0, \dots, 0)^T$ . Dann gilt

$$O(E_n + \nabla f (\nabla f)^T) O^T = E_n + O\nabla f (O\nabla f)^T = \begin{pmatrix} 1 + |\nabla f|^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

und somit  $\det((d\varphi)^T d\varphi) = \det(E_n + O(\nabla f)(\nabla f)^T O^T) = 1 + |\nabla f|^2$ . ▣

**Satz 4.2.15.** *Sei die 2-dimensionale Fläche im  $\mathbb{R}^3$  durch einen  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D$  offen gegeben. Dann gilt für jede auf  $\varphi(D)$  messbare Funktion  $g$*

$$\int_D g \circ \varphi(x, y) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| d\lambda^2(x, y) = \int_{\varphi(D)} g d\mathcal{H}^2,$$

wobei das linke Integral genau dann existiert, wenn das rechte Integral existiert.

*Beweis.* Man verifiziert unmittelbar, dass  $|\det(d\varphi^T d\varphi)| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2$  gilt. Mit der Flächenformel Satz 4.2.8 folgt die Behauptung. ▣

**Bemerkung:** Die Vektoren  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x})^T$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})^T$  sind Tangentialvektoren der Fläche, die weil  $\varphi$  Rang 2 hat linear unabhängig sind.  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  ist dann ein zur Tangentialebene normaler Vektor, dessen Länge der Dichtefunktion von  $\mathcal{H}^2$  bezüglich dem Lebesguemaß  $\lambda^2$  unter der Abbildung  $\varphi$  entspricht.

**Satz 4.2.16.** Ist eine rotationssymmetrische Fläche  $A \subset \mathbb{R}^3$  durch

$$\varphi(z, \theta) = (f(z) \cos \theta, f(z) \sin \theta, z)^T$$

mit  $z \in (a, b)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  und  $f$  stetig differenzierbar gegeben, so gilt für messbare Funktionen  $g$

$$\int_A g d\mathcal{H}^2 = \int_{(a,b) \times (0,2\pi)} g \circ \varphi(z, \theta) |f(z)| \sqrt{1 + f'^2(z)} d\lambda^2(z, \theta),$$

bzw. für die Fläche  $\mathcal{H}^2(A) = 2\pi \int_a^b |f(z)| \sqrt{1 + f'^2(z)} dz$ .

*Beweis.* Wegen

$$H^1(\varphi((a, b), \{0\})) = \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi(z, 0)}{\partial z} \right| dz < \infty,$$

folgt mit Satz 4.1.4  $H^2(\varphi((a, b), \{0\})) = 0$  und damit

$$H^2(\varphi((a, b), [0, 2\pi])) = H^2(\varphi((a, b), (0, 2\pi))).$$

Aus

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \times \frac{\partial \varphi(z)}{\partial \theta} \right| (z, \theta) &= \left| \begin{pmatrix} f'(z) \cos \theta \\ f'(z) \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -f(z) \sin \theta \\ f(z) \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} f(z) \cos \theta \\ f(z) \sin \theta \\ ff'(z) \end{pmatrix} \right| \\ &= |f(z)| \sqrt{1 + f'^2(z)}. \end{aligned}$$

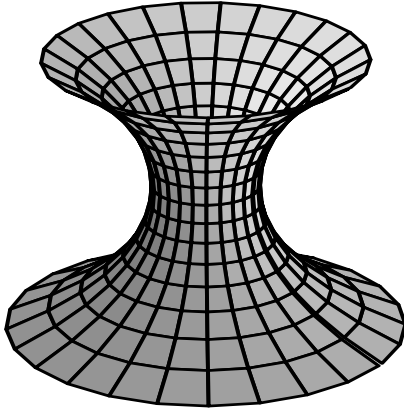
erhalten wir mit Satz 4.2.15 die Behauptung. □

**Beispiel 4.2.17.** Eine **Katenoide**  $K$  ist der für  $c > 0$ ,  $a < b$  durch

$$\varphi(z, \theta) = \left( c \cosh \frac{z}{c} \cos \theta, c \cosh \frac{z}{c} \sin \theta, z \right), \quad z \in (a, b), \theta \in [0, 2\pi)$$

beschriebene Rotationskörper.

Wegen  $\mathcal{H}^1(\{(z, 0) : z \in (a, b)\}) < \infty$  folgt mit Satz 4.1.4  $\mathcal{H}^2(\{(z, \theta) : z \in (a, b), \theta \in (0, 2\pi)\}) = \mathcal{H}^2(\{(z, \theta) : z \in (a, b), \theta \in [0, 2\pi)\})$ .

**Katenoide**

Mit Satz 4.2.16 erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^2(K) &= 2\pi \int_a^b c \cosh \frac{z}{c} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{z}{c}} dz \\
 &= 2\pi c \int_a^b \cosh^2 \frac{z}{c} dz \\
 &= 2\pi c^2 \int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} \cosh^2 y dy \\
 &= 2\pi \left( \frac{c^2}{2} \sinh \frac{b}{c} \cosh \frac{b}{c} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{c^2}{2} \sinh \frac{a}{c} \cosh \frac{a}{c} + \frac{c}{2}(b-a) \right).
 \end{aligned}$$

Katenoiden sind die einzigen rotationssymmetrischen **Minimalflächen**, d.h. sie sind unter allen Flächen  $F$  mit vorgegebenem Rand  $\partial F$  jene mit minimaler Fläche, wie sie etwa beim Bilden von Seifenblasen entstehen.

### 4.3 Transformationsformel

Die folgende Transformationsformel stellt eine höherdimensionale Verallgemeinerung der Substitutionsformel dar. Im Gegensatz zur Substitutionsformel wird die Transformationsformel weniger dazu verwendet den Integranden so umzuformen dass das Integral berechnet werden kann, sondern man versucht eine Koordinatentransformation zu finden unter der die Integrationsgrenzen in den neuen Koordinaten einfach sind (typischerweise Integration über einen Quader).

Eine bijektive Abbildung  $\varphi$  von einer offenen Teilmenge  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^n$  auf eine offene Teilmenge  $\Omega'$  heißt  **$C^k$ -Diffeomorphismus**, wenn sowohl  $\varphi$  als auch  $\varphi^{-1}$   $C^k$ -Funktionen sind. Für  $k = 1$  sprechen wir von einem **Diffeomorphismus**.

Für einen Diffeomorphismus  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  ist  $\varphi^{-1}$  eine messbare Abbildung von dem Maßraum  $(\varphi(D), \mathcal{B}_{(\varphi(D))}, \lambda^n)$  in den Messraum  $(D, \mathcal{B}_D)$  und induziert daher ein Maß auf  $(D, \mathcal{B}_D)$  das mit  $\lambda^n \varphi$  bezeichnet wird, sodass

$$\int_{\varphi(D)} f d\lambda^n = \int_D f \circ \varphi d\lambda^n \varphi,$$

für jede messbare Funktion  $f$  auf  $\varphi(D)$  gilt, (vgl. [EL]). Hier bezeichnet  $\mathcal{B}_D$  respektive  $\mathcal{B}_{\varphi(D)}$  die Borel  $\sigma$ -Algebra auf  $D$  resp.  $\varphi(D)$ .

Wir zeigen, dass das Maß  $\lambda^n \varphi$  bezüglich dem Lebesgue Maß  $\lambda^n$  die Radon-Nikodým Dichte  $|\det d\varphi|$  hat:



**Satz 4.3.1** (Transformationsformel). Sei  $D$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi$  eine injektive  $C^1$ -Abbildung von  $D$  auf  $\varphi(D)$  und  $f$  eine messbare Funktion auf  $\varphi(D)$ . Dann gilt

$$\int_{\varphi(D)} f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) = \int_D f(\varphi(\mathbf{y})) |\det d\varphi(\mathbf{y})| d\lambda^n(\mathbf{y}),$$

wobei aus der Existenz des einen Integrals die des anderen folgt.

*Beweis.* Wir erhalten aus Satz 4.2.3 und der Flächenformel Satz 4.2.10 angewandt auf den Diffeomorphismus  $\varphi$

$$\lambda^n(\varphi(A)) = \mathcal{H}^n(\varphi(A)) = \int_A \sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)} d\lambda^n.$$

Für  $n = m$  ist aber  $d\varphi$  eine  $n \times n$ -Matrix und

$$\sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)} = \sqrt{(\det(d\varphi))^2} = |\det(d\varphi)|,$$

woraus die Transformationsformel folgt. ▣

*Beispiel 4.3.2.* Bei kreisförmigem Rand des Integrationsbereiches oder rotationssymmetrischem Integranden ist häufig die Transformation auf **Polarkoordinaten** zielführend:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, \\ dxdy &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} dr d\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} dr d\varphi = r dr d\varphi \end{aligned}$$

So erhalten wir für das Integral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\}} e^{-x^2-y^2} d\lambda^2(x,y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr \\ &= \pi \int_0^\infty e^{-u} du = \pi \end{aligned}$$

und damit  $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ .

*Beispiel 4.3.3.* Das Gravitationspotential eines Punktkörpers mit Masse  $m$  im Abstand  $r$  zu einer anderen Punktmasse mit Masse  $M$  ist  $\frac{mMG}{r}$ , wobei  $G$  die Gravitationskonstante bezeichnet. Wir berechnen das Potential eines punktförmigen Körpers im Abstand  $R$  von einer Kugel mit Radius  $\rho < R$  und homogener Masseverteilung durch **Zylinderkoordinaten**. Man verifiziert leicht, dass das 3-dimensionale Lebesguemaß jener Punkte auf der Kugel, die nicht durch obige Parametrisierung erfasst werden 0 ist.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad (r, \varphi, z) \in (0, \rho) \times (0, 2\pi) \times (-\rho, \rho)$$

$$dx dy dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} dr d\varphi dz = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dr d\varphi dz = r dr d\varphi dz$$

Unter Vernachlässigung der Konstanten  $M, G$  erhalten wir für eine Kugel mit Radius  $\rho$  und den Substitutionen  $r^2 + (R - z)^2 = u$ ,  $2r dr = du$  und  $R^2 + \rho^2 - 2Rz = s$ ,  $-2R dz = ds$ :

$$\begin{aligned} & \int_{x^2+y^2+z^2 \leq \rho^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(R-z)^2}} dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\rho}^{\rho} \int_0^{\sqrt{\rho^2-z^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+(R-z)^2}} dr dz d\varphi \\ &= \pi \int_{-\rho}^{\rho} \int_{(R-z)^2}^{R^2+\rho^2-2\rho z} \frac{du}{\sqrt{u}} dz = 2\pi \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{R^2+\rho^2-2Rz} - (R-z) dz \\ &= -\frac{2\pi}{3R} s^{\frac{3}{2}} \Big|_{(R+\rho)^3}^{(R-\rho)^3} - 4\pi R\rho = \frac{2\pi}{3R} (6R^2\rho + 2\rho^3) - 4\pi R\rho = \frac{4\pi}{3} \rho^3 \frac{1}{R} = m/R. \end{aligned}$$

Das Potential ist also proportional zum Kugelvolumen und damit zur homogenen Masse und indirekt proportional zum Abstand  $\rho$  der Punktmasse vom Kugelmittelpunkt. Das heißt das Potential einer homogenen Kugel ist außerhalb dieser Kugel gleich dem Potential einer Punktmasse im Kugelmittelpunkt mit gleicher Masse.

*Beispiel 4.3.4.* Eine weitere wichtige Koordinatentransformation bei Integration über rotationssymmetrische Bereiche sind **Kugelkoordinaten**:

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta,$$

$$(r, \varphi, \theta) \in (0, \rho) \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} dx dy dz &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr d\varphi d\theta \\ &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{vmatrix} dr d\varphi d\theta \\ &= r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta \end{aligned}$$

Das 3-dimensionale Lebesguemaß jener Punkte der Kugel, die durch obige Parametrisierung durch Kugelkoordinaten nicht erfasst werden ist 0.

Wir berechnen mit Hilfe der Kugelkoordinaten das Gravitationspotential einer radialsymmetrischen Masse (d.h. einer Masseverteilung, deren Dichte  $\mu$  nur vom Abstand zum Ursprung abhängt). Das Potential einer Punktmasse in einem Abstand  $l$  ist  $1/l$ . Aufgrund der Kugelsymmetrie der Masseverteilung liegt es nahe Kugelkoordinaten zu verwenden. Ist der Mittelpunkt der Masseverteilung in 0 und  $x$  ein Punkt mit Abstand  $r$  zum Ursprung und in einem Winkel  $\theta$  zur  $x - y$ -Ebene, so ist der Abstand von  $x$  zu  $(0, 0, R)$  nach dem Cosinussatz gleich  $\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\pi/2 - \theta)} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta}$ .

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\rho} \frac{\mu(r)r^2 \cos \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta}} dr d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta}} d\theta r^2 \mu(r) dr \quad t = \sin \theta, dt = \cos \theta d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\rho} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rrt}} dt r^2 \mu(r) dr \\ &= 2\pi \int_0^{\rho} \frac{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr} - \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr}}{Rr} r^2 \mu(r) dr \\ &= \frac{2\pi}{R} \int_0^{\rho} (R + r - (R - r)) r \mu(r) dr = \frac{4\pi}{R} \int_0^{\rho} r^2 \mu(r) dr. \end{aligned}$$

Da  $4\pi \int_0^{\rho} r^2 \mu(r) dr$  aber die Gesamtmasse  $m$  ist, erhalten wir auch für das Potential der kugelsymmetrischen Masseverteilung  $m/R$ , d.h. wir dürfen statt der Masseverteilung eine Punktmasse im Mittelpunkt der Masseverteilung betrachten.

## 4.4 Koflächenformel

Als Folgerung des Satzes von Fubini erhalten wir mit der Substitutionsregel für eine stetig differenzierbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \int_A g(\dot{\mathbf{x}}, f(x_n)) f'(x_n) d\lambda^n(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\dot{A}(x_n)} g(\dot{\mathbf{x}}, f(x_n)) d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}) f'(x_n) d\lambda(x_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\dot{A}(f(t))} g(\dot{\mathbf{x}}, t) d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}) d\lambda(t) \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{x} = (\dot{\mathbf{x}}, x_n)$  und  $\dot{A}(x_n) := \{\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n-1} : (\dot{\mathbf{x}}, x_n) \in A\}$  gilt. Die folgende Koflächenformel ist eine Verallgemeinerung dieser Formel auf differenzierbare Funktionen  $f$ , die nicht nur von einer Koordinate abhängen.

**Satz 4.4.1** (Koflächenformel). *Ist  $\Omega$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $g$  eine auf  $\Omega$  integrierbare Funktion und  $f \in C^1(\Omega)$ . Dann gilt*

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{x}) |\nabla f(\mathbf{x})| d\lambda^n(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} \int_{f^{-1}(t)} g(\mathbf{y}) d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) dt.$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung zuerst unter der zusätzlichen Annahme dass  $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  für  $\mathbf{x} \in \Omega$  gilt. Für  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \neq 0$  können wir für ein  $i \leq n$  die Gleichung  $f(\mathbf{x}) = t$  nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen in einer Umgebung von  $\mathbf{x}^0$  nach  $x_i$  auflösen. Da sowohl das Lebesgue als auch das Hausdorffmaß rotationsinvariant sind, dürfen wir o.B.d.A  $i = n$  annehmen. Bezeichnen wir für  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  mit  $\dot{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{n-1})$  die Projektion auf die ersten  $n - 1$  Koordinaten, so gibt es also für  $t$  hinreichend nahe bei  $f(\mathbf{x}^0)$  eine differenzierbare Funktion  $\alpha_t$ , die

$$f(\dot{\mathbf{x}}, \alpha_t(\dot{\mathbf{x}})) = t$$

für  $x_i$  hinreichend nahe bei  $\mathbf{x}_i^0$  erfüllt.

Die Abbildung

$$\phi : \mathbf{x} \mapsto (\dot{\mathbf{x}}, f(\mathbf{x}))$$

ist also in einer Umgebung  $U$  von  $\mathbf{x}^0$  ein Diffeomorphismus.

Für die Ableitungsmatrix  $d\phi$  erhalten wir

$$d\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Es gilt  $\tilde{f}_i(\dot{\mathbf{x}}) := f(\dot{\mathbf{x}}, \alpha_t(\dot{\mathbf{x}})) = t$  und damit nach der Kettenregel

$$0 = \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j < n$$

bzw., wenn wir diese Gleichungen durch  $\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$  ergänzen:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_n} \begin{pmatrix} -\nabla \alpha_t \\ 1 \end{pmatrix},$$

woraus mit (4.24)

$$|\det(d\phi(\mathbf{x}))| = \left| \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right| = \frac{|\nabla f(\mathbf{x})|}{\sqrt{1 + |\nabla \alpha_t(\dot{\mathbf{x}})|^2}} \tag{4.25}$$

folgt.

Für  $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$  und  $i < n$  gilt  $z_i = x_i$  und damit  $\alpha_t(\dot{\mathbf{x}}) = \alpha_t(\dot{\mathbf{z}})$ . Für die Transformation  $\phi$  folgt, wenn  $P$  die Projektion  $\mathbf{z} = (\dot{\mathbf{z}}, z_n) \mapsto \dot{\mathbf{z}}$  bezeichnet, für  $U \subseteq \Omega$

$$\begin{aligned} \phi(U) &= \{(\dot{\mathbf{z}}, z_n) \in \mathbb{R}^n : \exists \mathbf{u} \in U, \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{z}} f(\mathbf{u}) = z_n\} \\ &= \{(\dot{\mathbf{z}}, z_n) \in \mathbb{R}^n : \dot{\mathbf{z}} \in P(U \cap f^{-1}(z_n))\} = \{(P(U \cap f^{-1}(z_n)), z_n) : z_n \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Für die Funktion

$$\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}) \sqrt{1 + |\nabla \alpha_{f(\mathbf{x})}(x_1, \dots, x_{n-1})|^2}, \quad g \in L^1(\phi(U))$$

gibt die Transformationsformel, (4.25) und Satz 4.2.14 wegen  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{z}}$  und  $\alpha_t(\dot{\mathbf{x}}) = \alpha_t(\dot{\mathbf{z}})$  und  $\phi^{-1}(\mathbf{z}) = (\dot{\mathbf{z}}, \alpha_{z_n}(\dot{\mathbf{z}}))$  mit Fubini und (4.26):

$$\begin{aligned} \int_U g(\mathbf{x}) |\nabla f(\mathbf{x})| d\lambda^n(\mathbf{x}) &= \int_U g(\mathbf{x}) \sqrt{1 + |\nabla \alpha_{f(\mathbf{x})}(\dot{\mathbf{x}})|^2} |\det(d\phi(\mathbf{x}))| d\lambda^n(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\phi(U)} g(\phi^{-1}(\mathbf{z})) \sqrt{1 + |\nabla \alpha_{z_n}(\dot{\mathbf{z}})|^2} d\lambda^n(\mathbf{z}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{P(U \cap f^{-1}(z_n))} g(\dot{\mathbf{z}}, \alpha_{z_n}(\dot{\mathbf{z}})) \sqrt{1 + |\nabla \alpha_{z_n}(\dot{\mathbf{z}})|^2} d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{z}}) dz_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{U \cap f^{-1}(t)} g(\mathbf{y}) d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{y}) dt. \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung für integrierbare  $g$  deren Träger so klein ist, dass die Gleichung  $f(\mathbf{x}) = t$  in einer offenen Obermenge des Trägers von  $g$  nach einer Variablen  $x_i$  aufgelöst werden kann. Für  $g$  mit Träger in einer kompakten Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  kann  $g$  als endliche Summe von Funktionen  $g_i$ , die diese Voraussetzung erfüllen dargestellt werden. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) |\nabla f(\mathbf{x})| d\lambda^n(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} g_i(\mathbf{x}) |\nabla f(\mathbf{x})| d\lambda^n(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} \int_{f^{-1}(t)} g_i(\mathbf{z}) d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{z}) dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{f^{-1}(t)} g(\mathbf{z}) d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{z}) dt \end{aligned}$$

und da  $\mathbb{R}^n$  abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen ist, folgt diese Gleichung für alle integrierbaren Funktionen  $g$  und  $f \in C^1(\Omega)$  wenn  $\nabla f$  Rang 1 hat.

Auf der Menge  $N$ , auf der  $\nabla f = \mathbf{0}$  gilt, verschwindet das linke Integral in der Koflächenformel. Um die Gültigkeit der Formel auf Funktionen  $f \in C^1$  für die nicht überall  $\nabla f \neq \mathbf{0}$  gilt auszudehnen, bleibt also

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{n-1}(f^{-1}\{t\} \cap N) dt = 0 \quad (4.27)$$

zu zeigen. Da  $\mathbb{R}^n$  abzählbare Vereinigung beschränkter Mengen ist dürfen wir  $\mathcal{H}^n(N) = \lambda^n(N) < \infty$  annehmen. Dann gibt es für jedes  $\delta > 0$  eine Überdeckung von  $N$  durch abgeschlossene Teilmengen  $C_{i,\delta}$  von  $N$  mit

$$\omega_n \sum_{i \in \mathbb{N}} \left( \frac{\text{diam}(C_{i,\delta})}{2} \right)^n < \mathcal{H}^n(N) + 1, \quad \text{diam}(C_{i,\delta}) < \delta \forall i. \quad (4.28)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_\delta^{n-1}(f^{-1}\{t\} \cap N) dt &\leq \omega_{n-1} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\{i: t \in f(C_{i,\delta})\}} \left( \frac{\text{diam}(C_{i,\delta})}{2} \right)^{n-1} dt \\ &= \omega_{n-1} \int_{\mathbb{R}} \sum_i \left( \frac{\text{diam}(C_{i,\delta})}{2} \right)^{n-1} \mathbb{1}_{f(C_{i,\delta})}(t) dt \end{aligned} \quad (4.29)$$

Wegen  $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{f(C_{i,\delta})}(t) dt \leq \text{diam}(f(C_{i,\delta}))$  folgt mit Lemma 4.2.6 wegen  $df(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$  für  $\mathbf{y} \in N$  die Abschätzung  $\text{diam}(f(C_{i,\delta})) \leq \text{diam}(C_{i,\delta})\rho(\delta)$  mit einer Funktion  $\rho$ , die  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) = 0$  erfüllt und damit aus (4.29) und (4.28)

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_\delta^{n-1}(f^{-1}\{t\} \cap N) dt \leq \frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n} (\mathcal{H}^n(N) + 1)\rho(\delta).$$

Für  $\delta \rightarrow 0$  konvergiert die linke Seite nach dem Satz der monotonen Konvergenz gegen  $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{n-1}(f^{-1}\{t\} \cap N) dt$  und die rechte gegen 0 womit (4.27) folgt.  $\square$

*Beispiel 4.4.2.* Wir berechnen mit der Koflächenformel das  $n - 1$ -dimensionale Flächenmaß einer  $n - 1$ -Sphäre aus dem Volumen der  $n$ -dimensionalen Kugel:

Für die  $n$ -dimensionale Kugel  $B(0, r)$  mit Radius  $r$  und  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$  erhält man  $|\nabla f(\mathbf{x})| = 1$  und mit Korollar 4.2.4 und der Koflächenformel

$$\omega_n r^n = \int_{B(0,r)} d\lambda^n = \int_{B(0,r) \setminus \{0\}} d\lambda^n = \int_0^r \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,t)) d\lambda(t)$$

und durch Differentiation nach  $r$

$$n\omega_n r^{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(S_r^{n-1}),$$

wenn  $S_r^{n-1}$  die  $n - 1$ -dimensionale Sphäre  $\partial B(0, r)$  und  $\omega_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel  $B(0, 1)$  bezeichnet.

*Beispiel 4.4.3.* Wir berechnen das Volumen des von einem 2-dimensionalen **Torus**  $\mathbb{T}$  berandeten Gebietes  $G$  des  $\mathbb{R}^3$  d.h. für  $r < R$

$$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left( R - \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 + z^2 \leq r^2 \right\}$$

mit der Koflächenformel über sein Flächenmaß:

Für  $0 < r < R$  ist die Abbildung  $\varphi : [0, 2\pi]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\varphi(u, v) = ((R - r \cos v) \cos u, (R - r \cos v) \sin u, r \sin v)^T \quad (4.30)$$

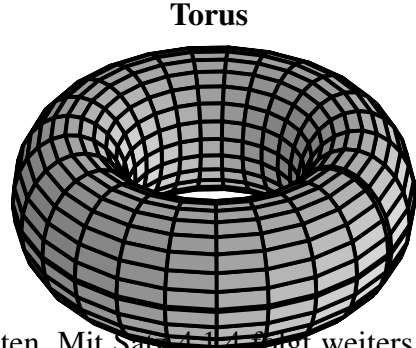
eine Parametrisierung des Torus. Wir berechnen zuerst seine Fläche  $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ :

Zunächst bemerken wir, dass wir für die Teilmengen  $S_1 := \varphi((0, 2\pi), \{0\})$  und  $S_2 := \varphi(\{0\}, (0, 2\pi))$

$$\mathcal{H}^1(S_1) = \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \varphi(u, 0)}{\partial u} \right| du = 2\pi r$$

und

$$\mathcal{H}^1(S_2) = \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \varphi(0, v)}{\partial v} \right| dv = 2\pi r$$



sowie mit Satz 4.1.4  $\mathcal{H}^0(\varphi(0, 0)) = 1$  erhalten. Mit Satz 4.1.4 folgt weiters  $\mathcal{H}^2(S_1) = \mathcal{H}^2(S_2) = \mathcal{H}^2(\varphi(0, 0)) = 0$ , womit wir  $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}) = \mathcal{H}^2(\mathbb{T} \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \varphi(0, 0))) = \mathcal{H}^2(\varphi((0, 2\pi), (0, 2\pi)))$  erhalten und die Flächenformel anwenden können. Aus

$$d\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -(R - r \cos v) \sin u & r \sin v \cos u \\ (R - r \cos v) \cos u & r \sin v \sin u \\ 0 & r \cos v \end{pmatrix}$$

und  $d\varphi^T(u, v)d\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} (R - r \cos v)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$  ergibt sich

$$\sqrt{\det(d\varphi^T d\varphi)} = r(R - r \cos v),$$

also

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{T}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R - r \cos v) dudv = 2\pi \int_0^{2\pi} rR dv = 4\pi^2 rR. \quad (4.31)$$

Für  $f(x, y, z) := r(x, y, z) = \left( (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 \right)^{1/2}$  erhalten wir

$$\nabla f = \frac{1}{2\sqrt{(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2}} \begin{pmatrix} 2(R - \sqrt{x^2 + y^2}) \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 2(R - \sqrt{x^2 + y^2}) \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 2z \end{pmatrix}, \quad |\nabla f| = 1.$$

Mit  $g := |\nabla f|^{-1} = 1$  und (4.31) ergibt die Koflächenformel

$$\lambda^3(G) = \int_0^r \int_{f^{-1}(t)} \frac{1}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^2 d\lambda(t) = \int_0^r 4\pi^2 R t d\lambda(t) = 2\pi^2 R r^2 \text{ für } \mathbb{T} = \partial G.$$





# Kapitel 5

## Mannigfaltigkeiten und Integralsätze

### 5.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Eine  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit** ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, der lokal homöomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist, d.h. für alle Elemente  $x$  der Mannigfaltigkeit gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x$  und einen Homöomorphismus  $\phi$  von  $U$  auf eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Eine **differenzierbare Struktur** auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Familie  $(\phi_i)_i$  von **Karten**, das sind Homöomorphismen  $\phi_i$  von offenen Teilmengen  $U_i$  von  $M$  auf offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , sodass  $\cup_i U_i = M$  und für alle  $i, j$  die Abbildung  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  eine  $C^k$ -Abbildung von  $\phi_j(U_i \cap U_j)$  nach  $\phi_i(U_i \cap U_j)$  ist. Diese Familie von Karten heißt **Atlas**. Eine Mannigfaltigkeit mit einer solchen differenzierbaren Struktur ist eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** oder  $C^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Für  $k \leq \infty$  heißt eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $M$   $k$ -fach differenzierbar, wenn für alle  $i$  die Funktion  $f \circ \phi_i^{-1}$  auf  $\phi_i(U_i)$  aus  $C^k$  ist. Die Klasse dieser Funktionen bezeichnen wir mit  $C^k(M)$ . So kann man von differenzierbaren Funktionen auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit sprechen obwohl man für diese Funktionen keine Ableitung bilden kann, die von der konkreten Wahl einer Karte unabhängig ist.

Eine wichtige Klasse differenzierbarer Mannigfaltigkeiten sind **implizit definierte Mannigfaltigkeiten**:

**Satz 5.1.1.** Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  eine  $C^k$ -Funktion,  $k \geq 1$ , für die 0 ein regulärer Wert der Funktion  $F$  ist, d.h. für die  $dF$  auf der Nullstellenmenge  $M$  von  $F$  immer vollen Rang  $n - m$  hat. Dann ist  $M$  eine  $m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

*Beweis.* Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen gibt es für  $\mathbf{x} \in M$  unter

den getroffenen Voraussetzungen an  $F$  Koordinaten  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$  und eine Umgebung  $U(\mathbf{x})$  von  $\mathbf{x}$ , sowie für  $l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_m\}$  differenzierbare Funktionen  $g_{\mathbf{x},l} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $F(\mathbf{y}) = 0$  für  $\mathbf{y} \in U(\mathbf{x})$  genau für

$$y_l = g_{\mathbf{x},l}(y_{i_1}, \dots, y_{i_m}), \quad l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_m\}$$

gilt.

Wir definieren als Atlas die Familie der Karten  $\varphi_{\mathbf{x}} : M \cap U(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi_{\mathbf{x}}(M \cap U(\mathbf{x})) \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y} \rightarrow (y_{i_1}, \dots, y_{i_m})$ . Es bleibt zu zeigen, dass ein Kartenwechsel  $\varphi_{\mathbf{x}_1} \circ \varphi_{\mathbf{x}_2}^{-1}$  eine differenzierbare Abbildung ist. Dies folgt aber unmittelbar, da die Abbildungen  $g_{\mathbf{x}_2,l}$  sowie die Identität  $y_l \rightarrow y_l$  differenzierbar sind ist  $\varphi_{\mathbf{x}_2}^{-1}$  eine differenzierbare Funktion von  $\varphi_{\mathbf{x}_2}(M \cap U(\mathbf{x}))$  nach  $M \cap U(\mathbf{x})$ . Die Abbildung  $\varphi_{\mathbf{x}_1}$  ist aber als Projektion auf die Koordinaten  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$  klarerweise ebenfalls differenzierbar, also ist auch  $\varphi_{\mathbf{x}_1} \circ \varphi_{\mathbf{x}_2}^{-1}$  differenzierbar.  $\square$

*Beispiel 5.1.2.* Die Nullstellenmenge der Funktion

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1$$

ist die  $n$ -**Sphäre**. Sie ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, da  $dF(\mathbf{x})$  nur in  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  nicht Rang 1 hat aber  $\mathbf{0}$  nicht in der Nullstellenmenge von  $F$  liegt.

*Beispiel 5.1.3.* Die **Lemniskate**  $L$  ist die Nullstellenmenge der Funktion

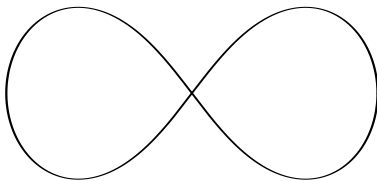
$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2), \quad a \neq 0$$

und hat die Form einer liegenden 8.

Wir erhalten

$$dF(x, y) = (4x(x^2 + y^2) - 4a^2x, 4y(x^2 + y^2) + 4ya^2),$$

**Lemniskate**



also hat  $dF(x, y)$  für  $(x, y) \neq (0, 0)$  Rang 1, aber  $dF(0, 0) = (0, 0)$ . Wegen  $F(0, 0) = 0$  ist also die Voraussetzung von Satz 5.1.1 nicht erfüllt. Tatsächlich kann  $L$  in keiner Umgebung  $U$  von  $(0, 0)$  homöomorph zu einer Teilmenge von  $\mathbb{R}$  sein, da dann  $U$  so klein gewählt werden kann, dass das Bild dieses Homöomorphismus ein Intervall  $I$  ist. Dann ist

$U \setminus \{(0, 0)\}$  homöomorph zu  $I \setminus \{z_0\}$  für ein  $z_0 \in I$ . Die Funktion  $(x, y) \mapsto (\text{sgn}(x), \text{sgn}(y))$  ist aber wie man leicht sieht für hinreichend kleines  $U$  auf  $U \setminus \{(0, 0)\}$  stetig mit Wertebereich  $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ . Eine stetige Funktion auf  $I \setminus \{z_0\}$  mit diskretem Wertebereich kann aber wegen dem Zwischenwertsatz nur zwei Werte annehmen. Also ist  $L$  keine differenzierbare Mannigfaltigkeit, wohl aber  $L \setminus (0, 0)$ .

**Beispiel 5.1.4.** Die **Spezielle Lineare Gruppe** (die Gruppe  $SL(n, \mathbb{R})$  aller reellen  $n \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$  mit Determinante 1), ist ein Beispiel einer **Liegruppe**. Das sind topologische Gruppen, die zugleich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit differenzierbaren Gruppenoperationen sind. Fasst man die Determinante einer  $n \times n$ -Matrix als Funktion des  $\mathbb{R}^{n^2}$  nach  $\mathbb{R}$  auf, so ist diese Abbildung offensichtlich differenzierbar (Entwicklung nach der  $i$ -ten Zeile gibt  $\det A = \sum_{j \leq n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$  und

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{i,j}} = (-1)^{i+j} \det A_{i,j}$$

und wir sehen, dass nicht alle Ableitungen nach den Variablen  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq j \leq n$  verschwinden können wenn  $\det(a_{i,j}) \neq 0$  gilt. Das Differential dieser Funktion hat also in Punkten  $x$  für die  $\det(x) \neq 0$  gilt vollen Rang 1. Mit Satz 5.1.1 ist  $SL(n, \mathbb{R})$  also eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

**Beispiel 5.1.5.** Die Gruppe  $SU(2)$  aller unitären  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante 1 ist ebenfalls eine Liegruppe. Wir fassen  $SU(2)$  als Teilmenge des  $\mathbb{R}^8$  auf, indem wir komplexe Zahlen als Dupel reeller Zahlen betrachten, die die entsprechenden Gleichungen  $\det A - 1 = 0$  und  $AA^* = E$  erfüllen. Wir erhalten für  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  mit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  die Gleichungen  $\delta = \bar{\alpha}$ ,  $\gamma = -\bar{\beta}$ ,  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , die sich wenn wir  $\alpha = a + ib$ ,  $\beta = c + id$  setzen auf eine Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 1 = 0$$

in den reellen Variablen  $a, b, c, d$  reduzieren. Wir sehen also dass  $SU(2)$  homöomorph zur 3-Sphäre ist und mit Beispiel 5.1.2 eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Die Differenzierbarkeit der Gruppenoperationen folgt aus der Differenzierbarkeit der Matrixelemente bei Produktbildung bzw. Inversenbildung als Funktion in den 16 bzw. 8 reellen Veränderlichen.

Realisierungen  $d$ -dimensionaler Mannigfaltigkeit als Nullstellenmenge einer differenzierbaren Funktion von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^{n-d}$  sind zumindest lokal für eine weite Klasse von Mannigfaltigkeiten möglich:

**Satz 5.1.6.** *Ist die Mannigfaltigkeit  $M$  das Bild einer offenen Teilmenge  $U$  des  $\mathbb{R}^d$  unter einer Abbildung  $\phi \in C^k(U) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\text{Rang}(d\phi) = d$ , sodass die Topologie der Mannigfaltigkeit mit der Relativtopologie als Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  übereinstimmt, dann kann  $\phi$  lokal zu einem  $C^k$ -Diffeomorphismus  $\Phi : \Omega \rightarrow \Xi$  mit  $\Omega, \Xi$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  so fortgesetzt werden, dass  $M \cap \Xi$  genau die Nullstellenmenge der Abbildung  $\text{pr}_L \circ \Phi^{-1}$  ist, wobei  $\text{pr}_L$  die Projektion des  $\mathbb{R}^n$  auf den  $\mathbb{R}^{n-d}$ :  $\text{pr}_L(y_1, \dots, y_n) = (y_{d+1}, \dots, y_n)$  bezeichnet.*

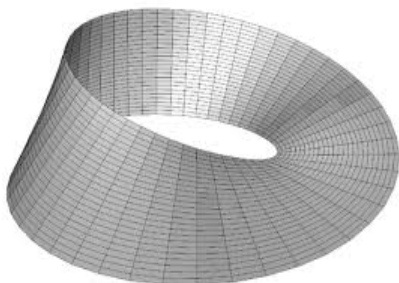
*Beweis.* Da  $d\phi$  vollen Rang hat sind für  $\mathbf{z}_0 \in U$  die Vektoren  $D_i\phi$ ,  $i = 1, \dots, d$  linear unabhängig. Dieser  $d$ -dimensionale Teilraum kann durch  $n - d$  Vektoren  $\mathbf{v}_{d+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  zu einer Basis des  $\mathbb{R}^n$  ergänzt werden. Die Abbildung

$$\Phi : \mathbf{x} \rightarrow \phi(x_1, \dots, x_d) + \sum_{j=d+1}^n x_j \mathbf{v}_j$$

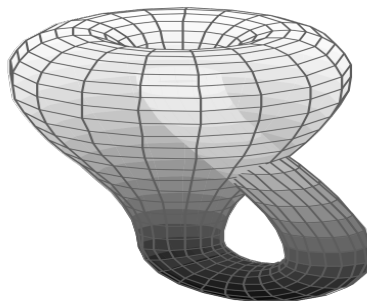
ist dann stetig differenzierbar und  $d\Phi$  hat in einer Umgebung des Punktes  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{z}_0, 0, \dots, 0)$  Rang  $n$ . Aus dem Umkehrsatz folgt, dass  $\Phi$  in einer Umgebung  $\Omega$  von  $\mathbf{x}_0$  invertierbar ist. Dann ist  $\Phi(\mathbf{x}) \in M$  genau wenn  $x_i = 0$  für  $i > d$  gilt und in  $\Phi(\Omega)$  ist die Teilmenge  $\Phi(\Omega) \cap M$  des  $\mathbb{R}^n$  genau die Nullstellenmenge der Funktion  $\text{pr}_L \circ \Phi^{-1} : \Phi(\Omega) \rightarrow \Omega$ .  $\square$

Satz 5.1.6 bleibt richtig, wenn wir die Vektoren  $\mathbf{v}_i$ ,  $i > d$  nicht konstant sondern als  $C^k$ -Funktionen auf einer Umgebung von  $\mathbf{x}_0$  wählen. Im Allgemeinen kann dieses Vektorfeld aber nicht global auf die Mannigfaltigkeit stetig fortgesetzt werden. Beispiele sind das **Möbiusband** oder die **Klein'sche Flasche**.

Möbiusband



Klein'sche Flasche



Fordern wir aber für eine  $n - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, dass  $\mathbf{v}_n$  orthogonal zu allen Vektoren  $D_i\phi(\mathbf{z}_0)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  ist, so ist  $\mathbf{v}_n$  bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmt. Der von den Vektoren  $D_i\phi(\mathbf{z}_0)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  aufgespannte  $n - 1$ -dimensionale Teilraum heißt **Tangentialraum** in  $\phi(\mathbf{z}_0)$ . Es ist jener affine Teilraum des  $\mathbb{R}^n$  durch den  $\phi$  in einer Umgebung von  $\phi(\mathbf{z}_0)$  von höherer als erster Ordnung approximiert werden kann.

**Proposition 5.1.7.** *Ist  $M$  eine  $n - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, die als Bildmenge einer  $C^1$ -Abbildung  $\phi(\mathbf{z}) = (\mathbf{z}, \alpha(\mathbf{z}))$  vermöge einer  $C^1$ -Abbildung  $\alpha : \mathbb{R}^{n-1} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist, so sind die auf den Tangentialraum in  $\mathbf{z}_0 \in \Omega$  orthogonale Vektoren Vielfache des normierten Vektors*

$$\mathbf{n}(\mathbf{z}_0) := \frac{1}{\sqrt{1 + |D\alpha(\mathbf{z}_0)|^2}} (-D\alpha(\mathbf{z}_0), 1)^T.$$

*Beweis.* Wegen  $D_i\phi = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, D_i\alpha)^T$  (1 an  $i$ -ter Stelle) muss, wenn wir o.B.d.A die  $n$ -te Koordinate von  $\mathbf{n}$  1 setzen für  $1 \leq i < n$  die  $i$ -te Koordinate von  $\mathbf{n}$  gleich  $-D_i(\alpha(\mathbf{z}_0))$  sein, sofern  $(\mathbf{n}, D_i\phi) = 0$  gilt.  $\square$

Mit Satz 4.2.14 folgt hiermit:

**Korollar 5.1.8.** *Ist eine  $n - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  durch eine  $C^1$ -Funktion  $\alpha$  im  $\mathbb{R}^n$  durch  $M = \{(\mathbf{x}, \alpha(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}\}$  gegeben und sei  $\mathbf{n}$  das wie in Proposition 5.1.7 orientierte normierte Normalvektorfeld auf  $M$ , so gilt für jedes über  $M$  integrierbare Vektorfeld  $\mathbf{f}$ :*

$$\int_M \mathbf{f}^T \mathbf{n} d\mathcal{H}^{n-1} = \int_\Omega \mathbf{f}^T (-(D\alpha)(\mathbf{z}_0), 1)^T d\lambda^{n-1}.$$

Ist eine  $n - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  als Nullstellenmenge der Gleichung  $f(\mathbf{x}) = 0$  gegeben, so kann, da  $df$  dann auf  $M$  Rang 1 hat,  $M$  nach dem Hauptsatz lokal um einen Punkt  $\mathbf{x}^0 \in M$  als Funktion von  $n - 1$  Koordinaten dargestellt werden. Nehmen wir o.B.d.A. an, dass es eine Funktion  $\alpha, \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(\phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})) = 0$  für

$$\phi(x_1, \dots, x_{n-1}) := (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \alpha(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))$$

gibt, so spannen die Vektoren

$$D_i\phi = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_i}\alpha(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0))$$

den Tangentialraum von  $M$  in  $\phi(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$  auf. Da für  $1 \leq i < n$  die Wege  $\Gamma_i : [-\varepsilon, \varepsilon], t \mapsto \phi(x_1^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_{n-1}^0)$  in  $M$  abbilden gilt  $f(\Gamma_i(t)) = 0$  und damit  $d(f \circ \Gamma_i) = df d\Gamma_i = 0$ .  $d\Gamma_i(0)$  ist aber genau der Tangentialvektor  $D_i\phi$  an  $M$  in  $\mathbf{x}^0$ , womit  $df^T$  orthogonal zu allen Tangentialvektoren und damit ein Normalvektor auf den Tangentialraum ist. Das Differential  $df$  (oder seine Transponierte) einer reellwertigen Funktion bezeichnet man als den **Gradienten** und bezeichnet ihn mit  $\nabla f$ .

Wir haben also gezeigt:

**Satz 5.1.9.** *Ist eine Mannigfaltigkeit implizit als Nullstellenmenge der Funktion  $f$  gegeben, auf der  $\nabla f \neq \mathbf{0}$  gilt, so ist der Gradient  $\nabla f(\mathbf{x}^0)$  für  $f(\mathbf{x}^0) = 0$  ein Normalvektor auf den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit in  $\mathbf{x}^0$ .*

## 5.2 Zerlegung der Eins

Häufig ist es wesentlich einfacher eine Aussage über differenzierbare Funktionen zu beweisen, wenn diese hinreichend kleinen Träger haben (siehe Beweis

von Satz 5.3.3. Was „klein“ bedeutet hängt von der konkreten Problemstellung ab. Durch eine Zerlegung der Eins ist es häufig möglich den allgemeinen Fall auf den Spezialfall für Funktionen mit kleinem Träger zurückzuführen. Es ist relativ trivial eine Funktion  $f$  als Summe  $\sum_i f \mathbb{1}_{A_i}$  mit kleinen Mengen  $A_i$  darzustellen. Spielt in der Fragestellung oder im Beweis die Differenzierbarkeit eine wesentliche Rolle, so geht bei dieser Zerlegung i.A. die Stetigkeit und damit auch die Differenzierbarkeit verloren. Häufig ist es aber möglich eine Zerlegung mit  $C^\infty$ -Funktionen anstelle charakteristischer Funktionen zu finden (Satz 5.2.1).

Eine Familie  $(\zeta_\beta)_{\beta \in B}$  von  $C^k$ -Funktionen auf einer  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $M$  heißt eine der Überdeckung  $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$  von  $M$  untergeordnete  $C^k$ -**Zerlegung der Eins**, wenn  $\zeta_\beta \geq 0$ ,  $\forall \beta \in B$ ,  $\sum_{\beta \in B} \zeta_\beta = 1$  gilt und es für jedes  $\beta \in B$  ein  $\alpha \in A$  gibt mit  $\text{supp}(\zeta_\beta) \subseteq V_\alpha$ . Sie heißt **lokal endlich**, wenn es für alle  $x \in M$  eine Umgebung  $W_x$  von  $x$  gibt, sodass  $W_x$  nur mit endlich vielen Mengen  $\text{supp}(\zeta_\beta)$ ,  $\beta \in B$  nichtleeren Durchschnitt hat. Für eine  $C^k$ -Funktion  $f$  auf  $M$  folgt aus  $\sum_{\beta \in B} \zeta_\beta = 1$  die punktweise Konvergenz der Reihe  $\sum_{\beta \in B} \zeta_\beta f$ . Ist die Zerlegung lokal endlich, so folgt, dass in einer Umgebung eines Punktes  $x$  nur endlich viele Summanden nicht identisch 0 sind, womit die Summation mit der Differentiation vertauscht und wir erhalten  $D^\alpha \sum_{\beta \in B} \zeta_\beta f = \sum_{\beta \in B} D^\alpha (\zeta_\beta f) = \sum_{\beta \in B} \zeta_\beta D^\alpha f$ , wenn  $D$  einen Differentialoperator auf  $M$  bezeichnet, das sind Differentialoperatoren die über Differentialoperatoren auf den Karten erklärt sind und mit Kartenwechsel verträglich sind.

**Satz 5.2.1** (Zerlegung der Eins). *Für eine offene Überdeckung  $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  einer  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es eine dieser Überdeckung untergeordnete abzählbare lokal endliche Zerlegung der Eins, in der alle  $C^k$ -Funktionen dieser Zerlegung kompakten Träger haben.*

*Beweis.* Wir zeigen:

— Es gibt eine Folge offener relativ kompakter Teilmengen  $B_i$  von  $M$  mit  $B_i \subseteq V_\alpha$  für ein  $\alpha \in \mathcal{A}$  und  $\cup_i B_i = M$ :

$M$  ist lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , d.h. jeder Punkt  $x$  aus  $M$  hat eine offene relativ kompakte Umgebung  $U_x$ . Zugleich gilt  $x \in V_\alpha$  für ein  $\alpha \in \mathcal{A}$ .  $V_\alpha \cap U_x$  ist dann offen, relativ kompakt und in  $V_\alpha$  für ein  $\alpha \in \mathcal{A}$  enthalten.

Eine Mannigfaltigkeit hat eine abzählbare Basis, also gibt es ein Element  $B_x$  dieser Basis mit  $x \in B_x \subseteq V_\alpha \cap U_x$ . Die Menge der Basiselemente ist abzählbar, somit gibt es eine Folge  $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $B_i := B_{x_i}$  und  $\cup_i B_i = M$ .  $B_i$  ist als Teilmenge der relativ kompakten Menge  $U_{x_i}$  nach Satz 1.4.4 ebenfalls relativ kompakt und nach Konstruktion in einer der Mengen  $V_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$  enthalten.

— Wir zeigen, dass es eine Folge offener relativ kompakter Mengen  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $G_i \subseteq M$ ,  $\bar{G}_i \subseteq G_{i+1}$  und  $B_i \subseteq G_i$  gibt:

Wir setzen  $G_1 := B_1$  und definieren die Folge  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  rekursiv wie folgt: Die Menge  $\bar{G}_i \cup \bar{B}_{i+1}$  ist als Vereinigung zweier kompakter Mengen kompakt und hat

daher eine endliche Überdeckung durch Mengen der Folge  $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Wir definieren  $G_{i+1}$  als Vereinigung der Mengen einer dieser endlichen Teilüberdeckungen.  $G_{i+1}$  ist offen und relativ kompakt da alle  $B_j$  offen und relativ kompakt sind (Satz 1.4.4 und Proposition 1.4.5). Wegen  $\cup_{i \in \mathbb{N}} B_i = M$  und  $B_i \subseteq G_i$  folgt  $\cup_{i \in \mathbb{N}} G_i = M$ .

— Wir konstruieren die Zerlegung der Eins:

Für  $i > 2$  ist die Menge  $\bar{G}_i \setminus G_{i-1}$  kompakt und in der offenen Menge  $G_{i+1} \setminus \bar{G}_{i-2}$  enthalten. Nach Satz 1.6.4 ist  $\bar{G}_{i+1}$  als kompakter Raum normal. Es gibt also nach Proposition 1.6.1 zu jedem  $x \in \bar{G}_i \setminus G_{i-1}$  eine Umgebung  $U_{i,x}$  von  $x$  mit  $\bar{U}_{i,x} \subseteq G_{i+1} \setminus \bar{G}_{i-2}$ .  $U_{i,x}$  können wir so klein wählen, dass  $\bar{U}_{i,x} \subseteq V_\alpha$  für ein  $\alpha \in \mathcal{A}$  und relativ kompakt ist, da  $M$  als Mannigfaltigkeit lokal kompakt ist ( $\mathbb{R}^n$  ist lokalkompakt und lokal homöomorph zu  $M$ ).

Für  $x \in \bar{G}_i \setminus G_{i-1}$  sei  $\psi_{i,x}$  eine  $C^k$ -Funktion, deren Träger eine Teilmenge von  $\bar{U}_{i,x}$  ist, Wertebereich  $[0, 1]$  hat und  $\psi_{i,x}(x) = 1$  erfüllt (Funktionen wie in Lemma 2.4.3 sind  $C^\infty$ -Funktionen auf den Bildmengen der Kartenabbildungen, für eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit definieren sie also  $C^k$ -Funktionen auf  $M$ ). Für die aus den offenen Mengen  $W_{i,x} := \{y \in U_x : \psi_{i,x}(y) > 1/2\}$  bestehende Überdeckung der kompakten Menge  $\bar{G}_i \setminus G_{i-1}$  gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $W_{i,x_j}$ ,  $1 \leq j \leq N_i$ . Wegen  $\bar{U}_{i,x} \subseteq V_\alpha$  für ein geeignetes  $\alpha \in \mathcal{A}$  folgt, dass jede der Mengen  $\text{supp}(\psi_{i,x_j})$  in einer der Mengen  $V_\alpha$  enthalten ist.

Wegen  $\text{supp}(\psi_{k,x_j}) \subseteq G_{k+1} \setminus \bar{G}_{k-2}$  folgt  $\text{supp}(\psi_{k,x_i}) \cap \text{supp}(\psi_{l,x_j}) = \emptyset$  für  $|k - l| \geq 3$  und die Funktionenreihe  $\Psi(x) := \sum_k \sum_{j=1}^{N_k} \psi_{k,x_j}(x)$  hat für  $x \in M$  nur endlich viele nichtverschwindende Summanden, womit  $\Psi$  wohldefiniert ist.

Wegen  $x \in W_{i,x_j}$  für ein  $i \in \mathbb{N}$ ,  $i \leq N_i$  und  $\Psi_{i,x_j}(y) > 1/2$  für  $y \in W_{i,x_j}$  gilt  $\Psi(x) > 1/2$  für  $x \in M$ . Die Funktionen

$$\zeta_{k,j}(y) := \frac{\psi_{k,x_j}(y)}{\Psi(y)}$$

bilden damit eine der Überdeckung  $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  untergeordnete Zerlegung der Eins. Wegen  $G_i \cap \text{supp}(\Psi_{k,x_j}) = \emptyset$  für  $k \geq i + 2$  ist  $G_i$  eine Umgebung von  $x \in G_i$  die nur mit den Trägern von endlich vielen Funktionen  $\zeta_{k,j}$  nichtleeren Schnitt hat. Diese Zerlegung der Eins ist damit lokalendlich.  $\square$

## 5.3 Integralsätze von Gauß und Green

Wir beweisen den Gauß'schen Integralsatz zunächst für zwei für sich relativ uninteressante Spezialfälle, auf die wir dann aber den allgemeinen Fall durch eine Zerlegung der Eins zurückführen.

**Proposition 5.3.1.** *Ist  $f$  eine  $C^1$ -Funktion in  $\mathbb{R}^n$  mit  $\text{supp}(f) \subset W \subset A$ ,  $A$  offen,  $W$  ein achsenparalleler Würfel  $W = \prod_{i=1}^n [a_i, a_i + l]$ . Dann gilt*

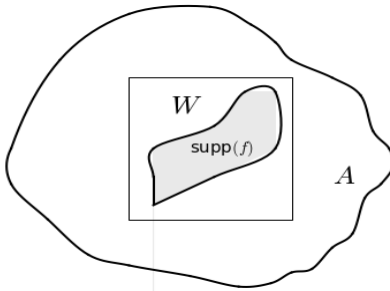
$$\int_A D_i f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) = 0.$$

*Beweis.* Da das Lebesguemaß rotationsinvariant ist und sich jede Richtungsableitung als Linearkombination der partiellen Ableitungen  $D_i$  darstellen lässt, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass  $W$  ein achsenparalleler Würfel ist. Wir stellen  $W$  als  $Q \times [a_i, b_i]$  mit einem  $n - 1$ -dimensionalen Würfel  $Q$  dar und erhalten mit dem Satz von Fubini

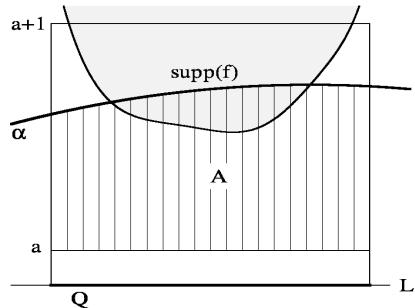
$$\int_A D_i f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) = \int_Q \int_{a_i}^{b_i} D_i f(\mathbf{x}) dx_i d\lambda^{n-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Wegen dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Tatsache, dass  $f$  auf  $Q \times \{a_i\}$  und  $Q \times \{b_i\}$  verschwindet, folgt  $\int_{a_i}^{b_i} D_i f(\mathbf{x}) dx_i = 0$ .  $\square$

Träger v.  $f$  "klein" gem. Prop. 5.3.1



Träger v.  $f$  "klein" gem. Prop. 5.3.2



**Proposition 5.3.2.** *Sei  $Q$  ein Würfel in einem  $n - 1$ -dimensionalen Teilraum  $L$  des  $\mathbb{R}^n$ ,  $\alpha$  eine  $C^1$ -Funktion auf  $Q$  mit Wertebereich in  $(a, a + 1)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{n}$  ein normierter Normalvektor auf  $L$ . Weiters sei die Menge  $A$  durch  $A := \{\dot{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{n} : \dot{\mathbf{x}} \in Q, \lambda \in (a, \alpha(\dot{\mathbf{x}}))\}$  gegeben und  $f$  eine auf  $\bar{A}$  stetige und im Inneren von  $A$  stetig differenzierbare reellwertige Funktion mit*

$$\text{supp}(f) \cap (\{\dot{\mathbf{x}} + a\mathbf{n} : \dot{\mathbf{x}} \in Q\} \cup \{\dot{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{n} : \dot{\mathbf{x}} \in \partial Q, \lambda \in (a, a + 1)\}) = \emptyset.$$

Dann gilt wenn beide Integrale existieren für  $1 \leq i \leq n$

$$\int_A D_i f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) = \int_{\partial A} f(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{x}),$$

wobei  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  der normierte Normalvektor auf die durch  $\alpha$  definierte Fläche mit  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} > 0$  ist.



*Beweis.* Die Gültigkeit der Aussage ist unabhängig von der Wahl des orthogonalen Koordinatensystems, da das Lebesguemaß und das Oberflächenmaß rotationsinvariant sind und beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem die Koordinaten des Gradienten  $\nabla f$  der gleichen Transformation unterliegen wie die des Normalvektors  $\mathbf{v}$ . Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass  $L$  der Teilraum  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$  und  $A$  die Menge  $\{\mathbf{x} = (\dot{\mathbf{x}}, x_n) \in \mathbb{R}^n : \dot{\mathbf{x}} \in Q, x_n \in [a, \alpha(\dot{\mathbf{x}})]\}$  ist.

Für  $i = n$  erhalten wir, da  $D_i f$  integrierbar ist, mit dem Satz von Fubini sowie dem Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung und Satz 4.2.14 für die durch die Abbildung  $\dot{\mathbf{x}} \mapsto (\dot{\mathbf{x}}, \alpha(\dot{\mathbf{x}}))$ ,  $\dot{\mathbf{x}} \in Q$  definierte Mannigfaltigkeit  $M$

$$\begin{aligned} \int_A D_n f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) &= \int_Q \int_a^{\alpha(\dot{\mathbf{x}})} D_n f(\dot{\mathbf{x}}, x_n) dx_n d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \int_Q f(\dot{\mathbf{x}}, \alpha(\dot{\mathbf{x}})) - f(\dot{\mathbf{x}}, a) d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \int_Q f(\dot{\mathbf{x}}, \alpha(\dot{\mathbf{x}})) d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \int_Q f(\dot{\mathbf{x}}, \alpha(\dot{\mathbf{x}})) \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \alpha(\dot{\mathbf{x}})|^2}} \sqrt{1 + |\nabla \alpha(\dot{\mathbf{x}})|^2} d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \int_M f(\mathbf{x}) \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \alpha(\dot{\mathbf{x}})|^2}} d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $\text{supp}(f) \cap \partial Q = \emptyset$  gilt, folgt wegen  $\partial A \setminus \partial Q = M$  sowie Proposition 5.1.7:

$$\int_A D_n f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) = \int_{\partial A} f(\mathbf{x}) \mathbf{v}_n(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{x}). \quad (5.1)$$

Aus der Beziehung  $\frac{\partial}{\partial x} \int_a^{\alpha(x)} F(x, y) dy = \int_a^{\alpha(x)} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) dy + F(x, \alpha(x)) \alpha'(x)$  folgt für  $i < n$

$$\begin{aligned} \int_A D_i f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) &= \int_Q \int_a^{\alpha(\dot{\mathbf{x}})} D_i f(\dot{\mathbf{x}}, x_n) dx_n d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \int_Q D_i \int_a^{\alpha(\dot{\mathbf{x}})} f(\dot{\mathbf{x}}, x_n) dx_n d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}) \\ &\quad - \int_Q f(\dot{\mathbf{x}}, \alpha(\dot{\mathbf{x}})) D_i \alpha(\dot{\mathbf{x}}) d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Aus dem Hauptsatz folgt, wenn  $\mathbf{x}'_{a_i}$  resp.  $\mathbf{x}'_{b_i}$  die Punkte  $(x_1, \dots, a_i, \dots, x_{n-1})$  resp.

$(x_1, \dots, b_i, \dots, x_{n-1})$  bezeichnet, da  $f$  auf  $A \cap \partial Q$  verschwindet:

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} D_i \int_a^{\alpha(\dot{\mathbf{x}})} f(\dot{\mathbf{x}}, x_n) dx_n dx_i &= \int_a^{\alpha(\dot{\mathbf{x}}_{b_i})} f(\dot{\mathbf{x}}'_{b_i}, x_n) dx_n - \int_a^{\alpha(\dot{\mathbf{x}}_{a_i})} f(\dot{\mathbf{x}}'_{a_i}, x_n) dx_n \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Aus (5.2), (5.3) erhalten wir für  $i < n$  mit Proposition 5.1.7 und Satz 4.2.14, da  $f$  auf  $A \cap \partial Q$  verschwindet

$$\begin{aligned} \int_A D_i f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) &= - \int_Q f(\dot{\mathbf{x}}, \alpha(\dot{\mathbf{x}})) D_i \alpha(\dot{\mathbf{x}}) d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}) \\ &= - \int_Q f(\dot{\mathbf{x}}, \alpha(\dot{\mathbf{x}})) \frac{D_i \alpha(\dot{\mathbf{x}})}{\sqrt{1 + |\nabla \alpha(\dot{\mathbf{x}})|^2}} \sqrt{1 + |\nabla \alpha(\dot{\mathbf{x}})|^2} d\lambda^{n-1}(\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \int_{\partial A} f(\dot{\mathbf{x}}, \alpha(\dot{\mathbf{x}})) \mathbf{v}_i(\dot{\mathbf{x}}, \alpha(\dot{\mathbf{x}})) d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{x}). \quad \square \end{aligned}$$

Wir werden den Gauß'schen Integralsatz beweisen indem wir durch eine Zerlegung der Einheit eine Funktion  $f$  als Summe von Funktionen darstellen, die die in Proposition 5.3.1 oder 5.3.2 getroffenen Voraussetzungen erfüllen. Für einen Punkt  $\mathbf{z}_0$  in einer offenen Menge  $A$  ist die Voraussetzung von Proposition 5.3.1 für Funktionen mit Träger in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $\mathbf{z}_0$  immer erfüllt. Es kann aber Randpunkte von  $A$  geben, für die keine Umgebung die Voraussetzungen von Proposition 5.3.2 erfüllt. Wir bezeichnen deshalb  $\mathbf{z}_0 \in \partial A$  als **regulären Randpunkt**, wenn es eine Umgebung  $U$  von  $\mathbf{z}_0$  bezüglich der Relativtopologie auf  $\partial A$  gibt, sodass  $U = \{\mathbf{z}' + \alpha(\mathbf{z}') \mathbf{n} : \mathbf{z}' \in V\}$  mit einer offenen Teilmenge  $V$  eines  $n-1$ -dimensionalen Teilraumes  $L = \mathbf{n}^\perp$  von  $\mathbb{R}^n$  und einer  $C^1$ -Funktion  $\alpha$  auf  $V$  gibt, sodass für eine geeignete Umgebung  $W$  von  $\mathbf{z}_0$  in  $\mathbb{R}^n$  mit einem  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$W \cap A = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n = \mathbf{z}' + \lambda \mathbf{n} : \mathbf{z}' \in V, \lambda \in (a, \alpha(\mathbf{z}'))\}. \quad (5.4)$$

Die Menge  $\partial_r A$  der regulären Randpunkte von  $A$  besteht also genau aus jenen Randpunkten für die die Voraussetzungen von Proposition 5.3.2 für Funktionen mit Träger in einer hinreichend kleinen Umgebung um  $\mathbf{z}_0$  erfüllt sind. Zunächst zeigen wir

**Satz 5.3.3.** *Ist  $A$  offen und beschränkt,  $f \in C(\bar{A}) \cap C^1(A)$  mit  $\text{supp}(f) \cap \partial A \subseteq \partial_r A$ , so gilt*

$$\int_A D_i f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) = \int_{\partial_r A} f(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{x}), \quad (5.5)$$

wenn die beiden Integrale existieren, wobei  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  den in das Äußere von  $A$  zeigenden normierten Normalvektor auf  $\partial_r A$  bezeichnet.

*Beweis.* Für  $\mathbf{x} \in \text{supp}(f) \cap A$  können wir einen offenen Würfel  $W_{\mathbf{x}}$  mit  $x \in W_{\mathbf{x}} \subseteq A$  finden. Für  $\mathbf{x} \in \text{supp}(f) \cap \partial A$  finden wir einen Würfel  $W_{\mathbf{x}}$  von  $\mathbf{x}$  in dem (5.4) und damit nach Definition der regulären Randpunkte  $\text{supp}(f) \cap \partial A \cap W_{\mathbf{x}} = \text{supp}(f) \cap \partial_r A \cap W_{\mathbf{x}}$  gilt.

Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge  $\bar{A}$  ist  $\text{supp}(f) \cap \bar{A}$  kompakt, also finden wir eine endliche Menge solcher offener Würfel  $W_{\mathbf{x}}$ , die  $\bar{A}$  überdecken. Sei  $\psi_1, \dots, \psi_N$  eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Einheit auf  $\text{supp}(f) \cap \bar{A}$ . Dann folgt mit Proposition 5.3.1 und Proposition 5.3.2

$$\begin{aligned} \int_A D_i f d\lambda^n &= \int_A D_i \sum_{j=1}^N f \psi_j d\lambda^n = \sum_{j=1}^N \int_A D_i (f \psi_j) d\lambda^n \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\partial_r A} f \psi_j \mathbf{v}_i d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial_r A} f \mathbf{v}_i d\mathcal{H}^{n-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Um ganz  $\bar{A} \cap \text{supp}(f)$  durch eine Zerlegung der Eins auf Proposition 5.3.1 und Proposition 5.3.2 zurückführen zu können waren wir gezwungen  $\text{supp}(f) \cap \partial A \subseteq \partial_r A$  zu fordern, da Proposition 5.3.2 genau auf reguläre Randpunkte angewendet werden kann. Das ist aber insofern unbefriedigend, als etwa Satz 5.3.3 auf einen Würfel  $A$  nur angewendet werden kann, wenn  $\text{supp}(f)$  disjunkt zu den Kanten des Würfels ist. Zugleich ist klar dass ohne Voraussetzungen an  $(\partial A \setminus \partial_r A) \cap \text{supp}(f)$  der Satz i.A. sinnlos ist, da der Normalvektor  $\mathbf{v}$  im rechten Integral in (5.5) in nicht regulären Randpunkten nicht definiert ist. Wir zeigen im Folgenden, dass es ausreicht zu fordern, dass für die Menge der **singulären Randpunkt**  $\partial_s A := \partial A \setminus \partial_r A$   $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_s A) = 0$  gilt.

**Satz 5.3.4.** *Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt mit  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_s A) = 0$  und  $f \in C(\bar{A}) \cap C^1(A)$ , so gilt wenn beide Integrale existieren*

$$\int_A D_i f(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) = \int_{\partial_r A} f(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{x}),$$

wobei  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  den in das Äußere von  $A$  zeigenden normierten Normalvektor auf  $\partial A$  bezeichnet.

*Beweis.* Wir werden den Beweis führen indem wir  $f$  durch Funktionen approximieren, die die Voraussetzungen von Satz 5.3.3 erfüllen, deren Träger also mit der Menge der singulären Randpunkte leeren Durchschnitt hat. Dazu bemerken wir zunächst, dass  $\partial A$  abgeschlossen und beschränkt, also kompakt ist.  $\partial_r A$  ist nach Definition offen in der Relativtopologie von  $\partial A$ , also ist  $\partial_s A$  nach Satz 1.4.4 kompakt in der Relativtopologie von  $\partial A$  und damit nach Proposition 1.4.1 kompakt in  $\mathbb{R}^n$ . Wegen  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_s A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^{n-1}(\partial_s A) = 0$  folgt, da  $\mathcal{H}_{\delta}^{n-1}$  in  $\delta$  monoton fallend ist  $\mathcal{H}_{\delta}^{n-1}(\partial_s A) = 0$ . Nach der Definition von  $\mathcal{H}_{\delta}^{n-1}$  gibt es damit für

$\varepsilon, \delta > 0$  eine Überdeckung von  $\partial_s A$  durch Mengen  $C_j$  mit  $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam}(C_j)}{2}\right)^{n-1} < \varepsilon$  und  $\text{diam}(C_j) < \delta$ . Dann sind für  $\mathbf{x}_j \in C_j \cap \partial_s A$  und  $2\text{diam}(C_j) > r_j > \text{diam}(C_j)$  die offenen Kugeln  $B(\mathbf{x}_j, r_j)$  eine Überdeckung von  $\partial_s A$ , die, da  $\partial_s A$  als abgeschlossene Teilmenge der Menge  $\partial A$  kompakt ist, eine endliche Teilüberdeckung  $(B(\mathbf{x}_j, r_j))_{j \leq N}$  mit

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N r_j^{-1} \lambda^n(B(\mathbf{x}_j, 2r_j)) &= 2^n \omega_n \sum_{j=1}^N r_j^{n-1} < 2^n \omega_n 4^{n-1} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\text{diam}(C_j)}{2}\right)^{n-1} \\ &< 2^{3n-2} \omega_n \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.6)$$

und  $B(\mathbf{x}_j, r_j) \cap \partial_s A \neq \emptyset$  für  $29631 \leq j \leq N$  enthält.

Für einen Mollifier  $(\eta_\delta)$  und  $\delta < 1/2$  folgt mit Proposition 2.4.4, dass die Funktion  $\chi := \mathbb{1}_{B(0,3/2)} * \eta_\delta$  eine  $C^\infty$ -Funktion mit  $0 \leq \chi(\mathbf{x}) \leq 1 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\chi(\mathbf{x}) = 1$  für  $|\mathbf{x}| \leq 1$  und  $\chi(\mathbf{x}) = 0$  für  $|\mathbf{x}| \geq 2$ . Sei  $\|D\chi\|_\infty =: c_0$ . Dann sind durch  $\chi_{j,\varepsilon,\delta}(\mathbf{x}) = \chi(r_j^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j))$ ,  $j = 1, \dots, N$   $C^\infty$ -Funktionen mit Wertebereich  $[0, 1]$ , Träger in  $B(\mathbf{x}_j, 2r_j) \subseteq B(\mathbf{x}_j, 2\delta)$ , die auf  $B(\mathbf{x}_j, r_j)$  den Wert 1 haben und deren partielle Ableitungen erster Ordnung betragsmäßig durch  $c_0/r_j$  beschränkt sind erklärt.

Wir definieren jetzt Funktionen  $\psi_{\varepsilon,\delta}$  auf  $\bar{A}$ , die um  $\partial_s A$  verschwinden, aber in der  $L^1$ -Norm die 1-Funktion approximieren:

$$\psi_{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^N (1 - \chi_{j,\varepsilon,\delta}(\mathbf{x})). \quad (5.7)$$

Wegen  $\chi_{j,\varepsilon,\delta} = 1$  in  $B(\mathbf{x}_j, r_j)$  und  $\cup_{j=1}^N B(\mathbf{x}_j, r_j) \supseteq \partial_s A$  folgt, dass  $\psi_{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x})$  auf einer offenen Teilmenge verschwindet, die  $\partial_s A$  enthält. Damit gilt  $\text{supp}(\psi_{\varepsilon,\delta}) \cap \partial_s A = \emptyset$  und die Funktion  $f\psi_{\varepsilon,\delta}$  erfüllt die Voraussetzungen von Satz 5.3.3, womit folgt

$$\int_A D_i(f\psi_{\varepsilon,\delta}) d\lambda^n = \int_{\partial_r A} f\psi_{\varepsilon,\delta} v_i d\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall \varepsilon, \delta > 0. \quad (5.8)$$

Da  $\partial_s A$  abgeschlossen ist gilt  $\text{dist}(\mathbf{x}, \partial_s A) > 0$  für  $\mathbf{x} \in \partial_r A$  und es folgt wegen der Integrierbarkeit von  $f v_i$  und  $0 \leq \psi_{\varepsilon,\delta} \leq 1$  mit dem Satz von der dominierten Konvergenz wegen  $\psi_{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x}) = 1$  für  $\delta < \text{dist}(\mathbf{x}, \partial_s A)/2$  und  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_s A) = 0$  für  $\varepsilon > 0$

$$\int_{\partial A} f v_i d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial_r A} f v_i d\mathcal{H}^{n-1} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial_r A} f\psi_{\varepsilon,\delta} v_i d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (5.9)$$

Analog folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_A |D_i f| (1 - \psi_{\varepsilon,\delta}) d\lambda^n = 0.$$

Wegen  $\chi_{j,\varepsilon,\delta} = 0$  auf  $B(\mathbf{x}_j, 2r_j)^c$  gilt mit (5.6) und (5.7) für alle  $\delta > 0$ :

$$\int_A |D_i \Psi_{\varepsilon,\delta}| d\lambda^n \leq \sum_{j=1}^N \int_{B(\mathbf{x}_j, 2r_j)} |D_i(\chi_{j,\varepsilon,\delta})| d\lambda^n \leq c_0 \omega_n 2^n \sum_{j=1}^N r_j^{n-1} \leq c_0 \omega_n 2^{2n-2} \varepsilon$$

und somit wegen

$$\begin{aligned} \int_A |D_i f - D_i(f\Psi_{\varepsilon,\delta})| d\lambda^n &\leq \int_A |D_i f|(1 - \Psi_{\varepsilon,\delta}) d\lambda^n + \|f\|_\infty \int_A |D_i \Psi_{\varepsilon,\delta}| d\lambda^n : \\ \int_A D_i f d\lambda^n &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_A D_i(f\Psi_{\varepsilon,\delta}) d\lambda^n. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Aus (5.8), (5.9) und (5.10) folgt die Behauptung. □

Satz 5.3.4 erlaubt eine koordinatenunabhängige Darstellung, wenn wir  $\mathbf{f} = (f_i)$  als Vektorfeld von  $\bar{A}$  nach  $\mathbb{R}^n$  auffassen. Definieren wir die **Divergenz** eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  als den Differentialoperator  $\operatorname{div} \mathbf{f} := \sum_{i=1}^n \partial f_i / \partial x_i$ , so ist dieser von der Wahl des orthogonalen Koordinatensystems unabhängig und es folgt aus Satz 5.3.4:

**Satz 5.3.5** (Integralsatz v. Gauß). *Ist  $A$  eine offene und beschränkte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_s A) = 0$ ,  $\mathbf{f}: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld aus  $C(\bar{A}) \cap C^1(A)$ , so gilt wenn beide Integrale existieren*

$$\int_A \operatorname{div} \mathbf{f} d\lambda^n = \int_{\partial A} \mathbf{f}^T \mathbf{v} d\mathcal{H}^{n-1},$$

wobei  $\mathbf{v}$  den in das Äußere von  $A$  zeigenden normierten Normalvektor auf  $\partial A$  bezeichnet.

Für Dimension 1 ist der Gauß'sche Integralsatz der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung. Für höhere Dimensionen hat er eine analoge anschauliche Interpretation: Das Integral über die Quelldichte eines Vektorfeldes (Divergenz) eines Bereiches ist gleich dem Fluß nach außen durch den Rand.

Als Anwendung leiten wir eine Flächenformel für die Ebene her:

**Satz 5.3.6.** *Der von einer einfachen geschlossenen Kurve  $\boldsymbol{\gamma}: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t))^T$  berandete Bereich  $\Omega$  hat Lebesguemaß  $\int_0^a x(t)y'(t) dt$ , wenn  $\boldsymbol{\gamma}$  so orientiert ist, dass  $(y'(t), -x'(t))$  nach außen orientierte Normalvektoren auf  $\partial\Omega$  sind.*

*Beweis.* Es gilt für  $\mathbf{f}(x, y) = (x, 0)^T$  mit Korollar 4.2.11 und  $\boldsymbol{\gamma}' = (x', y')^T$ ,  $\mathbf{v} = (y', -x')^T$ :

$$\begin{aligned} \lambda^2(\Omega) &= \int_\Omega 1 d\lambda^2 = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{f} d\lambda^2 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{v} ds \\ &= \int_0^a \mathbf{f}^T \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} dt = \int_0^a x(t)y'(t) dt. \end{aligned} \quad \square$$

Mit dieser Flächenformel lässt sich zeigen dass der Kreis bei gegebenem Umfang maximale Fläche hat:

**Satz 5.3.7** (Isoperimetrische Ungleichung). *Unter allen  $C^1$ -berandeten ebenen Flächen mit Länge des Randes  $2\pi$  hat der Einheitskreis maximale Fläche.*

*Beweis.* Wir wählen die Bogenlängenparametrisierung für den Rand:  $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  und erhalten für die Fläche nach Satz 5.3.6 und wegen  $0 = y(2\pi) - y(0) = \int_0^{2\pi} y'(t) dt$

$$A = \int_0^{2\pi} x(t)y'(t) dt = \int_0^{2\pi} (x(t) - m_x)y'(t) dt.$$

Wählen wir für die Konstante  $m_x$  den Mittelwert  $m_x := \int_0^{2\pi} x(t) dt / 2\pi$ , so folgt mit der Ungleichung  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  und der Ungleichung von Wirtinger Lemma 3.1.4:

$$A \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t) - m_x)^2 + y'^2(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x'^2(t) + y'^2(t) dt = \pi,$$

da für die Bogenlängenparametrisierung  $x'^2(t) + y'^2(t) = 1$  gilt. □

*Beispiel 5.3.8.* Wir berechnen für die Funktion  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)^T$  und die Menge  $\Omega = \{(x, y, z); 0 \leq z \leq 1; \max(|x|, |y|) \leq \sqrt{1 - z^2}\}$  das Integral

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2$$

direkt und über den Gauß'schen Integralsatz:

Auf  $\Omega_0 := \{(x, y, 0) : |x|, |y| \leq 1\}$  gilt  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0$ , also  $\int_{\Omega_0} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\lambda^2 = 0$ . Für die Teilmenge  $\Omega_1 = \{(x, y, z); 0 \leq z \leq 1; |y| \leq |x| \leq z\}$  erhalten wir mit Korollar 5.1.8 für  $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $Dz = (-x/\sqrt{1 - x^2}, 0)$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 &= \int_0^1 \int_{-x}^x (x, y, \sqrt{1 - x^2})(x/\sqrt{1 - x^2}, 0, 1)^T dy dx \\ &= \int_0^1 2x \left( \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für die Teilflächen  $\Omega_3 = \{\mathbf{x} : x = -\sqrt{1 - z^2}, |y| < -x\}$  und  $\Omega_2, \Omega_4 = \{\mathbf{x} : y = \pm\sqrt{1 - z^2}, |x| < |y|\} : \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 = 2$ , also insgesamt  $\int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 = 8$ . Die nichtregulären Randpunkte sind Teile von differenzierbaren Wegen die deshalb endliches eindimensionales Hausdorffmaß und folglich verschwindendes zweidimensionales Hausdorffmaß haben.

Über den Gauß'schen Integralsatz erhalten wir wegen  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 3$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 &= \int_{\Omega} 3 d\lambda^3(\mathbf{x}) = 3 \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dx dy dz \\ &= 3 \int_0^1 2\sqrt{1-z^2} 2\sqrt{1-z^2} dz = 8. \end{aligned}$$

Wenden wir den Integralsatz von Gauß auf das Vektorfeld

$$g \nabla f = g \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)^T$$

an, so erhalten wir:

**Satz 5.3.9** (Erster Green'scher Integralsatz). *Sind  $f$  und  $g$  aus  $C^2(\Omega)$  für eine offene beschränkte Menge  $\Omega$  mit  $\bar{A} \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  mit Werten in  $\mathbb{R}$ ,  $A$  beschränkt und offen sowie  $\mathbf{n}$  der normierte in das Äußere von  $A$  zeigende Normalvektor auf  $\partial_r A$  und  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \setminus \partial_r A) = 0$ , so gilt, wenn beide Integrale existieren:*

$$\int_A g \Delta f d\lambda^n = \int_{\partial_r A} g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_A \nabla f^T \nabla g d\lambda^n,$$

wobei  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \nabla f$  die Richtungsableitung von  $f$  nach  $\mathbf{n}$  bezeichnet.

$\Delta$  bezeichnet den **Laplaceoperator**  $\Delta f := \sum_{i=1}^n D_i^2 f = \operatorname{div} \nabla$ .

Vertauschen wir  $f$  mit  $g$  und subtrahieren die so erhaltenen Integrale im ersten Green'schen Integralsatz erhalten wir:

**Satz 5.3.10** (Zweiter Green'scher Integralsatz). *Sei  $\Omega$  eine offene Menge  $\Omega$  mit  $\bar{A} \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  für eine beschränkte Menge  $A$  mit  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \setminus \partial_r A) = 0$ , sowie  $f$  und  $g$   $C^2(\Omega)$ -Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbf{n}$  der normierte in das Äußere von  $A$  zeigende Normalvektor auf  $\partial_r A$ . Dann gilt, wenn beide Integrale existieren:*

$$\int_A f \Delta g - g \Delta f d\lambda^n = \int_{\partial_r A} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\mathcal{H}^{n-1}.$$

**Beispiel 5.3.11.** Für eine offene beschränkte Menge  $\Omega \supset \bar{A}$ ,  $A$  offen,  $\partial A$  glatt, sowie  $\phi \in C(\partial A)$  hat das *Dirichletproblem*

$$\Delta f = 0, \quad f|_{\partial A} = \phi, \quad f \in C^2(\Omega) \quad (5.11)$$

höchstens eine Lösung:

Es genügt zu zeigen, dass das homogene Dirichletproblem  $\Delta f = 0$ ,  $f|_{\partial A} = 0$  nur die triviale Lösung  $f = 0$  besitzt, da für zwei Lösungen  $f_1, f_2$  von (5.11)

$f_1 - f_2$  eine Lösung der homogenen Randwertaufgabe ist. Setzt man in der ersten Green'schen Formel  $g = f$ , so erhält man, da nach Voraussetzung die ersten beiden Integrale verschwinden

$$0 = - \int_A |\nabla f|^2 d\lambda^n.$$

Also muss  $f$  konstant sein und wegen der Randbedingung konstant 0 sein.

## 5.4 Integralsatz von Stokes

Im orientierten  $\mathbb{R}^2$  ist die **Rotation** eines differenzierbaren Vektorfeldes  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  durch den Differentialoperator  $\text{rot}$  definiert:

$$\text{rot } \mathbf{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

Wir bezeichnen ein Tangentialvektorfeld  $\mathbf{t}$  an  $\partial_r A$  als **positiv orientiert**, wenn diese Tangentialvektoren durch die Drehung  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  in einen in das Äußere von  $A$  zeigenden Normalvektor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  übergeführt wird, wenn also  $(t_1, t_2) = (-v_2, v_1)$  gilt.

**Satz 5.4.1** (Integralsatz von Stokes für die Ebene). *Ist  $A$  offen und beschränkt in  $\mathbb{R}^2$  mit  $\partial A \setminus \partial_r A$  endlich, sowie  $\mathbf{f}: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine auf  $\bar{A}$  stetige und auf  $A$  stetig differenzierbare Funktion, so gilt:*

$$\int_A \text{rot } \mathbf{f} d\lambda^2 = \int_{\partial A} \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} ds,$$

wobei  $\mathbf{t}$  den normierten Tangentialvektor einer positiv orientierten Parametrisierung und  $s$  die Weglänge bezeichnet.

*Beweis.* Nach dem Gauß'schen Integralsatz gilt für ein positiv orientiertes Tangentialvektorfeld mit Korollar 4.2.11

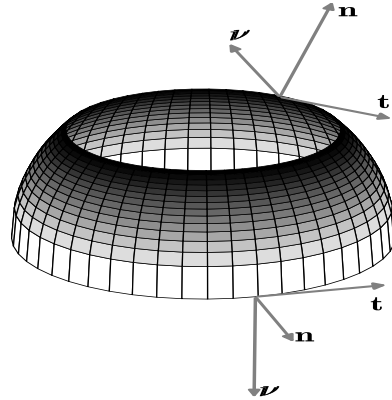
$$\begin{aligned} \int_A \text{rot } \mathbf{f} d\lambda^2 &= \int_A \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} d\lambda^2 = \int_A \text{div}(f_2, -f_1)^T d\lambda^2 \\ &= \int_{\partial A} f_2 v_1 - f_1 v_2 d\mathcal{H}^1 = \int_{\partial A} \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} d\mathcal{H}^1 = \int_{\partial A} f_2 t_2 + f_1 t_1 ds. \quad \square \end{aligned}$$



Im orientierten euklidischen  $\mathbb{R}^3$  ist die **Rotation** eines Vektorfeldes  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$  durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Rotation hängt von der Orientierung des orthogonalen Koordinatensystems ab, d.h. bei Übergang zu einem neuen orthogonalen Koordinatensystems durch eine Orthogonaltransformation  $O$  gilt für die Rotation  $\widetilde{\operatorname{rot}}$  bez. des neuen Koordinatensystems  $\widetilde{\operatorname{rot}} \mathbf{f} = \det(O) \operatorname{rot} \mathbf{f} = \pm \operatorname{rot} \mathbf{f}$ .



**Satz 5.4.2** (Integralsatz von Stokes im  $\mathbb{R}^3$ ). *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  das Bild einer beschränkten Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  mit stetigem, stückweise stetig differenzierbarem Rand unter einer  $C^2$ -Abbildung  $\alpha$ . Weiters sei  $\mathbf{f}$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf einer offenen Obermenge von  $\overline{\Omega}$ . Dann gilt*

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{t} d\mathcal{H}^1,$$

wobei  $\mathbf{n}$  ein normiertes Normalvektorfeld auf  $\Omega$  und  $\mathbf{t}$  ein normiertes Tangentialvektorfeld an  $\partial\Omega$  bezeichnet und die Orientierung von  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{t}$  so zu wählen ist, dass auf  $\partial\Omega \det(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{n}) > 0$  für ein in das Äußere von  $\Omega$  zeigende Tangentialvektorfeld  $\mathbf{v}$  auf  $\partial\Omega$  gilt.

*Beweis.* Da die Vektoren  $\frac{\partial \alpha}{\partial u} \times \frac{\partial \alpha}{\partial v}$  orthogonal zu den Tangentialvektoren  $\partial \alpha / \partial u$  und  $\partial \alpha / \partial v$  sind, bilden sie ein Normalvektorfeld auf  $\alpha(D)$ . Mit Satz 4.2.15 folgt, wenn wir berücksichtigen dass sich in der folgenden Summe Ausdrücke mit  $i = j$  wegekürzen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 &= \int_D \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \circ \alpha \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} \frac{\partial \alpha_3}{\partial v} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial u} \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial u} \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} \frac{\partial \alpha_3}{\partial v} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} \end{pmatrix} d\lambda^2(u, v) \\ &= \int_D \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} \frac{\partial \alpha_j}{\partial u} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \frac{\partial \alpha_j}{\partial v} d\lambda^2(u, v) \end{aligned} \quad (5.12)$$

falls  $(\partial \alpha / \partial u \times \partial \alpha / \partial v) \cdot \mathbf{n} = |\partial \alpha / \partial u \times \partial \alpha / \partial v|$  gilt, wenn also  $\partial \alpha / \partial u \times \partial \alpha / \partial v$  ein positives Vielfaches von  $\mathbf{n}$  ist, was genau dann der Fall ist, wenn gilt

$$\det(\partial \alpha / \partial u, \partial \alpha / \partial v, \mathbf{n}) > 0. \quad (5.13)$$

Dies können wir - gegebenenfalls nach einem Koordinatenwechsel  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v) \rightarrow (\mathbf{e}_v, \mathbf{e}_u)$  - voraussetzen.

Sei  $\tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3)^T := \mathbf{f} \circ \alpha$ , so folgt mit der Kettenregel

$$\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial u} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_l} \frac{\partial \alpha_l}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial v} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_l} \frac{\partial \alpha_l}{\partial v}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Nach Multiplikation mit  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial v}$  resp.  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial u}$  und Ergänzung beider Terme durch  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \frac{\partial \alpha_i}{\partial v}$  erhalten wir hierfür mit dem Satz von Schwarz:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \\ &= \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial u} \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} - \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial v} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \tilde{f}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \tilde{f}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Damit führt (5.12) mit dem Satz von Stokes für die Ebene 5.4.2 auf

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 &= \int_D \frac{\partial}{\partial u} \left( \sum_{i=1}^3 \tilde{f}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \sum_{i=1}^3 \tilde{f}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \right) d\lambda^2 \\ &= \int_D \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \tilde{f}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \\ \sum_{i=1}^3 \tilde{f}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} \end{pmatrix} d\lambda^2 \\ &= \int_{\partial D} \sum_{i=1}^3 \tilde{f}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \tilde{t}_u + \sum_{i=1}^3 \tilde{f}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} \tilde{t}_v d\mathcal{H}^1 \\ &= \int_{\partial D} \tilde{\mathbf{f}}^T (d\alpha) \tilde{\mathbf{t}} d\mathcal{H}^1 \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{\mathbf{t}} = (\tilde{t}_u, \tilde{t}_v)^T$  den normierten Tangentialvektor an  $\partial D$  bezeichnet. Ist  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_u, \tilde{\gamma}_v) : [a, b] \rightarrow \partial D$  eine stückweise stetig differenzierbare Parametrisierung von  $\partial D$  mit  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}' \cdot \tilde{\mathbf{t}} > 0$ , so induziert diese vermöge  $\boldsymbol{\gamma}(s) := \alpha \circ \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)$  eine stückweise stetig differenzierbare Parametrisierung von  $\partial \Omega$ , für die gilt  $\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds} = d\alpha(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \frac{d\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{ds}$ . Wenden wir Korollar 4.2.11 auf diese Parametrisierungen von  $\partial D$  bzw.  $\partial \Omega$  an, so folgt wegen  $\tilde{\mathbf{f}} \circ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{f} \circ \boldsymbol{\gamma}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 &= \int_{\partial D} \tilde{\mathbf{f}}^T \cdot (d\alpha \tilde{\mathbf{t}}) d\mathcal{H}^1 = \int_a^b \tilde{\mathbf{f}}^T(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)) \cdot \left( d\alpha(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)) \frac{d\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)}{ds} \right) ds \\ &= \int_a^b \mathbf{f}^T(\boldsymbol{\gamma}(s)) \cdot \frac{d\boldsymbol{\gamma}(s)}{ds} ds = \int_{\partial \Omega} \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{t} d\mathcal{H}^1. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass der normierte Tangentialvektor  $\mathbf{t}$  an  $\partial \Omega$  die im Satz geforderte Orientierung hat:

Es gilt  $\det(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{t}}) > 0$  bezüglich der durch  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v)$  gegebenen Orientierung des  $\mathbb{R}^2$ , also gibt es  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit  $\det(A) > 0$  und  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{t}}) = (\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v)A$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \det(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{n}) &= \operatorname{sgn} \det(d\alpha(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{t}}), \mathbf{n}) = \operatorname{sgn} \det \left( (d\alpha(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v), \mathbf{n}) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \operatorname{sgn} \det \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \mathbf{n} \right) = 1. \quad \square \end{aligned}$$



# Kapitel 6

## Sobolevräume

### 6.1 Schwache Ableitung

Für das Produkt der Ableitung einer  $C^1(\mathbb{R})$ -Funktion  $f$  mit einer Funktion  $\phi$  aus  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  verschwinden bei partieller Integration die Randterme und wir erhalten:

$$\int f' \phi d\lambda = - \int f \phi' d\lambda.$$

Wir werden sehen, dass  $f' \in C(\mathbb{R})$  eindeutig durch die Integrale  $\int f' \phi d\lambda$ ,  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  und damit auch durch die Integrale  $\int f \phi' d\lambda$  bestimmt ist. Während  $f'$  nur für differenzierbare Funktionen  $f$  definiert ist kann  $f\phi'$  für alle auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}$  integrierbaren Funktionen  $f$  integriert werden und legt die folgende Definition nahe: Wir sagen  $f$  besitzt eine „schwache Ableitung“, wenn es eine Funktion  $Df \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$  gibt, die

$$\int Df \phi d\lambda = - \int f \phi' d\lambda \tag{6.1}$$

für alle  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  erfüllt.  $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$  bezeichnet den Raum der **lokal integrierbaren Funktionen**, das ist der lineare Raum aller messbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}$ , die auf kompakten Teilmengen integrierbar sind.

Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  bezeichne einen **Multiindex** mit **Ordnung**  $|\alpha| := \sum_i \alpha_i$ . Wiederholte partielle Integration führt für  $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$  und  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$  auf

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \phi d\lambda^n = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} d\lambda^n, \tag{6.2}$$

Sei  $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  und  $\alpha$  ein Multiindex. Dann hat  $f$  eine  $\alpha$ -te **schwache Ableitung**, wenn es in  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  eine Funktion  $D^\alpha f$  gibt, sodass für alle  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$

gilt:

$$\int_{\Omega} D^{\alpha} f \phi \, d\lambda^n = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \, d\lambda^n. \quad (6.3)$$

Funktionen in  $C_c^{\infty}(\Omega)$  werden in diesem Zusammenhang **Testfunktionen** genannt.

Zur Untersuchung der Eindeutigkeit der schwachen Ableitung benötigen wir:

**Lemma 6.1.1** (Fundamentallemma der Variationsrechnung). *Gilt für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und eine Funktion  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$  und alle Testfunktionen  $\phi$  aus  $C_c^{\infty}(\Omega)$   $\int_{\Omega} f \phi \, d\lambda = 0$ , so folgt  $f = 0$  f.ü.*

*Beweis.* Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass die Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \text{dist}(\mathbf{x}, A)$  für jede nichtleere Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}^n$  stetig ist. Wegen Satz 1.4.3 nimmt diese Abbildung auf jeder kompakten Menge ihr Minimum an. Für eine kompakte Menge  $K \subseteq \Omega$ ,  $\Omega$  offen nichtleer in  $\mathbb{R}^n$  ist jeder Punkt  $\mathbf{x}$  von  $K$  innerer Punkt von  $\Omega$  und erfüllt damit  $\text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) > 0$ . Es folgt  $\delta_0 := \text{dist}(K, \partial\Omega)/2 > 0$ .

Für  $\tilde{K} := \{\mathbf{z} \in \Omega : \text{dist}(\mathbf{z}, K) \leq \delta_0\}$  ist  $\tilde{K}$  eine kompakte Teilmenge von  $\Omega$  und es gilt nach Proposition 2.4.1

$$(f \mathbb{1}_{\tilde{K}}) * \eta_{\delta}(\mathbf{x}) = f * \eta_{\delta}(\mathbf{x})$$

für jeden Mollifier  $(\eta_{\delta})_{\delta}$ ,  $\mathbf{x} \in K$  und  $\delta < \delta_0$ . Es folgt  $(f \mathbb{1}_{\tilde{K}}) * \eta_{\delta} = 0$  auf  $K$  für  $\delta < \delta_0$  und wegen  $f \mathbb{1}_{\tilde{K}} \in L^1(\Omega)$  und Satz 2.5.4 folgt

$$f \mathbb{1}_{\tilde{K}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} (f \mathbb{1}_{\tilde{K}}) * \eta_{\delta} = 0 \quad \text{fast überall auf } K.$$

Wegen  $f \mathbb{1}_{\tilde{K}} = f$  auf  $K$  folgt, dass  $f$  auf jeder kompakten Teilmenge von  $\Omega$  f.ü. verschwindet. Da  $\Omega$  als abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen dargestellt werden kann, gilt  $f = 0$  fast überall auf  $\Omega$ .  $\square$

**Korollar 6.1.2.** *Besitzt eine Funktion  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$  eine schwache Ableitung  $D^{\alpha} f$ , so ist diese eindeutig, d.h. für zwei Funktionen  $g_1, g_2$ , die schwache Ableitungen einer Funktion  $f$  sind, gilt  $g_1 = g_2$  f.ü. in  $\Omega$ .*

*Beweis.* Es folgt aus der Definition der schwachen Ableitung

$$\int_{\Omega} g_1 \phi \, d\lambda^n = \int_{\Omega} g_2 \phi \, d\lambda^n = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \, d\lambda^n \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\Omega).$$

Die Funktion  $g_1 - g_2$  aus  $L_{loc}^1(\Omega)$  erfüllt also  $\int_{\Omega} (g_1 - g_2) \phi \, d\lambda = 0 \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ . Mit Lemma 6.1.1 folgt  $g_1 = g_2$  f.ü.  $\square$

**Proposition 6.1.3.** *Ist  $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ ,  $\Omega$  offen in  $\mathbb{R}^n$ , so hat  $f$  schwache Ableitungen bis zur Ordnung  $|\alpha|$ , die mit der klassischen Ableitung übereinstimmt, also*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Für Multiindizes  $\alpha, \beta$  gilt: Existiert die schwache Ableitung  $D^\beta f$  und hat diese eine  $\alpha$ -te schwache Ableitung, so existiert die schwache Ableitung  $D^{\alpha+\beta} f$  und es gilt  $D^\alpha(D^\beta f) = D^{\alpha+\beta} f$ .

*Beweis.* Dass die klassische Ableitung eine schwache Ableitung ist folgt direkt aus (6.2).

Wir schreiben deshalb hier und im Folgenden  $D^\alpha$  auch für die klassische Ableitung  $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$ . Weiters soll unter  $D^\alpha uv$  immer  $(D^\alpha u)v$  verstanden werden.

$D^0 u$  definieren wir als  $u$ .

Für eine Testfunktion  $\phi$  ist auch  $\frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$  eine Testfunktion und es gilt

$$\begin{aligned} \int D^\alpha(D^\beta f)\phi \, d\lambda^n &= (-1)^{|\alpha|} \int D^\beta f \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \, d\lambda^n \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int f \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}} \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \, d\lambda^n \\ &= (-1)^{|\alpha+\beta|} \int f \frac{\partial^{|\alpha+\beta|} \phi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1+\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n+\beta_n}} \, d\lambda^n, \end{aligned}$$

woraus  $D^\alpha(D^\beta f) = D^{\alpha+\beta} f$  folgt. □

Für eine schwach differenzierbare Funktion  $u$  bezeichnen wir mit  $Du$  den **Gradienten** im Sinn der schwachen Ableitung, also  $Du = (D_1 u, \dots, D_n u)^T$ , mit  $D_i = D^{\alpha_i}$  mit  $\alpha_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  (1 an der  $i$ -ten Stelle).

Im eindimensionalen Fall kann man schwach differenzierbare Funktionen explizit charakterisieren: Wir bezeichnen eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , als **lokal absolut stetig**, wenn sie auf allen kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}$  absolut stetig ist. Jede auf  $\mathbb{R}$  absolut stetige Funktion ist lokal absolut stetig. Die Funktion  $x \mapsto x^2$  ist lokal absolut stetig, aber nicht absolut stetig (sie ist nicht Stammfunktion einer integrierbaren Funktion auf  $\mathbb{R}$ ).

**Proposition 6.1.4.** *Für  $n = 1$  ist eine Funktion genau dann schwach differenzierbar, wenn sie f.ü. mit einer lokal absolut stetigen Funktion übereinstimmt. In diesem Fall ist die schwache Ableitung genau die f.ü. existierende lokal integrierbare Ableitung dieser lokal absolut stetigen Funktion.*

*Beweis.* Zunächst rufen wir in Erinnerung, dass für eine lokal absolut stetige Funktion  $g$  auf  $\mathbb{R}$  nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung für Lebesgueintegrale gilt:  $g$  ist fast überall differenzierbar mit  $g' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  und  $g(x) = g(a) + \int_{(a,x)} g'(t) dt$  für  $x > a$ .

Es folgt für eine Testfunktion  $\phi$  mit  $\text{supp}(\phi) \subseteq [a, b]$  und eine lokal absolut stetige Funktion  $f$ :  $f\phi$  ist auf  $[a, b]$  absolut stetig mit

$$0 = f\phi(b) - f\phi(a) = \int_{[a,b]} (f\phi)' d\lambda = \int_{[a,b]} f'\phi + f\phi' d\lambda. \quad (6.4)$$

Damit ist  $f$  schwach differenzierbar mit  $Df = f'$  f.ü.

Hat umgekehrt  $f$  eine schwache Ableitung  $Df \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , so ist  $Df$  die f.ü. existierende Ableitung einer lokal absolut stetigen Funktion  $\tilde{f}$ . Damit ist für jede Testfunktion  $\phi$  die Funktion  $\tilde{f}\phi$  absolut stetig und mit Gleichung (6.4) folgt  $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}\phi' d\lambda = - \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}'\phi d\lambda$ , also

$$\int_{\mathbb{R}} (f - \tilde{f})\phi' d\lambda = 0 \quad (6.5)$$

für alle Testfunktionen  $\phi$ . Es bleibt zu zeigen, dass eine Funktion  $g \in L^1_{\text{loc}}$ , die  $\int_{\mathbb{R}} g\phi' d\lambda = 0$  für alle Testfunktionen  $\phi$  erfüllt f.ü. konstant ist, da dann  $f = \tilde{f} + c$  f.ü. gilt und  $f$  somit lokal absolut stetig ist.

Eine Testfunktion  $\zeta$  ist genau dann die Ableitung einer Testfunktion  $\phi$  wenn  $\int_{\mathbb{R}} \zeta(x) dx = 0$  gilt, denn jede Testfunktion hat eine  $C^\infty$ -Stammfunktion, die aber nur für  $\int_{\mathbb{R}} \zeta(x) dx = 0$  kompakten Träger hat und damit eine Testfunktion ist. Der Raum der Testfunktionen  $\zeta$  mit  $\int_{\mathbb{R}} \zeta(x) dx = 0$  hat Kodimension 1, denn ist  $\psi_0$  eine Testfunktion mit  $\int_{\mathbb{R}} \psi_0 d\lambda = 1$ , dann ist für jede Testfunktion  $\phi$  die Funktion  $\zeta = \phi - \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda \cdot \psi_0$  eine Testfunktion mit verschwindendem Integral, also die Ableitung einer Testfunktion  $\eta$ . Es folgt  $\phi = \eta' + \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda \cdot \psi_0$  mit  $\zeta = \eta'$  für eine Testfunktion  $\eta$  und nach Voraussetzung  $\int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) \int_{\mathbb{R}} \phi(s) ds \Psi_0(x) dx$  also  $\int_{\mathbb{R}} (g(x) - \int_{\mathbb{R}} g \Psi_0(s) ds) \phi(x) dx = 0$  für jede Testfunktion  $\phi$ . Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung 6.1.1 folgt  $g = \int_{\mathbb{R}} g(s) \Psi_0(s) ds$  f.ü.  $\blacksquare$

In Dimensionen größer 1 hingegen gibt es schwach differenzierbare Funktionen, die in keiner offenen nichtleeren Menge wesentlich beschränkt sind:

*Beispiel 6.1.5.* Die Funktion  $f(\mathbf{x}) = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{-s}$  hat in  $\mathbf{x} \neq 0$  klassische partielle Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -2sx_i(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{-s-1}$ . Diese sind für  $s < \frac{n-1}{2}$  lokal integrierbar. Für eine abzählbare dichte Teilmenge  $\{t_i : i \in \mathbb{N}\}$  von  $\Omega$  hat dann die Funktion  $h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f(x - t_i)$  ebenfalls schwache Ableitungen erster Ordnung, obwohl sie für  $s > 0$  in keiner offenen nichtleeren Teilmenge von  $\Omega$  im Wesentlichen beschränkt ist, d.h. die Äquivalenzklasse der schwachen Ableitung hat dort keinen beschränkten Repräsentanten.



**Bemerkung:** Ausgehend von (6.1) kann man für alle  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  eine „Ableitung“ definieren, ohne zu fordern, dass diese Ableitung als Element eines Funktionenraumes darstellbar ist: Auf  $C_c^\infty(\Omega)$  wird eine Topologie  $\mathcal{T}$  definiert unter der die Differentiation eine stetige Abbildung von  $(C_c^\infty(\Omega), \mathcal{T})$  nach  $(C_c^\infty(\Omega), \mathcal{T})$  ist und für die die Abbildungen  $\phi \mapsto \int_\Omega f \phi d\lambda^n$  für alle  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  stetig sind. (Diese Abbildungen sind offensichtlich linear, weshalb sie als stetige Funktionale bezeichnet werden). Damit sind aber auch die Verknüpfungen

$$\phi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \phi d\lambda^n$$

stetig und linear. Interpretiert man diese **Distributionen** genannten Funktionale als „Ableitung“  $D^\alpha f$  der lokal integrierbaren Funktion  $f$ , so kann man jede Funktion aus  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  unendlich oft im **distributionellen Sinn differenzieren**. Für  $k$ -mal stetig differenzierbare oder schwach differenzierbare Funktionen stimmt die distributionelle Ableitung wegen (6.1) mit dieser überein. Man kann zeigen dass alle stetigen linearen Funktionale auf  $(C_c^\infty(\Omega), \mathcal{T})$  von dieser Form sind und hat so die Distributionen, den Raum der distributionellen Ableitungen von  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  als den Raum der stetigen linearen Funktionale auf  $(C_c^\infty(\Omega), \mathcal{T})$  realisiert.

## 6.2 Sobolevräume

Für eine offene Teilmenge  $\Omega$  von  $\mathbb{R}^n$  und  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $p \geq 1$  bezeichne  $W^{m,p}(\Omega)$  den **Sobolevraum**, das ist der lineare Raum aller Funktionen  $f$  in  $L^p(\Omega)$ , die für alle  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$  eine schwache Ableitung  $D^\alpha f$  in  $L^p(\Omega)$  besitzen. Auf diesem Teilraum von  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  ist die **Sobolevnorm** durch

$$\|f\|_{m,p,\Omega} = \|f\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty \quad (6.6)$$

beziehungsweise  $\|f\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$  definiert.

Zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  auf einem linearen Raum  $L$  heißen **äquivalent**, wenn es positive Konstante  $C_1, C_2$  gibt, sodass  $C_1 \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq C_2 \|u\|_1$  für alle  $u \in L$  gilt.

Es gilt

**Satz 6.2.1.** *Auf  $\mathbb{R}^n$  sind alle  $\ell_p$ -Normen für  $1 \leq p \leq \infty$  äquivalent, genauer gilt für  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ :*

$$\|\mathbf{a}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \leq n^{\frac{p-1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} = n^{\frac{p-1}{p}} \|\mathbf{a}\|_p \quad (6.7)$$

für  $1 \leq p < \infty$ , bzw.

$$\|\mathbf{a}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \leq n \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| = n \|\mathbf{a}\|_\infty.$$

*Beweis.* Die Behauptung ist für  $p = \infty$  offensichtlich. Für  $1 \leq p < \infty$  gilt nach dem Mittelwertsatz für  $0 \leq a \leq b$  und ein  $\zeta \in [a, b]$ :

$$(a+b)^p - b^p = ap\zeta^{p-1} \geq pa^p \geq a^p,$$

also  $a^p + b^p \leq (a+b)^p$ . Mit Induktion nach  $n$  folgt

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^p = \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|^p + |a_n|^p \leq \left( \sum_{i=1}^{n-1} |a_i| \right)^p + |a_n|^p \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i| \right)^p$$

also die erste Ungleichung von (6.7). Die zweite ist die Höldersche Ungleichung Satz 2.0.1 für das Zählmaß auf  $\{1, 2, \dots, n\}$ :

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i d_i \right| \leq \|\mathbf{c}\|_p \|\mathbf{d}\|_{\frac{p}{p-1}}$$

für  $\mathbf{c} = (|a_1|, \dots, |a_n|)$  und  $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ . ▣

Aus der Definition der Sobolevnorm und Satz 6.2.1 folgt:

**Korollar 6.2.2.** *Auf dem Sobolevraum  $W^{m,p}$  ist die Norm*

$$\|f\|_{m,p}^\sim := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p \tag{6.8}$$

äquivalent zur Sobolevnorm  $\|\cdot\|_{m,p}$ .

Gelegentlich ist es übersichtlicher die Norm  $\|\cdot\|_{m,p}^\sim$  zu verwenden.

**Satz 6.2.3.** *Mit der Sobolevnorm  $\|\cdot\|_{m,p}$  ist der Sobolevraum  $W^{m,p}$  ein Banachraum. Für  $p = 2$  und das Skalarprodukt*

$$(u, v)_m := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} d\lambda^n$$

ist der Sobolevraum  $W_{m,2}$  ein Hilbertraum.

*Beweis.* Man verifiziert unmittelbar, dass die Existenz einer schwachen Ableitung - ganz im Gegensatz zur klassischen Differenzierbarkeit - unabhängig von der Wahl eines Repräsentanten in den Äquivalenzklassen des  $L^p$  ist, dass man also von der schwachen Differenzierbarkeit der Elemente des  $L^p$  sprechen kann und  $\|\cdot\|_{m,p}$  tatsächlich eine Norm auf  $W^{m,p}$  ist.

Wir haben nur die Vollständigkeit der Räume  $W^{m,p}$  unter den Sobolevnormen zu zeigen. Sei also  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $(W^{m,p}, \|\cdot\|_{m,p})$ . Dann ist für jeden Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$   $(D^\alpha u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^p$ , die wegen der Vollständigkeit der  $L^p$ -Räume gegen Elemente  $u^{(\alpha)}$  aus  $L^p$  konvergieren. Wir haben zu zeigen, dass  $D^\alpha u^{(0)} = u^{(\alpha)}$  gilt, da dann  $u_i \rightarrow u^{(0)}$  bezüglich der Sobolevnorm  $\|\cdot\|_{m,p}$  folgt.

Für jede Testfunktion  $\phi$  gilt aufgrund der Hölder-Ungleichung Satz 2.0.1

$$\left| \int_{\Omega} u \phi \, d\lambda^n \right| \leq \|u\|_p \|\phi\|_q \leq \|u\|_{m,p} \|\phi\|_q$$

somit ist die Abbildung  $u \mapsto \int_{\Omega} u \phi \, d\lambda^n$  ein stetiges lineares Funktional auf  $W^{m,p}$ , woraus  $\lim_i \int u_i \phi \, d\lambda^n = \int \lim_i u_i \phi \, d\lambda^n$  für alle  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$  bzw.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{(0)} D^\alpha \phi \, d\lambda^n &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_i D^\alpha \phi \, d\lambda^n = \lim_{i \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_i \phi \, d\lambda^n \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u^{(\alpha)} \phi \, d\lambda^n \end{aligned}$$

folgt. Aufgrund der Definition einer schwachen Ableitung gilt also  $D^\alpha u^{(0)} = u^{(\alpha)}$ .

Offensichtlich ist  $(\cdot, \cdot)_m$  ein Skalarprodukt auf  $W^{m,2}$ . Die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm ist genau  $\|\cdot\|_{m,2}$ . Wegen der Vollständigkeit von  $W^{m,2}$  ist  $W^{m,2}$  damit ein Hilbertraum.  $\square$

In Analogie zu Proposition 2.4.2 haben wir

**Lemma 6.2.4.** *Für  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  mit  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $|\alpha| \leq m$  und eine Testfunktion  $\theta$  gilt*

$$D^\alpha(u * \theta) = (D^\alpha u) * \theta$$

für  $\Omega = \mathbb{R}^n$  sowie für beliebige offene Mengen  $\Omega$ , wenn  $u$  kompakten Träger mit  $\text{supp}(\theta) \subseteq B(0, \text{dist}(\text{supp}(u), \partial\Omega))$  hat.

*Beweis.* Unter den getroffenen Voraussetzungen für  $\text{supp}(\theta)$ ,  $\text{supp}(u)$  sind alle in den folgenden Integralen auftretenden Funktionen definiert. Wir bezeichnen mit  $u_z$  die Translation der Funktion  $u$ :  $u_z(x) = u(z+x)$ . Diese ist für

$|z| < \text{dist}(\text{supp}(u), \partial\Omega)$  wohldefiniert. Es gilt für klassisch differenzierbare Funktionen  $D^\alpha\phi_z = (D^\alpha\phi)_z$ . Damit erhalten wir für  $u$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D^\alpha u)_z \phi \, d\lambda^n &= \int_{\Omega} D^\alpha u \phi_{-z} \, d\lambda^n = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha(\phi_{-z}) \, d\lambda^n \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u (D^\alpha\phi)_{-z} \, d\lambda^n = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_z D^\alpha\phi \, d\lambda^n \end{aligned}$$

Nach der Definition der schwachen Ableitung gilt also  $D^\alpha(u_z) = (D^\alpha u)_z$ . Hiermit und durch den Satz von Fubini erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D^\alpha(u * \theta)\phi \, d\lambda^n &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\theta(y) D^\alpha\phi(x) \, d\lambda^n(y) d\lambda^n(x) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y) \int_{\Omega} u(x-y) D^\alpha\phi(x) \, d\lambda^n(x) d\lambda^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} \theta(y) D^\alpha(u_{-y})(x) \phi(x) \, d\lambda^n(x) d\lambda^n(y) \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y) D^\alpha u(x-y) \, d\lambda^n(y) \phi(x) \, d\lambda^n(x) \\ &= \int_{\Omega} (D^\alpha u * \theta)\phi \, d\lambda, \end{aligned}$$

womit aus Korollar 6.1.2  $D^\alpha(u * \theta) = (D^\alpha u) * \theta$  folgt.

Für  $\Omega = \mathbb{R}^n$  ist die Faltung jeder Funktion  $u \in W^{m,p}$  mit einer Testfunktion immer wohldefiniert und in  $W^{m,p}$ . Obige Rechnung gilt dann für alle Testfunktionen.  $\square$

Man kann die Faltung mit Testfunktionen für alle  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  erklären, wenn etwa  $u$  außerhalb von  $\Omega$  durch 0 fortgesetzt wird. Für solche Funktionen ist das Lemma aber im Allgemeinen nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigt:

*Beispiel 6.2.5.* Sei  $u := \mathbb{1}_{(0,1)} \in W^{1,1}((0,1))$ ,  $\theta := \eta_{\frac{1}{2}}$  für einen Mollifier  $(\eta_\delta)_\delta$ . Es gilt  $Du = 0$ , also  $(Du) * \eta_{\frac{1}{2}} = 0$ . Setzt man aber  $u$  außerhalb von  $(0,1)$  durch 0 auf  $\mathbb{R}$  fort, so ergibt sich  $u * \eta_{\frac{1}{2}} \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit  $u * \eta_{\frac{1}{2}}(0) < 1$  und  $u * \eta_{\frac{1}{2}}(1) < 1$  sowie  $u * \eta_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}) = 1$ , woraus  $\int_{(0,1)} |D(u * \eta_{\frac{1}{2}})| \, d\lambda > 0$  folgt.

Es sind zwar  $u$  und  $u * \eta_{\frac{1}{2}}$  wohldefiniert und schwach differenzierbar, die im Beweis des Lemmas verwendete Translation  $u_z$  ist aber nach Proposition 6.1.4 in  $(0,1)$  nicht schwach differenzierbar, weshalb sich der Beweis des Lemmas nicht auf  $u$  übertragen lässt.

Es gilt folgende Variante der Leibnizschen Produktregel für schwache Ableitungen:

**Proposition 6.2.6.** Für  $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ ,  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  und einen Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$  gilt  $\theta u \in W^{m,p}$  mit:

$$D^\alpha(\theta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \theta D^{\alpha-\beta} u.$$

Hier bezeichnet  $\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$  und  $\leq$  die auf den Multiindizes durch  $\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n$  definierte Halbordnung.

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung durch Induktion. Für  $|\alpha| = 0$  ist die Aussage offensichtlich richtig. Wir nehmen an sie gelte für alle Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq l$ . Für  $|\tilde{\alpha}| = l + 1$  können wir  $\tilde{\alpha}$  als  $\alpha + \delta$  mit  $|\alpha| = l$ ,  $|\delta| = 1$  darstellen. Sei o.B.d.A.  $\delta = (1, 0, 0, \dots)$ . Für eine Testfunktion  $\phi$  ist  $\theta\phi$  eine Testfunktion und es folgt aus der Produktregel für differenzierbare Funktionen  $\theta D^\delta \phi = D^\delta(\theta\phi) - D^\delta \theta \phi$  und damit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \theta D^\delta \phi d\lambda^n &= \int_{\Omega} u D^\delta(\theta\phi) d\lambda^n - \int_{\Omega} u D^\delta \theta \phi d\lambda^n \\ &= - \int_{\Omega} D^\delta u \theta \phi d\lambda^n - \int_{\Omega} u D^\delta \theta \phi d\lambda^n \\ &= - \int_{\Omega} (D^\delta u \theta + u D^\delta \theta) \phi d\lambda^n. \end{aligned}$$

Also ist  $\theta u$  schwach differenzierbar mit  $D^\delta(\theta u) = \theta D^\delta u + D^\delta \theta u$ .

Mit der Induktionsvoraussetzung und Proposition 6.1.3 sehen wir, dass für  $u \in W^{m,p}$  und  $|\alpha| < m$  die Funktion  $D^\alpha(\theta u)$  schwach differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned} D^\delta D^\alpha(\theta u) &= D^{\alpha+\delta}(\theta u) = D^\alpha D^\delta(\theta u) = D^\alpha(D^\delta \theta u) + D^\alpha(\theta D^\delta u) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left( D^{\beta+\delta} \theta D^{\alpha-\beta} u + D^\beta \theta D^{\alpha+\delta-\beta} u \right) \\ &= \sum_{\delta \leq \gamma \leq \alpha} \left( \binom{\alpha}{\gamma-\delta} + \binom{\alpha}{\gamma} \right) D^\gamma \theta D^{\alpha+\delta-\gamma} u \\ &\quad + \binom{\alpha}{\alpha} D^{\alpha+\delta} \theta u + \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha \\ \delta \not\leq \gamma}} D^\gamma \theta D^{\alpha+\delta-\gamma} u. \end{aligned}$$

Aus der Identität  $\binom{l}{k} + \binom{l}{k+1} = \binom{l+1}{k+1}$ ,  $l \in \mathbb{N}, l \geq k \in \mathbb{N}_0$  folgt für die Multiindizes  $\alpha, \gamma, \delta$ :  $\binom{\alpha}{\gamma-\delta} + \binom{\alpha}{\gamma} = \binom{\alpha+\delta}{\gamma}$  und damit

$$D^{\alpha+\delta}(\theta u) = \sum_{\gamma \leq \alpha+\delta} \binom{\alpha+\delta}{\gamma} D^\gamma \theta D^{\alpha+\delta-\gamma} u.$$

Ist  $u \in W^{m,p}(\Omega)$ , so ist  $D^\beta u \in L^p(\Omega)$  und damit  $D^{\alpha-\beta} \theta D^\beta u \in L^p(\Omega)$  für jede Testfunktion  $\theta$ , also gilt  $\theta u \in W^{m,p}(\Omega)$ .  $\square$

Ein zentrales Hilfsmittel um Sätze über Sobolevräume zu beweisen ist es die gewünschte Aussage zunächst nur für einen geeigneten Teilraum glatter Funktionen zu beweisen. Dort sind die schwachen Ableitungen die klassischen Ableitungen und es stehen alle Methoden der klassischen Analysis zur Verfügung. Danach kann auf die Gültigkeit der Aussage für den ganzen Sobolevraum geschlossen werden, wenn der Teilraum dicht ist und sich die Behauptung etwa mit Stetigkeitsargumenten auf den Abschluss des Teilraumes, also auf den ganzen Sobolevraum hochziehen lässt, ähnlich wie wir etwa Satz 2.5.3 unter Verwendung der Tatsache, dass  $C_c$  dicht in  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$  liegt bewiesen haben.

Die folgenden Sätze 6.2.8 und 6.2.10 gewährleisten die Existenz glatter dichter Teilräume.

**Lemma 6.2.7.** *Sei  $\Omega, \Omega_l, l \in \mathbb{N}$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega_l \uparrow \Omega$  und  $f \in L^p(\Omega)$ . Ist für alle  $l$   $f|_{\Omega_l}$  schwach differenzierbar bis zur Ordnung  $m$ , so auch  $f$ . Ist darüberhinaus  $\forall l$   $f|_{\Omega_l} \in W^{m,p}(\Omega_l)$  und  $\|f|_{\Omega_l}\|_{m,p,\Omega_l} \leq c$ , so folgt  $f \in W^{m,p}(\Omega)$  mit  $\|f\|_{m,p,\Omega} \leq c$ .*

*Beweis.* Für jede Testfunktion  $\phi$  auf  $\Omega$  und  $\mathbf{x} \in \text{supp}(\phi)$  gibt es  $l \in \mathbb{N}$  mit  $\mathbf{x} \in \Omega_l$ . Da  $\text{supp}(\phi)$  kompakt und  $(\Omega_l)_l$  steigend ist, gibt es ein  $l_0$  mit  $\text{supp}(\phi) \subseteq \Omega_{l_0}$ , also kann  $\phi$  als Testfunktion auf  $\Omega_{l_0}$  aufgefasst werden. Nach Voraussetzung gilt (6.3) für  $\Omega_{l_0}$  und  $|\alpha| \leq m$  und da  $\phi$  Träger in  $\Omega_{l_0}$  hat auch für  $\Omega$ . Damit ist  $f$  auf  $\Omega$  bis zur Ordnung  $m$  schwach differenzierbar mit  $D^\alpha(f|_{\Omega_l}) = (D^\alpha f)|_{\Omega_l}$ .

Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\int_{\Omega} |D^\alpha f|^p d\lambda^n = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega_l} |D^\alpha f|^p d\lambda^n$$

und damit nach Voraussetzung und (6.6)  $\|f\|_{m,p,\Omega} < c$ .  $\square$

**Satz 6.2.8 (Meyers, Serrin).** *Für  $1 \leq p < \infty$  und  $\Omega$  offen in  $\mathbb{R}^n$  ist der Unterraum  $W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$  dicht in  $W^{m,p}(\Omega)$ .*

*Beweis.* Sei  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  mit kompaktem Träger, dann gilt für  $p < \infty$  und einen Mollifier  $(\eta_\varepsilon)_\varepsilon$  nach Satz 2.5.4  $u * \eta_\varepsilon \rightarrow u$  und  $D^\alpha u * \eta_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$  in der  $L^p$ -Norm, woraus mit Lemma 6.2.4  $\|D^\alpha(u * \eta_\varepsilon) - D^\alpha u\|_p \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $|\alpha| \leq m$  folgt. Also gilt für  $u$  mit kompaktem Träger und  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|u * \eta_\varepsilon - u\|_{m,p} \rightarrow 0. \quad (6.9)$$

Sei  $\Omega_0 := \emptyset$  und  $\Omega_l := \{\mathbf{x} \in \Omega : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) > l^{-1}\} \cap B(0, l)$  für  $l \in \mathbb{N}$ . Dann bilden die Mengen  $\Omega_{l+1} \setminus \overline{\Omega_{l-1}}$ ,  $l = 1, \dots$  eine offene Überdeckung von  $\Omega$ . Nach

Satz 5.2.1 gibt es eine dieser Überdeckung untergeordnete lokal endliche  $C^\infty$ -Zerlegung der Eins  $(\psi_k)_k$ . Da  $(\psi_k)_k$  lokal endlich und  $\Omega_{l+1} \setminus \overline{\Omega_{l-1}}$  relativ kompakt ist, ist für  $K_l := \{i \in \mathbb{N} : \text{supp}(\psi_i) \subseteq \Omega_{l+1} \setminus \overline{\Omega_{l-1}}, \text{supp}(\psi_i) \not\subseteq \Omega_l\}$   $K_l$  endlich und  $(\zeta_i)_i$  ist für  $\zeta_i := \sum_{k \in K_l} \psi_k$  eine der Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins mit  $\zeta_i \in C^\infty$  und Träger in  $\Omega_{i+1} \setminus \overline{\Omega_{i-1}}$ .

Es gilt dann für  $\mathbf{x} \in \Omega$ :  $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^\infty u\zeta_i(\mathbf{x})$ , wobei die Funktionen  $u\zeta_i$  kompakten Träger haben und nach Proposition 6.2.6 in  $W^{m,p}$  sind. Allerdings ist die Konvergenz der Reihe  $\sum_{i=1}^\infty u\zeta_i$  wegen dem Satz von der majorisierten Konvergenz zwar in  $L^p$ , aber nicht bezüglich der Sobolevnorm sichergestellt.

Da  $u\zeta_i$  für alle  $i$  kompakten Träger hat, gibt es für einen Mollifier  $(\eta_\delta)_\delta$  wegen (6.9) ein  $\varepsilon_i$  mit

$$\varepsilon_i < (i+1)^{-1} - (i+2)^{-1}, \quad \text{und} \quad \|u\zeta_i - (u\zeta_i) * \eta_{\varepsilon_i}\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon/2^i. \quad (6.10)$$

Wegen  $\text{supp}(u\zeta_i) \subseteq \Omega_{i+1} \setminus \overline{\Omega_{i-1}}$  folgt für  $\mathbf{x} \in \Omega_{i+1} \setminus \overline{\Omega_{i-1}}$  und  $|\mathbf{y}| < \varepsilon_i$ :

$$(i+2)^{-1} < (i+1)^{-1} - \varepsilon_i < d(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \partial\Omega) < (i-1)^{-1} + \varepsilon_i < (i-2)^{-1},$$

also mit Proposition 2.4.1

$$\text{supp}((u\zeta_i) * \eta_{\varepsilon_i}) \subseteq \Omega_{i+2} \setminus \overline{\Omega_{i-2}}. \quad (6.11)$$

Aus (6.10) folgt

$$\left\| \sum_{i=N+1}^M u\zeta_i - (u\zeta_i) * \eta_{\varepsilon_i} \right\|_p \leq \sum_{i=N+1}^M \|u\zeta_i - (u\zeta_i) * \eta_{\varepsilon_i}\|_p < \sum_{i=N+1}^M \frac{\varepsilon}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2^N} \quad (6.12)$$

und der Konvergenz von  $\sum_{i=1}^\infty u\zeta_i$  in  $L^p$  folgt die Konvergenz von  $\sum_{i=1}^\infty (u\zeta_i) * \eta_{\varepsilon_i}$  in  $L^p$  gegen ein  $\tilde{u} \in L^p(\Omega)$ .

Für  $l \in \mathbb{N}$  gilt aber wegen (6.11)

$$\tilde{u}|_{\Omega_l} = \sum_{i=1}^\infty (u\zeta_i) * \eta_{\varepsilon_i}|_{\Omega_l} = \sum_{i=1}^{l+1} (u\zeta_i) * \eta_{\varepsilon_i}|_{\Omega_l}.$$

Da  $(u\zeta_i) * \eta_{\varepsilon_i}$  nach Proposition 2.4.2 in  $C_c^\infty$  und damit in  $W^{m,p}(\Omega)$  liegt, folgt  $\tilde{u}|_{\Omega_l} \in W^{m,p}(\Omega_l)$  und wegen (6.12)  $\|\tilde{u}\|_{m,p,\Omega_l} \leq \|u\|_{m,p,\Omega} + \varepsilon$ . Aus Lemma 6.2.7 folgt  $\tilde{u} \in W_{m,p}(\Omega)$  und mit (6.12)

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|_{m,p,\Omega} &\leq \sup_l \|u - \tilde{u}\|_{m,p,\Omega_l} = \sup_l \left\| \sum_{i=1}^{l+1} u\zeta_i - (u\zeta_i) * \eta_{\varepsilon_i} \right\|_{m,p,\Omega_l} \\ &\leq \sup_l \sum_{i=1}^{l+1} \|u\zeta_i - (u\zeta_i) * \eta_{\varepsilon_i}\|_{m,p,\Omega_l} < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Ähnlich wie man die  $L^p(\Omega)$ -Räume für  $1 \leq p < \infty$  ohne Verwendung des Begriffs von Lebesgueintegralen als die Vervollständigung des normierten Raumes aller stetigen Funktionen auf  $\Omega$ , deren  $p$ -te Potenz absolut Riemann-integrierbar ist bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_p$  definieren kann, gibt es eine äquivalente Definition der Sobolevräume für  $1 \leq p < \infty$  ohne Verwendung der schwachen Ableitungen:

**Satz 6.2.9.**  $W^{m,p}(\Omega)$  ist die Vervollständigung des Raumes aller Funktionen in  $C^\infty(\Omega)$ , die mit allen ihren partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $m$  in  $L^p(\Omega)$  liegen, bezüglich der Sobolevnorm  $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ .

Im Allgemeinen liegt der Raum  $C_c^\infty(\Omega)$  nicht dicht im  $W^{m,p}(\Omega)$ . Für  $\Omega = (0,1)$  ist die konstante Funktion  $\mathbf{1}$  in allen Sobolevräumen  $W^{m,p}$ . Für eine Funktion  $f \in C_c^\infty$  kann nur dann  $\|\mathbf{1} - f\|_{L^1} < 1/2$  gelten, wenn  $\max f > 1/2$  gilt. Dies ist wegen dem Hauptsatz für Funktionen mit kompaktem Träger in  $(0,1)$  nur möglich, wenn  $\int_{(0,1)} |f'| d\lambda \geq \int_{(0,1)} f' d\lambda > 1/2$  gilt. Da die Ableitung von  $\mathbf{1}$  verschwindet gilt für solche Funktionen  $\|\mathbf{1}' - f'\|_{L^1(0,1)}$  und damit  $\|\mathbf{1} - f\|_{m,1} > 1/2$ . Aus der Hölder-Ungleichung Satz 2.0.1 folgt wegen  $\|f\|_1 = \int |f| d\lambda = \int |f| \mathbf{1} d\lambda \leq \|f\|_p \|\mathbf{1}\|_q = \|f\|_p$ . Also gilt  $\|f - \mathbf{1}\|_{m,p,(0,1)} > 1/2$  für alle  $f \in C_c^\infty$ .

Auf  $\Omega = \mathbb{R}^n$  lässt sich obiges Beispiel nicht übertragen, es gilt im Gegensatz:

**Satz 6.2.10.**  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  liegt dicht in  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .

*Beweis.* Nach dem Satz von Meyers-Serrin 6.2.8 (oder als direkte Folgerung von Proposition 2.4.2 und Satz 2.5.4) liegt  $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ . Es genügt also zu zeigen, dass jede unendlich oft differenzierbare Funktion  $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  bezüglich der Sobolevnorm durch Funktionen in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  beliebig genau approximiert werden kann.

Für  $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ , einen Mollifier  $(\eta_i)_i$  und  $B_l := B(0,l) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < l\}$  ist  $u(\eta_1 * \mathbb{1}_{B_l})$  aus  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  und daher in  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ . Aufgrund der Definition der Sobolevnorm (6.6) genügt es zu zeigen, dass die  $L^p$ -Norm  $\|D^\alpha u - D^\alpha(u(\eta_1 * \mathbb{1}_{B_l}))\|_p$  für  $|\alpha| \leq m$  beliebig klein wird, wenn  $l$  hinreichend groß gewählt wird.

Nach der Leibnitzregel für partielle Ableitungen vgl. Proposition 6.2.6 gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha(u(\eta_1 * \mathbb{1}_{B_l})) &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta}(\eta_1 * \mathbb{1}_{B_l}) \\ &= D^\alpha u(\eta_1 * \mathbb{1}_{B_l}) + \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u((D^{\alpha-\beta} \eta_1) * \mathbb{1}_{B_l}). \end{aligned}$$

Es gilt  $\eta_1 * \mathbb{1}_{B_l}(\mathbf{x}) = 1$  für  $|\mathbf{x}| < l - 1$  und  $0 \leq \eta_1 * \mathbb{1}_{B_l} \leq 1$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt also  $\lim_{l \rightarrow \infty} \|D^\alpha u - D^\alpha u(\eta_1 * \mathbb{1}_{B_l})\|_p = 0$ , womit  $\lim_{l \rightarrow \infty} \|D^\beta u((D^{\alpha-\beta} \eta_1) * \mathbb{1}_{B_l})\|_p = 0$  für  $\beta < \alpha$  zu zeigen bleibt.



Für  $\beta < \alpha$  (d.h.  $\beta_i \leq \alpha_i$  und  $\alpha \neq \beta$ ) ist  $D^{\alpha-\beta}\eta_1$  als Ableitung einer Funktion aus  $C_c^\infty$  in  $C_c^\infty$  und erfüllt  $\int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha-\beta}\eta_1 d\lambda^n = 0$  (Fubini und Hauptsatz). Es folgt, dass  $D^{\alpha-\beta}\eta_1 * \mathbb{1}_{B_l}(\mathbf{x})$  für  $|\mathbf{x}| < l - 1$  (und für  $|\mathbf{x}| > l + 1$ ) verschwindet und

$$\|D^\beta u((D^{\alpha-\beta}\eta_1) * \mathbb{1}_{B_l})\|_p \leq \left\| D^\beta u \mathbb{1}_{B_{l-1}^c} \right\|_p \|D^{\alpha-\beta}\eta_1\|_\infty$$

gilt. Mit dem Satz über dominierte Konvergenz folgt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|D^\beta u((D^{\alpha-\beta}\eta_1) * \mathbb{1}_{B_l})\|_p = 0. \quad \square$$

### 6.3 Einbettungs und Differenzierbarkeitssätze

In Hinblick auf Beispiel 6.1.5 und Proposition 6.1.4 stellt sich die Frage ob bzw. wann Aussagen über Zugehörigkeit zu anderen  $L^p$ -Räumen, Stetigkeit bzw. die klassische Differenzierbarkeit von Funktionen in  $W^{m,p}$  getroffen werden können. Da die Elemente eines Sobolevraumes Äquivalenzklassen von Funktionen sind heißt das genauer, wir fragen wann es stetige bzw. klassisch differenzierbare Repräsentanten (die wenn sie existieren wie im  $L^p$  eindeutig sind) dieser Elemente gibt. Darüberhinaus wollen wir Bedingungen finden unter denen der Übergang von der Sobolevnorm zur Norm  $\|\cdot\|$  eines Banachraumes  $X$  als deren Elemente die Elemente des Sobolevraumes aufgefasst werden können beschränkt ist, also wann eine Ungleichung der Art  $\|u\| \leq C\|u\|_{m,p}$  mit einer nur von  $m, n, p$  abhängigen Konstanten  $C$  gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn die entsprechende **Einbettungsabbildung**  $(W^{m,p}, \|\cdot\|_{m,p}) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$  stetig ist. Wir verstehen hier unter einer Einbettung eine kanonische lineare injektive und stetige Abbildung eines Banachraumes in einen anderen. Man spricht deshalb von **Einbettungssätzen**.

Ein besonders einfacher Einbettungssatz folgt aus Proposition 6.1.4: Da für  $n = 1$  jede schwach differenzierbare Funktion lokal absolut stetig ist kann man  $W^{1,1}(\mathbb{R})$  als einen Teilraum von  $C(\mathbb{R})$  auffassen. Also ist wegen  $\|f\|_{1,1} \geq \|f\|_\infty$   $W^{1,1}(\mathbb{R})$  stetig in  $C_b(\mathbb{R})$  eingebettet.

In höheren Dimensionen folgt aus schwacher Differenzierbarkeit nicht einmal die Stetigkeit der Funktion. Zuerst zeigen wir, dass für  $p > n$  auf klassische Differenzierbarkeit von geeigneten Repräsentanten des  $W^{m,p}(\mathbb{R})$  geschlossen werden kann. Dazu benötigen wir das folgende Lemma, das die maximale Abweichung der Funktionswerte einer  $C^1$ -Funktion von gewissen Mittelwerten durch ihre partiellen Ableitungen abschätzt:

**Lemma 6.3.1** (Morrey). *Es sei  $B$  eine Kugel mit Radius  $r$  im  $\mathbb{R}^n$  und  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .  $\bar{u}_B := \frac{1}{\omega_n r^n} \int_B u d\lambda^n$  bezeichne das Mittel von  $u$  über  $B$ . Dann gilt für  $p > n$  und*

jedes  $\mathbf{x} \in B$

$$|\bar{u}_B - u(\mathbf{x})| \leq \frac{2r^{1-\frac{n}{p}}}{\omega_n^{\frac{1}{p}}(1-\frac{n}{p})} \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^p(B)} \quad \text{mit } D_i := \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

*Beweis.* Wir nehmen o.B.d.A.  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  an. Mit

$$u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{0}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(t\mathbf{y}) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n y_i D_i u(t\mathbf{y}) dt$$

und der Hölder-Ungleichung mit  $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$  sowie dem Satz von Fubini erhalten wir:

$$\begin{aligned} |\bar{u}_B - u(\mathbf{0})| &= \frac{1}{\omega_n r^n} \left| \int_B u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{0}) d\lambda^n(\mathbf{y}) \right| \\ &= \frac{1}{\omega_n r^n} \left| \int_B \int_0^1 \sum_{i=1}^n y_i D_i u(t\mathbf{y}) dt d\lambda^n(\mathbf{y}) \right| \quad (\text{wegen } |y_i| < 2r) \\ &\leq \frac{2}{\omega_n r^{n-1}} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_B |D_i u(t\mathbf{y})| d\lambda^n(\mathbf{y}) dt \\ &= \frac{2r^{1-n}}{\omega_n} \sum_{i=1}^n \int_0^1 t^{-n} \int_{tB} |D_i u(\mathbf{z})| d\lambda^n(\mathbf{z}) dt \\ &= \frac{2r^{1-n}}{\omega_n} \sum_{i=1}^n \int_0^1 t^{-n} \int_B |D_i u(\mathbf{z})| \mathbb{1}_{tB}(\mathbf{z}) d\lambda^n(\mathbf{z}) dt \\ &\leq \frac{2r^{1-n}}{\omega_n} \sum_{i=1}^n \int_0^1 t^{-n} \left( \int_B |D_i u|^p d\lambda^n \right)^{1/p} \left( \int_B \mathbb{1}_{tB} d\lambda^n \right)^{1/q} dt \\ &= \frac{2r^{1-n}}{\omega_n^{1/p} r^{\frac{n}{q}}} \sum_{i=1}^n \int_0^1 t^{-n+\frac{n}{q}} dt \|D_i u\|_{L^p(B)} \\ &= \frac{2r^{1-\frac{n}{p}}}{\omega_n^{1/p} (1-\frac{n}{p})} \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^p(B)}, \end{aligned}$$

wobei obiges Integral  $\int_0^1 t^{-n+\frac{n}{q}} dt$  offensichtlich genau für  $p > n$  existiert.  $\square$

**Satz 6.3.2** (Morrey). *Für  $p > n$  gilt  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subseteq C_b(\mathbb{R}^n)$ , d.h. in jeder Äquivalenzklasse von  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  gibt es einen stetigen beschränkten Repräsentanten  $u$ . Für diesen gilt für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq \frac{2^{1+n/p}}{\omega_n^{1/p} (1-\frac{n}{p})} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-\frac{n}{p}} \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^p(B)} \quad (6.13)$$

für jede Kugel in  $\mathbb{R}^n$  die  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  enthält und

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{2^{n/p}}{\omega_n^{1/p} (1 - \frac{n}{p})^{n/p}} \|u\|_{\tilde{1},p}, \quad (6.14)$$

wobei  $\|\cdot\|_{\tilde{1},p}$  durch (6.8) definiert ist.

*Beweis.* Wir zeigen die Gültigkeit der Ungleichungen zunächst für Funktionen  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ :

Es gilt mit Lemma 6.3.1 und  $\bar{u}_B := \frac{1}{\omega_n r^n} \int_B u d\lambda^n$  für jede Kugel  $B$  mit Radius  $r$  die  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  enthält

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq |u(\mathbf{x}) - \bar{u}_B| + |u(\mathbf{y}) - \bar{u}_B| \leq \frac{2^{1+\frac{n}{p}} r^{1-\frac{n}{p}}}{\omega_n^{1/p} (1 - \frac{n}{p})} \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^p(B)}. \quad (6.15)$$

Es folgt die Gültigkeit von (6.15) für alle  $r > |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/2$  für glatte  $u$  und damit (6.13).

Für eine Kugel  $B$  mit Radius  $r$  die  $\mathbf{x}$  enthält folgt wegen der Hölder-Ungleichung  $\|u\|_{L^1(B)} \leq \|u\|_{L^p(B)} \|1\|_{L^{p/(p-1)}(B)} = \|u\|_{L^p(B)} (\omega_n r^n)^{\frac{p-1}{p}}$  und Lemma 6.3.1 mit  $r = (1 - n/p)/2$ :

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x})| &\leq |\bar{u}_B - u(\mathbf{x})| + |\bar{u}_B| \leq |\bar{u}_B - u(\mathbf{x})| + \frac{1}{\omega_n r^n} \|u\|_{L^1(B)} \\ &\leq \frac{2r^{1-n/p}}{\omega_n^{1/p} (1 - \frac{n}{p})} \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^p(B)} + \frac{1}{\omega_n^{1/p} r^{n/p}} \|u\|_{L^p(B)} \\ &\leq \frac{2^{n/p}}{\omega_n^{1/p} (1 - \frac{n}{p})^{n/p}} \|u\|_{\tilde{1},p}, \end{aligned}$$

also die Gültigkeit von (6.14) für glatte  $u$ .

Für beliebiges  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  gibt es nach dem Satz von Meyers-Serrin 6.2.8 eine Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{1,p} = 0$ . Wegen (6.14), angewandt auf die glatten Funktionen  $u_n - u_m$  folgt, dass  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $u$  konvergiert. Als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist  $u$  damit stetig und die Gleichungen (6.13) und (6.14) gelten für  $u$ , da die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  insbesondere auch punktweise gegen  $u$  konvergiert.  $\square$

Eine Funktion  $u : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Hölder-stetig** mit Exponenten  $\gamma$  mit  $0 < \gamma \leq 1$ , wenn es eine Konstante  $C$  gibt, sodass  $|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma$  für alle  $x, y \in U$  gilt. Das Infimum aller Konstanten für die diese Abschätzung gilt ist,

wie man unmittelbar verifiziert eine Seminorm  $[u]_{0,\gamma}$  auf dem Raum der Hölder-stetigen Funktionen mit Exponent  $\gamma$  auf  $U$  und durch  $\|u\|_{0,\gamma} := \|u\|_\infty + [u]_{0,\gamma}$  wird die **Hölder-Norm** auf dem Raum der beschränkten Hölder-stetigen Funktionen erklärt. Allgemeiner definieren wir auf dem Raum  $C^{k,\gamma}(U)$  der auf  $U$   $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen deren  $k$ -te Ableitung Hölder-stetig mit Exponent  $\gamma$  die Norm

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} := \sum_{|\alpha| < k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}.$$

**Korollar 6.3.3.** Für  $p > n$ ,  $m \geq 1$  ist  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  stetig in  $C^{m-1,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$  eingebettet, d.h. in jeder Äquivalenzklasse  $u$  von  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  gibt es einen Repräsentanten  $u^*$  aus  $C^{m-1,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$  und die Abbildung  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^{m-1,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \mapsto u^*$  ist stetig.

*Beweis.* Für  $|\alpha| < m$  und  $u \in W^{m,p}$  ist  $D^\alpha u$  in  $W^{1,p}$  und hat nach Satz 6.3.2 einen stetigen Repräsentanten für den gilt:  $\|D^\alpha u\|_{C^{0,1-n/p}} \leq K \|D^\alpha u\|_{1,p}$  mit einer von  $u$  unabhängigen Konstanten  $K$ . Es folgt

$$\sum_{|\alpha| < m} \|D^\alpha u\|_{C(\Omega)} \leq K \|u\|_{m,p} \quad \text{und} \quad \|D^\alpha u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \leq K \|u\|_{m,p}, \quad \gamma = 1 - \frac{n}{p}, \quad (6.16)$$

und es bleibt zu zeigen, dass  $u$  nicht nur schwach sondern klassisch  $m - 1$ -mal differenzierbar ist. Nach dem Satz von Meyers Serrin 6.2.8 gibt es für  $u \in W^{m,p}$  eine Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $u_n \in W^{m,p} \cap C^\infty$  die in  $W^{m,p}$  gegen  $u$  konvergiert. Aus (6.16) folgt die Konvergenz der Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $C^{m-1,1-n/p}$ . Wegen der Vollständigkeit des Raumes  $C^{m-1,1-n/p}$  ist  $u$  damit klassisch differenzierbar und  $u$  somit in  $C^{m-1,1-n/p}$  mit  $\|u\|_{C^{m-1,1-n/p}} \leq K \|u\|_{m,p}$ .  $\square$

Wir zeigen jetzt, dass die stetigen Repräsentanten  $u$  des  $W^{1,p}$  f.ü. klassisch differenzierbar sind und diese klassische Ableitung ein Repräsentant der schwachen Ableitung ist, d.h.  $(D_1, D_2, \dots, D_n)u = (\frac{\partial}{\partial_1}, \frac{\partial}{\partial_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial_n})u$  f.ü. Dazu brauchen wir einige Hilfssätze.

**Satz 6.3.4** (Überdeckungssatz von Vitali). *Es sei  $C$  eine Menge offener Kugeln in  $\mathbb{R}^n$  deren Radien beschränkt sind. Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge  $C_0 = \{B(\mathbf{x}_i, r_i) : i \in \mathbb{N}\}$  paarweise disjunkter Kugeln in  $C$ , sodass es für alle  $B \in C$  ein  $\tilde{B} \in C_0$  mit  $B \cap \tilde{B} \neq \emptyset$  und die Kugeln aus  $C_0$  mit 5-fachem Radius eine Überdeckung der Kugeln aus  $C$  sind:  $\cup_{B \in C} B \subseteq \cup_{i \in \mathbb{N}} B(\mathbf{x}_i, 5r_i)$ .*

*Beweis.* Sei  $S$  das Supremum der Radien der Kugeln in  $C$ .  $S$  ist nach Voraussetzung beschränkt. Wir wählen eine maximale Teilmenge  $\mathcal{F}_1$  von  $C$  bestehend aus paarweise disjunkten Kugeln mit Radius  $r > S/2$ . Induktiv wählen wir  $\mathcal{F}_j$  als eine maximale Teilmenge von  $C$  bestehend aus paarweise disjunkten Kugeln,

die auch mit den Kugeln aus  $\cup_{i=1}^{j-1} \mathcal{F}_i$  leeren Schnitt haben und für deren Radien  $r$   $S2^{-j} < r \leq S2^{-j+1}$  gilt und setzen  $C_0 := \cup_{j \geq 1} \mathcal{F}_j$ . Ist eine Kugel  $B$  aus  $C$  mit Radius  $r$ ,  $S2^{-j} < r \leq S2^{-j+1}$  in  $\mathcal{F}_j$  so ist nichts mehr zu beweisen. Anderenfalls ist  $B$  nicht in  $F_j$ , was wegen der Maximalität von  $\mathcal{F}_j$  nur sein kann wenn  $B$  mit einem  $\hat{B} = B(\hat{x}, \hat{r}) \in \cup_{i=1}^j \mathcal{F}_i$  nichtleeren Schnitt hat. Da der Radius  $\hat{r}$  von  $\hat{B}$  größer als der halbe Radius von  $B$  ist, folgt dass  $B$  in  $B(\hat{x}, 5\hat{r})$  liegt.  $\square$

Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist die **Hardy-Littlewood Maximalfunktion** durch

$$M_f(\mathbf{x}) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y})| d\lambda^n(\mathbf{y}), \quad \omega_n = \lambda^n(B(\mathbf{0}, 1))$$

gegeben. Folgende Abschätzung für die Maximalfunktion wird von zentraler Bedeutung sein:

**Lemma 6.3.5.** Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $A_f(t) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : M_f(\mathbf{x}) > t\}$  gilt

$$\lambda^n(A_f(t)) \leq \frac{5^n}{t} \|f\|_1. \quad (6.17)$$

*Beweis.* Für  $\mathbf{x} \in A_f(t)$  gibt es  $r_{\mathbf{x}} > 0$  mit

$$\frac{1}{r_{\mathbf{x}}^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}})} |f(\mathbf{y})| d\lambda^n(\mathbf{y}) > t.$$

Damit gilt  $r_{\mathbf{x}}^n \omega_n < \frac{1}{t} \|f\|_1$  und die Radien  $r_{\mathbf{x}}$  sind bei gegebenem  $t$  beschränkt und es gibt nach dem Überdeckungssatz von Vitali 6.3.4 eine abzählbare disjunkte Teilmenge  $\{B(\mathbf{x}_j, r_j) : j \in \mathbb{N}\}$  dieser Kugeln, für die  $A_f(t) \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} B(\mathbf{x}_j, 5r_j)$  gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} \lambda^n(A_f(t)) &\leq \sum_{j \in J} 5^n r_j^n \omega_n = 5^n \sum_{j \in J} \int_{B(\mathbf{x}_j, r_j)} d\lambda^n \\ &\leq \frac{5^n}{t} \sum_{j \in J} \int_{B(\mathbf{x}_j, r_j)} |f(\mathbf{y})| d\lambda^n(\mathbf{y}) \leq \frac{5^n}{t} \|f\|_1. \end{aligned} \quad \square$$

Ist eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in  $\mathbf{x}$  stetig, so folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} f(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \right| \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| d\lambda^n(\mathbf{y}) = 0. \end{aligned}$$

Existiert der Grenzwert  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| d\lambda^n(\mathbf{y})$  und ist 0, so heißt  $\mathbf{x}$  **Lebesguepunkt** der Funktion  $f$ . Punkte in denen  $f$  stetig ist sind offensichtlich

Lebesguepunkte. Für eine messbare Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}^n$  gilt für Lebesguepunkte  $\mathbf{x}$  der Funktion  $\mathbb{1}_A$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda^n(A \cap B(\mathbf{x}, r))}{\lambda^n(B(\mathbf{x}, r))} = \mathbb{1}_A(\mathbf{x}).$$

Ist  $x$  ein Lebesguepunkt der Funktion  $f$ , so existiert der Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} f(\mathbf{y}) d\lambda^n(\mathbf{y})$$

und ist gleich  $f(\mathbf{x})$ , der Radon-Nikodým-Ableitung des Maßes  $f\lambda^n$  nach  $\lambda^n$  in  $\mathbf{x}$ . Dies rechtfertigt die Bezeichnung des folgenden Satzes als ‘‘Differenzierbarkeitssatz‘‘.

**Satz 6.3.6** (Differenzierbarkeitssatz von Lebesgue). *Für  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  sind fast alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  Lebesguepunkte der Funktion  $f$ . Allgemeiner gilt für  $p \geq 1$  und  $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ :*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|^p d\lambda^n(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{für fast alle } \mathbf{x}. \quad (6.18)$$

*Beweis.* Da die Aussage  $\mathbf{x}$  ist Lebesguepunkt der Funktion  $f$  eine lokale ist, d.h. nur von  $f$  in einer Umgebung von  $x$  abhängt, dürfen wir gegebenenfalls durch Betrachtung von  $f\mathbb{1}_{B(\mathbf{x}, r)}$  annehmen  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Aus der Minkowski-Ungleichung folgt für  $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} & \left| \left( \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})|^p d\lambda^n(\mathbf{y}) \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \left. - \left( \int_{B(\mathbf{x}, r)} |(f-g)(\mathbf{y}) - (f-g)(\mathbf{x})|^p d\lambda^n(\mathbf{y}) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\ & \leq \left( \int_{B(\mathbf{x}, r)} |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})|^p d\lambda^n(\mathbf{y}) \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

und wegen der Gültigkeit von (6.18) für stetige Funktionen folgt für jede Funktion  $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})|^p d\lambda^n(\mathbf{y}) \\ & = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |(f-g)(\mathbf{y}) - (f-g)(\mathbf{x})|^p d\lambda^n(\mathbf{y}). \quad (6.19) \end{aligned}$$

Aus der Minkowski-Ungleichung folgt auch

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |(f-g)(\mathbf{y}) - (f-g)(\mathbf{x})|^p d\lambda^n(\mathbf{y}) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \left( \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |(f-g)(\mathbf{y})|^p d\lambda^n(\mathbf{y}) \right)^{\frac{1}{p}} + |(f-g)(\mathbf{x})| \quad (6.20) \\
& \leq (M_{|f-g|^p}(\mathbf{x}))^{\frac{1}{p}} + |(f-g)(\mathbf{x})|.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 6.3.5 angewandt auf die Funktion  $|f-g|^p$  folgt

$$\lambda^n(\{\mathbf{x} : M_{|f-g|^p}(\mathbf{x}) > t^p\}) = \lambda^n(A_{|f-g|^p}(t^p)) \leq \frac{5^n}{t^p} \|f-g\|_p^p,$$

womit wir wegen  $\lambda^n(\{\mathbf{x} : |(f-g)(\mathbf{x})| \geq t\}) \leq \frac{\|f-g\|_p^p}{t^p}$

$$\begin{aligned}
& \lambda^n(\{\mathbf{x} : M_{|f-g|^p}(\mathbf{x})^{\frac{1}{p}} + |(f-g)(\mathbf{x})| > 2t\}) \\
& \leq \lambda^n(\{\mathbf{x} : (M_{|f-g|^p}(\mathbf{x}))^{\frac{1}{p}} > t\}) + \lambda^n(\{\mathbf{x} : |(f-g)(\mathbf{x})| > t\}) \\
& \leq \frac{5^n + 1}{t^p} \|f-g\|_p^p \quad (6.21)
\end{aligned}$$

erhalten. Es folgt mit (6.19), (6.20) sowie (6.21)

$$\begin{aligned}
& \lambda^n \left( \left\{ \mathbf{x} : \left( \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} > 2t \right\} \right) \\
& = \lambda^n \left( \left\{ \mathbf{x} : \left( \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |(f-g)(\mathbf{y}) - (f-g)(\mathbf{x})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} > 2t \right\} \right) \\
& \leq \lambda^n \left( \left\{ \mathbf{x} : \left( \sup_r \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |(f-g)(\mathbf{y}) - (f-g)(\mathbf{x})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} > 2t \right\} \right) \\
& \leq \lambda^n(\{\mathbf{x} : (M_{|f-g|^p}(\mathbf{x}))^{\frac{1}{p}} + |(f-g)(\mathbf{x})| > 2t\}) \leq \frac{5^n + 1}{t^p} \|f-g\|_p^p.
\end{aligned}$$

Da für  $1 \leq p < \infty$   $C_c(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $L^p$  liegt, kann für jedes  $\varepsilon > 0$   $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$  so gewählt werden, dass  $\frac{5^n + 1}{t^p} \|f-g\|_p^p < \varepsilon$  gilt. Da  $t$  und  $\varepsilon$  beliebig waren, folgt dann aus

$$\lambda^n \left( \left\{ \mathbf{x} : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})|^p d\lambda^n(\mathbf{y}) > (2t)^p \right\} \right) < \varepsilon$$

die Behauptung

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})|^p d\lambda^n(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{f.ü.} \quad \square$$

Mit dem Differenzierbarkeitssatz von Lebesgue 6.3.6 und dem Satz von Morray 6.3.2 erhalten wir:

**Satz 6.3.7.** Für  $\Omega$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n < p < \infty$  und  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  ist der eindeutige stetige Repräsentant  $f_u$  von  $u$  f.ü. differenzierbar und der f.ü. existierende Gradient  $\nabla f_u$  ist Repräsentant des schwachen Gradienten  $Du = (D_1u, \dots, D_nu)$ .

*Beweis.* Für festes  $\mathbf{x} \in \Omega$  setzen wir

$$f(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) - Du(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

wobei  $Du$  ein beliebiger Repräsentant des schwachen Gradienten ist, und erhalten

$$Df(\mathbf{y}) = Du(\mathbf{y}) - Du(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x}) = 0.$$

Mit der Ungleichung von Morray 6.3.2 folgt für  $r > |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$

$$\begin{aligned} & |u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) - Du(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})| \\ &= |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| \\ &\leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(\mathbf{x},r)} |Df(\mathbf{z})|^p d\lambda^n(\mathbf{z}) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= Cr \left( \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(\mathbf{x},r)} |Df(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{x})|^p d\lambda^n(\mathbf{z}) \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} & \frac{|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) - Du(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &\leq C \left( \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(\mathbf{x},r)} |Df(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{x})|^p d\lambda^n(\mathbf{z}) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Mit dem Differenzierbarkeitssatz von Lebesgue 6.3.6 folgt

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(\mathbf{x},r)} |Df(\mathbf{z}) - Df(\mathbf{x})|^p d\lambda^n(\mathbf{z}) \rightarrow 0, \text{ für } r \rightarrow 0 \text{ f.ü.}$$

also

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) - Du(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} = 0 \text{ f.ü.},$$

Dies ist aber genau die Definition der klassischen Differenzierbarkeit von  $u$  in  $\mathbf{x}$  mit Ableitung  $Du(\mathbf{x})$ .  $u$  ist also f.ü. klassisch differenzierbar und die klassische Ableitung stimmt mit jedem Repräsentanten aus der Äquivalenzklasse der schwachen Ableitung f.ü. überein. □



Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **Lipschitz-stetig** wenn  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$  und eine Konstante  $L$  gilt. Sie heißt **lokal Lipschitz-stetig** wenn sie in einer Umgebung eines jeden Punktes Lipschitz-stetig ist. Eine Lipschitz-stetige Funktion muss nicht differenzierbar sein, wie die Betragsfunktion auf  $\mathbb{R}$  zeigt. Es gilt aber:

**Satz 6.3.8** (Rademacher). *Eine auf einer offenen Teilmenge  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^n$  lokal Lipschitz-stetige Funktion  $f$  ist in  $\Omega$  fast überall differenzierbar.*

*Beweis.* Da Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, dürfen wir annehmen dass  $f$  Lipschitz-stetig ist. Für  $i \leq n$  ist  $f$  wegen der Lipschitz-Stetigkeit als Funktion in  $x_i$  absolut stetig und ist somit in  $\Omega$  schwach nach allen Variablen differenzierbar, wobei die f.ü. existierende partielle Ableitung wegen der Lipschitz-Stetigkeit ein durch die Lipschitzkonstante  $L$  im Wesentlichen beschränkter Repräsentant der schwachen Ableitung ist. Für jede  $C_c^\infty$ -Funktion  $\varphi$  ist damit  $\varphi D_i f$  für alle  $p \geq 1$ ,  $i \leq n$  in  $L^p(\Omega)$ , d.h.  $\varphi f \in W^{1,p}$ . Mit Satz 6.3.7 folgt wenn wir  $p > n$  wählen, dass  $\varphi f$  f.ü. differenzierbar ist und damit die f.ü. Differenzierbarkeit von  $f$ .  $\square$

Eine Funktion  $u : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Hölder-stetig** mit Exponenten  $\gamma$  mit  $0 < \gamma \leq 1$ , wenn es eine Konstante  $C$  gibt, sodass  $|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma$  für alle  $x, y \in U$  gilt. Das Infimum aller Konstanten für die diese Abschätzung gilt ist, wie man unmittelbar verifiziert eine Seminorm  $[u]_{0,\gamma}$  auf dem Raum der Hölder-stetigen Funktionen mit Exponent  $\gamma$  auf  $U$  und durch  $\|u\|_{0,\gamma} := \|u\|_\infty + [u]_{0,\gamma}$  wird die **Hölder-Norm** auf dem Raum der beschränkten Hölder-stetigen Funktionen erklärt. Allgemeiner definieren wir auf dem Raum  $C^{k,\gamma}(U)$  der auf  $U$   $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen deren  $k$ -te Ableitung Hölder-stetig mit Exponent  $\gamma$  die Norm

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} := \sum_{|\alpha| < k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}.$$

**Korollar 6.3.9.** *Für  $p > n$ ,  $m \geq 1$  ist  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  stetig in  $C^{m-1,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$  eingebettet, d.h. in jeder Äquivalenzklasse  $u$  von  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  gibt es einen Repräsentanten  $u^*$  aus  $C^{m-1,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$  und die Abbildung  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^{m-1,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \mapsto u^*$  ist stetig.*

*Beweis.* Für  $|\alpha| < m$  und  $u \in W^{m,p}$  ist  $D^\alpha u$  in  $W^{1,p}$  und hat nach dem Satz von Morrey 6.3.2 einen stetigen Repräsentanten  $u^*$  für den gilt:  $\|D^\alpha u^*\|_{C^{0,1-n/p}} \leq K \|D^\alpha u\|_{1,p}$  mit einer von  $u$  unabhängigen Konstanten  $K$ . Es folgt

$$\sum_{|\alpha| < m} \|D^\alpha u^*\|_{C(\Omega)} \leq K \|u\|_{m,p} \quad \text{und} \quad \|D^\alpha u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \leq K \|u\|_{m,p}, \quad \gamma = 1 - \frac{n}{p}, \quad (6.22)$$

und es bleibt zu zeigen, dass  $u^*$  nicht nur schwach sondern klassisch  $m - 1$ -mal differenzierbar ist. Nach Satz 6.2.8 gibt es für  $u^* \in W^{m,p}$  eine Folge  $(u_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $u_n^* \in W^{m,p} \cap C^\infty$ , die in  $W^{m,p}$  gegen  $u^*$  konvergiert. Aus (6.22) folgt die Konvergenz der Folge  $(u_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $C^{m-1,1-n/p}$ . Wegen der Vollständigkeit des Raumes  $C^{m-1,1-n/p}$  ist  $u^*$  damit klassisch differenzierbar und  $u^*$  somit in  $C^{m-1,1-n/p}$  mit

$$\|u^*\|_{C^{m-1,1-n/p}} \leq K \|u\|_{m,p},$$

$W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  ist also stetig in  $C^{m-1,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$  eingebettet. □

Für  $p < n$  können wir nicht auf die Stetigkeit der Elemente des  $W^{m,p}$  schließen, aber wir zeigen dass eine Funktion in  $W^{m,p}$  nicht nur - wie aus der Definition der Sobolevnorm folgt - in  $L^p$  liegt, sondern notwendigerweise auch in  $L^q$  mit  $q = np/(n - mp) > p$ .

Wir betrachten als einfaches Beispiel eine Funktion, die lokal als  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$  dargestellt werden kann. Diese ist für  $q < \frac{n}{\alpha}$  in  $L^q$ . Die  $m$ -fachen klassischen Ableitungen von  $f$  sind von der Ordnung  $|\mathbf{x}|^{-\alpha-m}$  und diese Ableitungen sind für  $(\alpha + m)q < n$  also für  $\alpha < \frac{n-mq}{q}$  in  $L^q$ . Aus  $f \in W^{m,p}$  folgt also  $\alpha < \frac{n-mp}{p}$  und damit  $\frac{n}{\alpha} > \frac{np}{n-mp}$ , also  $f \in L^q$  für  $q \leq \frac{np}{n-mp}$ . Der folgende Satz 6.3.11 zeigt also, dass diese Eigenschaft der speziellen betrachteten Funktionen allen Elementen aus  $W^{m,p}$  zukommt. Für den Beweis benötigen wir

**Lemma 6.3.10** (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung). *Für ein positives Maß  $\mu$ ,  $\sum_{i=1}^n 1/p_i = 1$ ,  $p_i > 0$  und  $0 \leq f_i \in L^{p_i}$  ist  $\prod_{i=1}^n f_i$   $\mu$ -integrierbar und es gilt*

$$\int \prod_{i=1}^n f_i d\mu \leq \prod_{i=1}^n \left( \int f_i^{p_i} d\mu \right)^{1/p_i}.$$

*Beweis.* Für  $n = 2$  ist dies die klassische Hölder-Ungleichung. Angenommen die Behauptung gilt für  $n - 1$ . Die Funktionen  $f_i^{p_n/(p_n-1)}$ ,  $1 \leq i < n$  sind für  $f_i \in L^{p_i}$  in  $L^{p_i(p_n-1)/p_n}$ . Es folgt aus der Hölder-Ungleichung und deren Verallgemeinerung angewandt auf die  $n - 1$  Funktionen  $f_i^{p_n/(p_n-1)}$  und die Exponenten  $p_i \frac{p_n-1}{p_n}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  wegen

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_n}{p_i(p_n-1)} = \frac{p_n}{p_n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i} = \frac{p_n}{p_n-1} \left( 1 - \frac{1}{p_n} \right) = 1$$

$$\begin{aligned}
\int \prod_{i=1}^n f_i d\mu &= \int \prod_{i=1}^{n-1} f_i \cdot f_n d\mu \\
&\leq \left( \int \prod_{i=1}^{n-1} f_i^{p_n/(p_n-1)} d\mu \right)^{(p_n-1)/p_n} \left( \int f_n^{p_n} d\mu \right)^{1/p_n} \\
&\leq \prod_{i=1}^{n-1} \left( \int f_i^{p_i} d\mu \right)^{1/p_i} \left( \int f_n^{p_n} d\mu \right)^{1/p_n} \\
&= \prod_{i=1}^n \left( \int f_i^{p_i} d\mu \right)^{1/p_i}. \quad \square
\end{aligned}$$

**Satz 6.3.11** (Sobolev-Ungleichung). Für  $1 \leq mp < n$  und  $p^* = np/(n - mp)$  ist  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  stetig in  $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$  eingebettet. Für  $m = 1$  gilt konkret

$$\|u\|_{p^*} \leq \frac{p(n-1)}{n^{1/p}(n-p)} \|u\|_{1,p}.$$

*Beweis.* Wir werden die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung für  $k$  Funktionen und  $p_i = 1/k$ , also in der Form

$$\int \prod_{i=n-k+1}^n f_i d\mu \leq \prod_{i=n-k+1}^n \left( \int f_i^k d\mu \right)^{\frac{1}{k}}$$

verwenden.

Sei  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ , dann folgt aus dem Hauptsatz für  $1 \leq i \leq n$

$$u(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_i} D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dt_i.$$

und damit  $|u(\mathbf{x})| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(\mathbf{x})| dx_i$ , beziehungsweise

$$|u(\mathbf{x})|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(\mathbf{x})| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

In diesem Produkt ist der  $i$ -te Faktor von  $x_i$  unabhängig. Bei Integration nach  $x_i$  kann dieser Faktor also aus dem Integral gezogen werden.

Wir integrieren zuerst nach  $x_1$ , ziehen den ersten Faktor vor das Integral, wenden auf die verbleibenden  $n - 1$  Faktoren die verallgemeinerte Hölder-Un-

gleichung für die  $n - 1$  Exponenten  $n - 1$  an und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\mathbf{x})|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(\mathbf{x})| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u(\mathbf{x})| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(\mathbf{x})| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &\leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u(\mathbf{x})| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(\mathbf{x})| dx_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Ungleichung ist der zweite der  $n$  Faktoren von  $x_2$  unabhängig weshalb er bei Integration nach  $x_2$  vor das Integral gezogen werden kann und wir erhalten wieder unter Verwendung der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\mathbf{x})|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 &\leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_2 u(\mathbf{x})| dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u(\mathbf{x})| dx_1 \prod_{i=3}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(\mathbf{x})| dx_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2 \\ &\leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_2 u(\mathbf{x})| dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u(\mathbf{x})| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \times \\ &\quad \times \prod_{i=3}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u(\mathbf{x})| dx_i dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Nach  $k$  Schritten erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^k} |u(\mathbf{x})|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \cdots dx_k &\leq \prod_{i=1}^k \left( \int_{\mathbb{R}^k} |D_i u(\mathbf{x})| dx_1 \cdots dx_k \right)^{\frac{1}{n-1}} \times \\ &\quad \times \prod_{i=k+1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^{k+1}} |D_i u(\mathbf{x})| dx_i dx_1 \cdots dx_k \right)^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned}$$

Nach  $n - k$  weiteren Integrationen nach  $x_{n-k+1}, \dots, x_n$  erhalten wir durch diese Vorgangsweise

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x})|^{\frac{n}{n-1}} d\mathbf{x} \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D_i u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

und mit der Mittelungleichung für arithmetische und geometrische Mittel

$$\left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{für } a_i \geq 0$$

die Abschätzung

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D_i u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_1 \leq \frac{1}{n} \|u\|_{1,1}.$$

Dies ist genau die Sobolev-Ungleichung für  $m = p = 1$  für Funktionen aus  $C_c^1$ .

Ersetzen wir in dieser Gleichung  $u$  durch  $|u|^\gamma$ ,  $\gamma > 1$ , so ist diese Funktion auch in  $C_c^1$  und wir erhalten, da wegen  $u \in C^\infty$   $D_i$  gleich der klassischen partiellen Ableitung ist womit wir die Kettenregel anwenden können, für  $\gamma > 1$  wegen  $|D_i |u|^\gamma| = \gamma |u|^{\gamma-1} D_i u$ :

$$\| |u|^\gamma \|_{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D_i |u|^\gamma| d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{n}} = \gamma \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |D_i u| d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Anwendung der Hölder-Ungleichung mit  $1/p' + 1/p = 1$  gibt

$$\| |u|^\gamma \|_{\frac{n}{n-1}} \leq \gamma \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)p'} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{np'}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D_i u|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{np}}.$$

Wir wählen  $p$  so, dass die Potenzen von  $|u|$  in den Integralen links und rechts übereinstimmen, also  $(\gamma-1)p' = \gamma \frac{n}{n-1}$ , was auf  $\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}$  führt. Für den verbleibenden Fall  $p > 1$  gilt also  $\gamma > 1$  und wir erhalten unter Verwendung der Mittelungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p}} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{np}{n-p}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{n-p}{np}} = \|u\|_{p^*} \\ &\leq \frac{p(n-1)}{n-p} \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D_i u|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{np}} \\ &\leq \frac{p(n-1)}{n(n-p)} \sum_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D_i u|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Wegen  $\sum_{i=1}^n a_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} n^{1-\frac{1}{p}}$  für  $a_i > 0$  (Hölder) erhalten wir

$$\|u\|_{p^*} \leq \frac{p(n-1)}{n^{1/p}(n-p)} \left( \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |D_i u|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p(n-1)}{n^{1/p}(n-p)} \|u\|_{1,p}.$$

Also haben wir  $\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq \gamma \|u\|_{1,p}$ , die Sobolev-Ungleichung für  $m = 1$ ,  $1 \leq p < n$  und Funktionen  $u$  aus  $C_c^\infty$  gezeigt.

Für  $m > 1$  zeigen wir die Gültigkeit der Ungleichung mit Induktion: Gilt

$$\|u\|_{\frac{np}{n-mp}} \leq C_{m,n,p} \|u\|_{m,p} \quad (6.23)$$

für alle  $u \in C_c^\infty$  so folgt, wenn wir  $u$  durch  $D_i u$  ersetzen, über  $i$  summieren und Ungleichung (6.23) anwenden:

$$\begin{aligned} \|u\|_{1, \frac{np}{n-mp}} &\sim \|u\|_{\frac{np}{n-mp}} + \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{\frac{np}{n-mp}} \leq \|u\|_{\frac{np}{n-mp}} + C_{m,n,p} \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{m,p} \\ &\leq C_{m,n,p} \|u\|_{m,p} + \tilde{C} \|u\|_{m+1,p} \leq \hat{C} \|u\|_{m+1,p}. \end{aligned}$$

Wenden wir (6.23) für  $m = 1$  auf die linke Seite an erhalten wir wegen

$$\frac{n \frac{np}{n-mp}}{n - \frac{np}{n-mp}} = \frac{np}{n - (m+1)p}$$

die Sobolev-Ungleichung für  $m+1$ :

$$\|u\|_{\frac{np}{n-(m+1)p}} \leq C_{m+1,n,p} \|u\|_{m+1,p}.$$

Ist nun  $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ , so gibt es nach Satz 6.2.10 eine in  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  gegen  $u$  konvergente Folge  $(u_n)$  in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Diese ist aufgrund der bereits bewiesenen Sobolev-Ungleichung für Funktionen aus  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  eine Cauchyfolge in  $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ , die wegen der Vollständigkeit des Raumes gegen ein Element aus  $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$  konvergiert für das die Sobolev-Ungleichung (6.23) gültig ist, womit der Satz für alle  $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  bewiesen ist.  $\square$

**Bemerkung:** Für ein beliebiges Gebiet  $\Omega$  muss  $C_c^\infty(\Omega)$  nicht dicht in  $W^{m,p}(\Omega)$  liegen, was in obigem Beweis am Schluss verwendet wurde. Dieser Beweis bleibt aber richtig, wenn man sich auf  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , den Abschluss von  $C_c^\infty(\Omega)$  in  $W^{m,p}(\Omega)$  einschränkt, oder wenn gezeigt werden kann, dass  $C_c^\infty(\Omega)$  dicht in  $W^{m,p}(\Omega)$  liegt, was etwa bei hinreichend glattem Rand der Fall ist.

## 6.4 $H^s$ und Fouriertransformation

Für  $s \in \mathbb{R}$  wird auf dem Unterraum  $H^s$  aller Elemente von  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , für die

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\mathbf{x}|^2)^s |\mathcal{F}u(\mathbf{x})|^2 d\lambda^n(\mathbf{x}) < \infty$$

gilt durch

$$(u, v)_s := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\mathbf{x}|^2)^s \mathcal{F}u(\mathbf{x}) \overline{\mathcal{F}v(\mathbf{x})} d\lambda^n(\mathbf{x})$$

ein Skalarprodukt definiert. Wir bezeichnen die hierdurch induzierte Norm auf  $H^s$  mit  $\|\cdot\|_{H^s}$ :

$$\|u\|_{H^s}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\mathbf{x}|^2)^s |\mathcal{F}u(\mathbf{x})|^2 d\lambda^n(\mathbf{x}). \quad (6.24)$$

Für  $s \in \mathbb{R}$  sei  $L^{2,s}$  der Raum aller Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ , die bezüglich der Gewichtsfunktion  $\mathbf{x} \mapsto (1 + |\mathbf{x}|^2)^s$  quadratisch integrierbar sind.  $L^{2,s}$  ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{2,s} := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\mathbf{x}|^2)^s u(\mathbf{x}) \overline{v(\mathbf{x})} d\lambda^n(\mathbf{x}),$$

der für  $s \geq 0$  ein dichter Unterraum von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ist.

**Lemma 6.4.1.** *Auf dem Schwartzraum  $\mathcal{S}$  ist für  $k \in \mathbb{N}_0$  die Norm  $\|\cdot\|_{H^k}$  äquivalent zur Sobolevnorm  $\|\cdot\|_{k,2}$ .*

*Beweis.* Aufgrund von Korollar 3.3.5 und Satz 3.3.2 gilt für Funktionen  $u$  aus der Schwarzklasse  $\mathcal{S}$  mit  $m_\alpha(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ :

$$\|D^\alpha u\|_2^2 = \|\mathcal{F}D^\alpha u\|_2^2 = \|m_\alpha \mathcal{F}u\|_2^2,$$

also folgt für die Sobolevnorm  $\|\cdot\|_{k,2}$

$$\|u\|_{k,2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|m_\alpha \mathcal{F}u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq k} |m_\alpha|^2 |\mathcal{F}u(\mathbf{x})|^2 d\lambda^n(\mathbf{x}). \quad (6.25)$$

Für  $0 \leq |\alpha| \leq k$  gilt

$$|m_\alpha(\mathbf{x})| = \prod_{i=1}^n |x_i|^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^n |\mathbf{x}|^{\alpha_i} = |\mathbf{x}|^{|\alpha|} \leq (1 + |\mathbf{x}|^2)^{|\alpha|/2} \leq (1 + |\mathbf{x}|^2)^{k/2} \quad (6.26)$$

und

$$\begin{aligned} (1 + |\mathbf{x}|^2)^k &= (1 + |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^k = \sum_{|\alpha| \leq k} C_{k,\alpha} \prod_{i=1}^n |x_i|^{2\alpha_i} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} C_{k,\alpha} |m_\alpha(\mathbf{x})|^2 \leq C_k \sum_{|\alpha| \leq k} |m_\alpha(\mathbf{x})|^2. \end{aligned}$$

Also gilt für geeignete Konstante  $B_k, C_k > 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$B_k \sum_{|\alpha| \leq k} |m_\alpha(\mathbf{x})|^2 \leq (1 + |\mathbf{x}|^2)^k \leq C_k \sum_{|\alpha| \leq k} |m_\alpha(\mathbf{x})|^2. \quad (6.27)$$

Es folgt dass für  $k \in \mathbb{N}_0$  auf  $\mathcal{S}$  durch (6.24) wegen (6.25) eine zur Sobolevnorm  $\|\cdot\|_{k,2}$  äquivalente Norm  $\|\cdot\|_{H_k}$  definiert wird.  $\square$

Wegen  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$  und Satz 6.2.10 ist  $\mathcal{S}$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  ein dichter Teilraum von  $W^{k,2}$ . Aus der Konvergenz einer Folge in  $W^{k,2}$  folgt klarerweise die Konvergenz in  $L^2$ . Wegen der Vollständigkeit von  $W^{k,2}$  kann  $W^{k,2}$  als der Teilraum aller Elemente  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  beschrieben werden, für die es eine Folge  $(u_n)$  in  $\mathcal{S}$  gibt, die in  $L^2$  gegen  $f$  konvergiert und eine Cauchyfolge in  $W^{k,2}$  ist.

Analog dazu ist  $\mathcal{S}$  ein dichter Teilraum von  $L^{2,s}$  und aus der Konvergenz einer Folge in  $L^{2,s}$  folgt für  $s \geq 0$  die Konvergenz in  $L^2$ .  $L^{2,s}$  ist also für  $s \geq 0$  der Raum aller Elemente  $g$  aus  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , für die es eine Folge  $(v_n)$  in  $\mathcal{S}$  gibt, die in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  gegen  $g$  konvergiert und eine Cauchyfolge in  $L^{2,s}$  ist.

Wegen Proposition 3.3.1 und Satz 3.3.2 können wir diese Eigenschaft auch wie folgt formulieren:  $L^{2,s}$  ist der Raum aller Elemente  $g$  aus  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , für die es eine Folge  $(u_n)$  in  $\mathcal{S}$  gibt, für die  $(\mathcal{F}u_n)$  in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  gegen  $g$  konvergiert und für die  $(\mathcal{F}u_n)$  eine Cauchyfolge in  $L^{2,s}$  ist.  $(\mathcal{F}u_n)$  ist aber genau dann eine Cauchyfolge in  $L^{2,s}$ , wenn  $(u_n)$  eine Cauchyfolge in  $H^k$  ist. Wegen Lemma 6.4.1 ist eine Folge  $(u_n)$  in  $\mathcal{S}$  genau dann eine Cauchyfolge bezüglich  $\|\cdot\|_{k,2}$ , wenn sie eine Cauchyfolge bezüglich  $\|\cdot\|_{H^k}$  ist. Wir haben also gezeigt:

**Lemma 6.4.2.** Für  $k \in \mathbb{N}_0$  stimmen die linearen Teilräume  $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$  und  $H^k$  des  $L^2(\mathbb{R}^n)$  überein.

Darüberhinaus gilt:

**Satz 6.4.3.** Für  $f \in W^{k,2}$  und  $|\alpha| \leq k$  gilt für die schwache Ableitung

$$D^\alpha f = i^{|\alpha|} \mathcal{F}^{-1}(m_\alpha \mathcal{F} f). \quad (6.28)$$

Die Normen  $\|\cdot\|_{k,2}$  und  $\|\cdot\|_{H^k}$  sind äquivalent auf  $W^{k,2}$ .

*Beweis.* Für  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \in \mathcal{S}$  gilt nach Korollar 3.3.5 und Satz 3.3.2

$$\int f \overline{D^\alpha \varphi} d\lambda^n = (-i)^{|\alpha|} \int f \overline{\mathcal{F}^{-1}(m_\alpha \mathcal{F} \varphi)} d\lambda^n = (-i)^{|\alpha|} \int \mathcal{F}(f) m_\alpha \overline{\mathcal{F} \varphi} d\lambda^n.$$

Gilt zudem  $\mathcal{F} f \in L^{2,k}(\mathbb{R}^n)$ , so folgt  $m_\alpha \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  für  $|\alpha| \leq k$  und mit Satz 3.3.2

$$\int f \overline{D^\alpha \varphi} d\lambda^n = (-1)^{|\alpha|} \int i^{|\alpha|} \mathcal{F}^{-1}(m_\alpha \mathcal{F} f) \overline{\varphi} d\lambda^n,$$

womit für  $f \in L^2$  mit  $\mathcal{F} f \in L^{2,k}$  und  $|\alpha| \leq k$  die Funktion  $i^{|\alpha|} \mathcal{F}^{-1}(m_\alpha \mathcal{F} f)$  die schwache Ableitung von  $f$  ist. Nach Lemma 6.4.2 ist die Bedingung  $\mathcal{F} f \in L^{2,k}$  für alle  $f \in W^{k,2}$  erfüllt.

Nach Lemma 6.4.2 sind die Teilräume  $W^{k,2}$  und  $H^k$  gleich. Wegen (6.25), (6.27) folgt die Äquivalenz der Normen  $\|\cdot\|_{k,2}$  und  $\|\cdot\|_{H^k}$  aus (6.28).  $\square$



# Kapitel 7

## Fixpunktsätze

Man kann offensichtlich für  $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jede Gleichung  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  in eine Fixpunktgleichung  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  umschreiben. Zur konkreten Lösung der Gleichung ist das in den meisten Fällen kein zielführender Ansatz, in gewissen Fällen kann man aber auf die Existenz einer Lösung schließen, wenn  $f$  etwa eine stetige Selbstabbildung eines Raumes  $X$  ist, der aufgrund gewisser metrischer oder topologischer Eigenschaften ein **Fixpunktraum** ist, das ist ein topologischer Raum in dem jede stetige Selbstabbildung einen Fixpunkt hat. Hinreichende Bedingungen dafür, dass ein Raum ein Fixpunktraum ist sind mit den folgenden Fixpunktsätzen relativ leicht zu überprüfen.

### 7.1 Fixpunktsatz von Banach

Ein einfacher wiewohl sehr wirkungsvoller Fixpunktsatz ist

**Satz 7.1.1** (Fixpunktsatz von Banach). *Ist  $T$  eine Kontraktion eines vollständigen metrischen Raumes  $(X, d)$  (d.h. eine Abbildung die für ein  $\kappa < 1$   $d(T(x), T(y)) \leq \kappa d(x, y)$  für alle  $x, y \in X$  erfüllt), so hat  $T$  genau einen Fixpunkt in  $X$ .*

**Beweis:** Im Gegensatz zu den folgenden Fixpunktsätzen lässt sich für den Banachschen Fixpunktsatz ein konstruktiver Beweis finden: Wir zeigen, dass die Folge  $(T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  für alle Startwerte  $x_0$  gegen ein und denselben Fixpunkt konvergiert.

Für  $x_0 \in X$  folgt aus der Kontraktionseigenschaft mit Induktion

$$d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) \leq \kappa^n d(Tx_0, x_0).$$

Für  $n > m$  erhalten wir mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(T^n x_0, T^m x_0) &\leq \sum_{i=1}^{n-m} d(T^{m+i} x_0, T^{m+i-1} x_0) \leq d(T x_0, x_0) \sum_{i=m}^{n-1} \kappa^i \\ &= d(T x_0, x_0) \kappa^m \frac{1 - \kappa^{n-m}}{1 - \kappa} \leq \frac{d(T x_0, x_0)}{1 - \kappa} \kappa^m. \end{aligned}$$

Wegen  $\kappa < 1$  ist  $(T^n x_0)$  also eine Cauchyfolge, die wegen der Vollständigkeit des Raumes gegen ein  $x_F$  konvergiert.  $T$  ist als Kontraktion auch stetig, damit gilt

$$T x_F = \lim_{n \rightarrow \infty} T T^n x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0 = x_F.$$

$x_F$  ist also ein Fixpunkt. Ist auch  $y_F$  ein Fixpunkt, so folgt wegen

$$d(x_F, y_F) = d(T x_F, T y_F) \leq \kappa d(x_F, y_F)$$

$x_F = y_F$ , also die Eindeutigkeit des Fixpunktes. □

## 7.2 Fixpunktsatz von Brouwer

Ein wesentlicher Schritt in diesem Beweis des folgenden Fixpunktsatzes von Brouwer ist die Überlegung, dass es ausreicht diesen für stetig differenzierbare Selbstabbildungen der abgeschlossenen Einheitskugel  $\bar{B}$  des  $\mathbb{R}^n$  zu zeigen. Hier verstehen wir unter einer stetig differenzierbaren Abbildung  $f$  auf  $\bar{B}$  eine auf  $\bar{B}$  stetige Abbildung, die im Inneren  $B$  stetig differenzierbar ist und deren Differential  $df$  stetig auf  $\partial B$  fortgesetzt werden kann.

**Proposition 7.2.1.** *Hat jede stetig differenzierbare Abbildung von  $\bar{B}$  in sich einen Fixpunkt, so hat jede stetige Abbildung von  $\bar{B}$  in sich einen Fixpunkt.*

**Beweis:** Sei  $f$  eine stetige Selbstabbildung von  $\bar{B}$ .  $f$  kann gleichmäßig durch eine Folge  $f_n$  stetig differenzierbarer Abbildungen approximiert werden (etwa durch polynomiale Abbildungen nach dem Satz von Stone Weierstraß vgl. Beispiel 1.5.5). Wegen  $\max\{|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in \bar{B}\} \leq 1$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max |f_n| = \max |f| \leq 1$ . Damit konvergieren auch die Abbildungen  $\mathbf{x} \rightarrow (\max(1, |f_n(\mathbf{x})|))^{-1} f_n(\mathbf{x})$  gleichmäßig gegen  $f$  und sind Selbstabbildungen von  $\bar{B}$ , wir dürfen also o.B.d.A. annehmen, dass  $f_n$  in  $\bar{B}$  abbildet.

Nach Voraussetzung hat dann jede Abbildung  $f_n$  mindestens einen Fixpunkt  $\mathbf{x}_n$  in  $\bar{B}$ . Da  $\bar{B}$  kompakt ist hat die Folge  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach Satz 1.4.12 eine konvergente Teilfolge, wir dürfen also nach Übergang zu dieser Teilfolge annehmen, dass  $\mathbf{x}_n$  gegen  $\mathbf{x}_0 \in \bar{B}$  konvergiert. Es folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0| \leq |f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_n)| + |f(\mathbf{x}_n) - f_n(\mathbf{x}_n)| + |f_n(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_n| + |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|.$$

Da die rechte Seite für hinreichend große  $n$  beliebig klein wird folgt, dass  $\mathbf{x}_0$  ein Fixpunkt von  $f$  ist.  $\square$

Eine Teilmenge  $A$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt **Retrakt**, wenn es eine stetige Abbildung (**Retraktion**)  $R$  von  $X$  auf  $A$  mit  $R|_A = \text{Id}$  gibt.

**Satz 7.2.2.** *Es gibt keine stetig differenzierbare Retraktion von  $\bar{B}$  auf  $\partial B$ .*

**Beweis:** Sei  $R$  eine stetig differenzierbare Retraktion von  $\bar{B}$  auf  $\partial B$  und

$$R_t := (1 - t)\text{Id} + tR.$$

Da  $R$  nach Voraussetzung stetig differenzierbar ist und die Ableitung stetig auf  $\bar{B}$  fortgesetzt werden kann, gibt es  $M$  mit  $\|dR\| \leq M$ . Es folgt

$$|R(\mathbf{x}) - R(\mathbf{y})| = \left| \int_0^1 dR(\mathbf{y} + s(\mathbf{x} - \mathbf{y}))(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds \right| \leq M|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

und damit

$$|R_t(\mathbf{x}) - R_t(\mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})| = t|R(\mathbf{x}) - R(\mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq t(1 + M)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (7.1)$$

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|R_t(\mathbf{x}) - R_t(\mathbf{y})| \geq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - t(1 + M)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

und damit die Injektivität von  $R_t$  für  $t < 1/(1 + M)$ .

Für die Surjektivität von  $R_t$  haben wir für  $\mathbf{z} \in \bar{B}$  ein  $\mathbf{x} \in \bar{B}$  mit  $R_t(-\mathbf{x}) = \mathbf{z}$  zu finden. Diese Gleichung kann, wenn wir  $R$  außerhalb von  $B$  durch  $R(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  stetig fortsetzen, durch

$$F_{t,\mathbf{z}}(\mathbf{x}) := R_t(-\mathbf{x}) - \mathbf{z} + \mathbf{x} = t\mathbf{x} + tR(-\mathbf{x}) - \mathbf{z}$$

als Fixpunktgleichung  $F_{t,\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  auf  $\mathbb{R}^n$  geschrieben werden. Die Abbildung  $s \mapsto R_t(\mathbf{y} + s(\mathbf{x} - \mathbf{y}))$  ist dann für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  stetig und stückweise stetig differenzierbar. Wegen  $|R(\mathbf{z})| = 1$  gilt  $M \geq 1 = \|\text{Id}\|$  und wegen  $\|dR\| = 1$  in  $B^\circ$  folgt, dass (7.1) für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t < 1/(1 + M)$  gültig ist.

Aus (7.1) folgt  $|F_{t,\mathbf{z}}(\mathbf{x}) - F_{t,\mathbf{z}}(\mathbf{y})| \leq t(1 + M)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  also ist die Abbildung  $F_{t,\mathbf{z}}$  für  $t < 1/(1 + M)$  eine Kontraktion auf  $\mathbb{R}^n$ , hat also nach dem Fixpunktsatz von Banach einen Fixpunkt  $\mathbf{x}$ , der dann eine Lösung der Gleichung  $R_t(-\mathbf{x}) = \mathbf{z}$  ist. Da  $R_t$  außerhalb von  $B$  die Identität ist, kann  $\mathbf{x}$  für  $\mathbf{z} \in \bar{B}$  nur in  $\bar{B}$  liegen.  $R_t$  ist somit für  $t < 1/(1 + M)$  auch surjektiv als Selbstabbildung von  $\bar{B}$ .

Da  $dR_t(\mathbf{x})$  für  $t < (1 + M)^{-1}$  für alle  $\mathbf{x} \in B$  regulär ist, haben wir gezeigt, dass für kleine  $t$  die Abbildungen  $R_t(\mathbf{x})$  Diffeomorphismen von  $B$  auf sich sind. Damit

folgt aus der Transformationsformel Satz 4.3.1 und  $\det R_0(\mathbf{x}) = \det \text{Id} = 1 > 0$  für hinreichend kleine  $t$ :

$$\int_B d\lambda^n(\mathbf{x}) = \int_B |\det(dR_t(\mathbf{x}))| d\lambda^n(\mathbf{x}) = \int_B \det(dR_t(\mathbf{x})) d\lambda^n(\mathbf{x}). \quad (7.2)$$

Als Funktion von  $t$  ist das linke Integral konstant dem Volumen der Einheitskugel  $\omega_n > 0$  und wegen

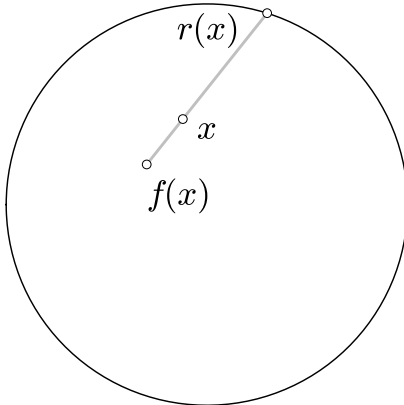
$$dR_t(\mathbf{x}) = (1-t)\text{Id} + tdR(\mathbf{x})$$

das rechte Integral ein Polynom in  $t$  auf  $[0, 1]$ , das demnach für kleine Werte von  $t$  konstant ist. Damit muss dieses Polynom auf  $[0, 1]$  konstant  $\omega_n$  sein und für kein  $t \in [0, 1]$  kann das Differential  $dR_t(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in B$  singulär sein. Für  $t = 1$  gilt aber  $R_1 = R$ . Ist  $dR_1(\mathbf{x}) = dR(\mathbf{x})$  in einem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in B$  regulär, würde nach dem Umkehrsatz 8.1.3 eine Umgebung des Punktes  $\mathbf{x}_0$  diffeomorph auf eine Umgebung von  $R(\mathbf{x}_0)$  abbilden. Wegen  $R(B) \subseteq \partial B$  ist dies aber unmöglich. Also gilt  $\det dR_1(\mathbf{x}) = 0$  für alle  $\mathbf{x} \in B$ . Dies widerspricht aber  $\int_B \det dR_0(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x}) = \omega_n$  und  $\int_B \det dR_t(\mathbf{x}) d\lambda^n(\mathbf{x})$  konstant auf  $[0, 1]$ .  $\square$

**Proposition 7.2.3.** *Es gibt keine fixpunktfreie stetig differenzierbare Abbildung von  $\bar{B}$  in sich.*

*Beweis.* Die Abbildung  $\mathbf{x} \mapsto r(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x} - f(\mathbf{x}))$  mit

$$\lambda = \frac{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) + \sqrt{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) - \mathbf{x})^2 + (1 - |\mathbf{x}|^2)|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})|^2}}{|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})|^2}$$



ist für fixpunktfreie stetig differenzierbare Funktionen  $f$  wohldefiniert und stetig differenzierbar. Für  $|\mathbf{x}| = 1$  folgt wegen

$$(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) < 0$$

$$\lambda = \frac{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) + |(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) - \mathbf{x})|}{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) - \mathbf{x})^2} = 0,$$

also gilt  $r|_{\partial B} = \text{Id}$ . Da  $\lambda$  genau die positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$|\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x} - f(\mathbf{x}))|^2 = 1$$

ist, wäre  $r$  eine stetig differenzierbare Retraktion von  $\bar{B}$  auf  $\partial B$  was nach Satz 7.2.2 unmöglich ist.  $\square$

**Satz 7.2.4** (Fixpunktsatz von Brouwer). *Jede stetige Abbildung der abgeschlossenen Einheitskugel des  $\mathbb{R}^n$  in sich hat einen Fixpunkt.*

**Beweis:** Folgt unmittelbar aus Proposition 7.2.3 und 7.2.1.  $\square$

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir Satz 7.2.2 ohne Differenzierbarkeitsforderung:

**Satz 7.2.5** (Retraktionssatz). *Es gibt keine Retraktion von  $\bar{B}$  auf  $\partial\bar{B}$ .*

**Beweis:** Für eine Retraktion  $r$  ist die Abbildung  $\mathbf{x} \rightarrow -r(\mathbf{x})$  eine fixpunktfreie stetige Selbstabbildung von  $\bar{B}$  in sich im Widerspruch zum Fixpunktsatz von Brouwer.  $\square$

Dieser Fixpunktsatz gilt im Allgemeinen nicht für beliebige kompakte Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , wie etwa das Beispiel einer Drehung des eindimensionalen Torus  $\mathbb{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  zeigt. Zugleich ist die Eigenschaft einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ein **Fixpunkttraum** zu sein (d.h. dass jede stetige Abbildung dieser Menge in sich einen Fixpunkt besitzt) invariant unter Homöomorphismen  $\phi$ , da für eine stetige fixpunktfreie Selbstabbildung  $f$  auf der einen Menge  $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$  eine fixpunktfreie Abbildung auf ihrem Bild unter dem Homöomorphismus  $\phi$  ist. Das folgende Lemma gibt nun ein einfaches hinreichendes Kriterium dafür, dass eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel ist:

**Lemma 7.2.6.** *Eine kompakte konvexe Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  mit nichtleerem Inneren ist homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel  $\bar{B}$  des  $\mathbb{R}^n$ .*

**Beweis:** Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass 0 im Inneren von  $\Omega$  liegt, da Translationen Homöomorphismen sind.

Ist 0 innerer Punkt von  $\Omega$ , so gibt es ein  $r > 0$  mit  $B(\mathbf{0}, r) \subseteq \Omega$ , wodurch das Minkowskifunktional  $p(\mathbf{x}) := \inf \{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \frac{1}{\lambda} \mathbf{x} \in \Omega\}$  wohldefiniert ist. Damit gilt  $\frac{1}{\lambda} \mathbf{x} \in \Omega$  für  $\lambda > \frac{|\mathbf{x}|}{r}$  und die Menge  $\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \frac{1}{\lambda} \mathbf{x} \in \Omega\}$  ist nichtleer und  $p(\mathbf{x}) \leq |\mathbf{x}|/r$ . Da  $\Omega$  beschränkt ist, gibt es ein  $R > 0$  mit  $\Omega \subseteq B_R$ . Es folgt  $\frac{1}{\lambda} \mathbf{x} \notin \Omega$  für  $0 < \lambda < |\mathbf{x}|/R$ , also

$$\frac{|\mathbf{x}|}{R} \leq p(\mathbf{x}) \leq \frac{|\mathbf{x}|}{r}. \quad (7.3)$$

Weiters gilt  $\frac{1}{p(\mathbf{x})} \mathbf{x} \in \Omega$  für  $\mathbf{x} \neq 0$  da  $\Omega$  abgeschlossen ist.

Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt  $p(\mathbf{x}), p(\mathbf{y}) \neq 0$  und es ist

$$\frac{1}{p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})} \frac{1}{p(\mathbf{x})} \mathbf{x} + \frac{p(\mathbf{y})}{p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})} \frac{1}{p(\mathbf{y})} \mathbf{y}$$

als Konvexkombination der Elemente  $\frac{1}{p(\mathbf{x})} \mathbf{x}$  und  $\frac{1}{p(\mathbf{y})} \mathbf{y}$  aus  $\Omega$  wegen der Konvexität von  $\Omega$  selbst in  $\Omega$ , also gilt  $p(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})$ .

Mit  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$  folgt  $p(\mathbf{z}) - p(\mathbf{y}) \leq p(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  und damit

$$|p(\mathbf{z}) - p(\mathbf{y})| \leq \max(p(\mathbf{z} - \mathbf{y}), p(\mathbf{y} - \mathbf{z})) \quad \forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Mit (7.3) folgt  $|p(\mathbf{z}) - p(\mathbf{y})| \leq |\mathbf{z} - \mathbf{y}|/r$  und wir sehen, dass das Minkowskifunktional stetig ist.

Wir definieren die Abbildung  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  durch  $T(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x}$  für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  und  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Aus der Definition des Minkowskifunktionals folgt  $p(\lambda \mathbf{x}) = \lambda p(\mathbf{x})$  für  $\mathbf{x} \in X$  und  $\lambda \geq 0$ . Damit sieht man, dass  $T$  bijektiv von  $\Omega$  auf  $\bar{B}_1$  ist und  $T(\Omega) = B_1$ , da  $\Omega = \{\mathbf{x} : p(\mathbf{x}) \leq 1\}$ .

$T$  ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen zunächst in  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  und wegen  $p(\mathbf{x}) \leq |\mathbf{x}|/r$  auch in  $\mathbf{0}$  stetig. Analog sieht man mit (7.3) die Stetigkeit von  $T^{-1}$ ,  $T^{-1}\mathbf{y} = \frac{|\mathbf{y}|}{p(\mathbf{y})} \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ ,  $T^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .  $T$  ist also der gesuchte Homöomorphismus von  $\Omega$  auf  $B_1$ .  $\square$

**Satz 7.2.7** (Fixpunktsatz von Brouwer). *Jede kompakte konvexe Menge  $K$  des  $\mathbb{R}^n$  ist ein Fixpunktraum, d.h. jede stetige Abbildung dieser Menge in sich hat einen Fixpunkt.*

**Beweis:** Sei  $\mathbf{x}_0 \in K$  und  $r$  die Dimension des von den Elementen  $\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 : \mathbf{x} \in K\}$  aufgespannten Raumes. Also  $K \subset \mathbf{x}_0 + \text{Span}(\{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0 : i = 1, \dots, r\})$  für geeignete  $\mathbf{x}_i \in K$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Sei  $\mathbf{z} := \frac{1}{2}\mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^r \frac{1}{2r} \mathbf{x}_i$ . Für  $|s_i| \leq \frac{1}{2r}$ ,  $1 \leq i \leq r$  ist dann

$$\mathbf{z} + \sum_{i=1}^r s_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \left( \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^r s_i \right) \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^r \left( \frac{1}{2r} + s_i \right) \mathbf{x}_i$$

eine Konvexkombination von Punkten in  $K$ . Somit liegt die  $r$ -dimensionale Kugel um  $\mathbf{z}$  mit Radius  $1/2r$  bezüglich der von den Basisvektoren  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$  induzierten Maximumsnorm in  $K$ .

$K$  ist also eine Teilmenge des affinen Unterraumes  $\mathbf{x}_0 + \text{Span}(\{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0 : i = 1, \dots, r\})$  in dem sie nichtleeres Inneres hat.

Nach Lemma 7.2.6 gibt es einen Homöomorphismus  $T$  der kompakten Menge  $K$  auf die abgeschlossene Einheitskugel des  $\mathbb{R}^q$ ,  $q \leq n$ . Ist  $f$  eine stetige Abbildung von  $K$  in sich, so ist  $g := TfT^{-1}$  eine stetige Abbildung der abgeschlossenen Einheitskugel des  $\mathbb{R}^q$  in sich, die nach Satz 7.2.4 einen Fixpunkt  $\mathbf{z}$  hat.  $T^{-1}\mathbf{z}$  ist dann ein Fixpunkt von  $f$ .  $\square$

Als Anwendung des Fixpunktsatzes von Brouwer zeigen wir, dass für eine Abbildung die nahe an der Identität ist auch die Bildmenge ähnlich der Identität ist:

**Satz 7.2.8.** *Sei  $f$  eine stetige Abbildung von der  $n$ -dimensionalen abgeschlossenen Einheitskugel  $\bar{B}$  nach  $\mathbb{R}^n$ , die  $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| < \varepsilon$  für alle  $\mathbf{x} \in \bar{B}$  erfüllt. Dann gilt  $B(\mathbf{0}, 1 - \varepsilon) \subseteq f(\bar{B})$ .*

*Beweis.* Angenommen  $\mathbf{a} \in \bar{B} \setminus f(\bar{B})$ . Wir haben zu zeigen, dass  $|\mathbf{a}| > 1 - \varepsilon$  gilt.

Wir definieren eine Abbildung  $F$  von  $\bar{B}$  nach  $\partial B$  durch

$$F(\mathbf{x}) := \frac{1}{|\mathbf{a} - f(\mathbf{x})|}(\mathbf{a} - f(\mathbf{x})). \quad (7.4)$$

$F$  ist auf  $\bar{B}$  wegen  $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{a}$  als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig und hat damit nach dem Fixpunktsatz von Brouwer 7.2.4 einen Fixpunkt  $\mathbf{z}$ , für den da  $F$  auf  $\partial B$  abbildet  $|\mathbf{z}| = 1$  gilt. Aus  $\mathbf{z} = F(\mathbf{z})$  folgt mit (7.4)

$$|\mathbf{a} - f(\mathbf{z})|\mathbf{z} = \mathbf{a} - f(\mathbf{z}). \quad (7.5)$$

Geometrisch bedeutet diese Gleichung, dass  $\mathbf{z}$  und  $f(\mathbf{z})$  durch die zu  $\mathbf{z}$  orthogonale Hyperebene  $H$  durch  $\mathbf{a}$  getrennt werden. Also ist der Abstand von  $\mathbf{a}$  zu  $\partial B$  kleiner als  $|f(\mathbf{z}) - \mathbf{z}| < \varepsilon$ .

Analytisch erhalten wir durch Multiplikation von (7.5) mit  $\mathbf{z}$ :

$$|\mathbf{a} - f(\mathbf{z})| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{z} - f(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \geq 0$$

und nach Voraussetzung

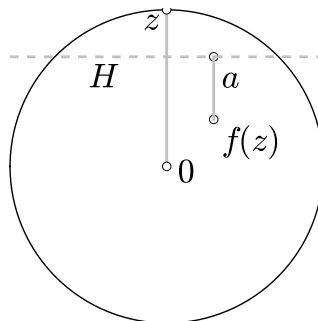
$$|\mathbf{a}| \geq \mathbf{a} \cdot \mathbf{z} \geq f(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{z} + f(\mathbf{z}) - \mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \geq 1 - |f(\mathbf{z}) - \mathbf{z}| > 1 - \varepsilon. \quad \blacksquare$$

## 7.3 Jordan'scher Kurvensatz

Unter einer **Jordankurve**  $\Gamma$  verstehen wir eine sich nicht überschneidende **Kurve** in  $\mathbb{R}^2$ , d.h. das Bild eines stetigen injektiven Weges. Eine **geschlossene Jordankurve** ist das Bild  $\Gamma$  eines stetigen Weges  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  der auf  $[a, b)$  injektiv mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$  ist.

Da das stetige Bild kompakter Mengen kompakt und damit abgeschlossen ist, ist das Komplement des Bildes  $\Gamma$  des Weges  $\gamma$  offen und in  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  sind also nach Satz 1.8.7 die Begriffe zusammenhängend und wegzusammenhängend äquivalent. Im Folgenden dürfen wir also, wenn wir von Zusammenhangskomponenten sprechen immer die Wegzusammenhangskomponente untersuchen.

Der folgende Satz ist intuitiv vollkommen klar, es gibt aber keinen kurzen elementaren Beweis. Insbesondere in Anbetracht der Tatsache dass es auch Kurven gibt die unserer Intuition vollkommen widersprechen z.B. Peano oder Hilbert-Kurven, die das Quadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$  ausfüllen scheint ein Beweis vonnöten. Der hier gegebene Beweis unter Verwendung des Brouwer'sche Fixpunktsatzes sowie des Retraktionssatzes ist der wahrscheinlich kürzeste.



**Satz 7.3.1** (Jordan'scher Kurvensatz). *Für eine geschlossene Jordankurve  $\Gamma$  hat  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  genau zwei Zusammenhangskomponenten, die beide  $\Gamma$  als Rand haben, und von denen genau eine beschränkt ist. (D.h. eine Jordankurve zerlegt den  $\mathbb{R}^2$  in zwei disjunkte Gebiete, das beschränkte "Innere" und das unbeschränkte "Äußere".)*

Der Beweis folgt aus Lemma 7.3.3 und 7.3.4. Zuvor zeigen wir einen Hilfssatz der ebenfalls anschaulich völlig klar aber auch nicht so kurz und elementar zu beweisen ist wie man das erwarten würde:

**Lemma 7.3.2.** *Es sei  $R$  ein Rechteck im  $\mathbb{R}^2$ . Sind  $u, v: [-1, 1] \rightarrow R$  zwei Wege in  $R$  die jeweils zwei gegenüberliegende Seitenmittelpunkte verbinden. Dann gibt es  $(r, s) \in [-1, 1]^2$  mit  $u(r) = v(s)$ .*

**Beweis:** Wir führen die Annahme der Existenz zweier solcher Wege ohne Schnittpunkt zu einem Widerspruch.

Sei o.B.d.A.  $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ,  $u(\pm 1) = (\pm 1, 0)$ ,  $v(\pm 1) = (0, \pm 1)$ . Dann gilt, wenn  $\pi_i$  die Projektionen auf die  $i$ -te Koordinate bezeichnen:

$$\begin{aligned}\pi_1(u(\pm 1) - v(-t)) &\geq(\leq) 0 \\ \pi_2(u(s) - v(\pm 1)) &\leq(\geq) 0.\end{aligned}\tag{7.6}$$

Unter der Annahme dass  $u(s) \neq v(t)$  für alle  $s, t \in [-1, 1]$  gilt, ist die Abbildung

$$\phi: R \rightarrow \partial R, (x, y) \mapsto \frac{1}{\max(|\pi_1(u(-x) - v(y))|, |\pi_2(u(-x) - v(y))|)}(u(-x) - v(y))$$

wohldefiniert und stetig. Wegen (7.6) hat  $\phi$  auf  $\partial K$  keinen Fixpunkt, und da  $\phi$  in  $\partial K$  abbildet keinen Fixpunkt als Abbildung  $K \rightarrow K$ , ein Widerspruch zum Fixpunktsatz von Brouwer 7.2.7.  $\square$

**Lemma 7.3.3.** *Für eine geschlossene Jordankurve  $J$  in  $\mathbb{R}^2$  gibt es genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^2 \setminus J$ . Hat  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  mindestens eine beschränkte Zusammenhangskomponente, so hat jede Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  Rand  $J$ .*

**Beweis:**  $J$  ist als stetiges Bild der kompakten Menge  $S$  kompakt und damit beschränkt. Also gibt es ein  $\kappa > 0$  mit  $B(\mathbf{0}, \kappa)^{\mathbb{C}} \cap J = \emptyset$ . Die Menge  $B(\mathbf{0}, \kappa)^{\mathbb{C}}$  ist aber wegzusammenhängend und damit zusammenhängend. Die Zusammenhangskomponente in der sie liegt ist offensichtlich die einzige unbeschränkte.

Sei  $Z$  eine Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  und  $Z_0 = Z$  für  $Z$  beschränkt bzw.  $Z_0 = \bar{Z}^{\mathbb{C}}$  wenn  $Z$  die unbeschränkte Komponente ist.



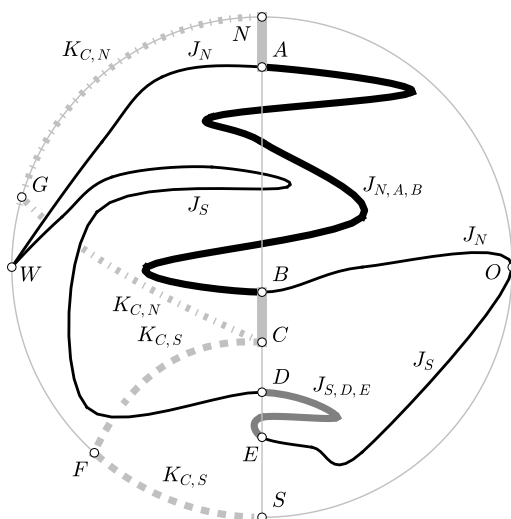
Da  $J$  das stetige injektive Bild der kompakten Menge  $S^1$  ist, ist  $J$  nach Satz 1.4.6 homöomorph zu  $S^1$  (Einssphäre, d.h. Kreis). Ist  $\partial Z_0$  eine echte Teilmenge von  $J$ , so ist  $\partial Z_0$  homöomorph zu einer echten Teilmenge von  $S^1$  und damit homöomorph zu einer Teilmenge des Intervalls  $[0, 1]$ , d.h. es gibt einen Homöomorphismus  $\phi: \partial Z_0 \rightarrow \phi(\partial Z_0) \subseteq [0, 1]$ . Nach dem Fortsetzungssatz von Tietze 1.6.3 kann dann aber  $\phi$  von  $\partial Z_0$  zu einer stetigen Funktion  $g$  auf  $\bar{Z}_0$  mit Werten in  $[0, 1]$  fortgesetzt werden.  $h := \phi^{-1} \circ g$  ist dann eine stetige Funktion auf  $\bar{Z}_0$  mit Werten in  $J$ . Definieren wir  $h$  als die Identität außerhalb von  $\bar{Z}_0$ , so ist  $h$  in  $\mathbb{R}^2$  stetig mit Werten in  $Z_0^c$ .

Sei  $\mathbf{p} \in Z_0$  und  $\rho$  so, dass  $J \subset B(\mathbf{p}, \rho)$  gilt. Dann ist die Abbildung  $\zeta: \mathbf{x} \mapsto \frac{\rho}{|\mathbf{x}-\mathbf{p}|}(\mathbf{x}-\mathbf{p})$  stetig auf  $B(\mathbf{p}, \rho) \setminus Z_0$  und die Zusammensetzung  $\zeta \circ h$  ist eine Retraktion von  $\overline{B(\mathbf{p}, \rho)}$  auf  $\partial B(\mathbf{p}, \rho)$  im Widerspruch zum Retraktionssatz 7.2.5.  $\blacksquare$

**Lemma 7.3.4.** *Für eine geschlossene Jordankurve  $J$  hat  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  genau eine beschränkte Zusammenhangskomponente.*

**Beweis:** Seien  $N := (0, 1)$ ,  $S := (0, -1)$ ,  $O := (-1, 0)$ ,  $W := (0, 1)$  und sei  $J$  o.B.d.A. in  $B(\mathbf{0}, 1) \cup \{O, W\}$  mit  $\{O, W\} \subset J$ . Wir zerlegen  $J$  in zwei Jordankurven  $J_N, J_S$  mit Randpunkten  $O, W$ , d.h.  $J_N, J_S$  sind Jordankurven mit  $J = J_N \cup J_S$  und  $J_N \cap J_S = \{O, W\}$ .  $J_N$  und  $J_S$  haben nach Lemma 7.3.2 bzw. wegen der Stetigkeit der Projektion auf die erste Koordinate einen nichtleeren Schnitt mit der Strecke  $\overline{NS}$  die die Punkte  $N$  und  $S$  verbindet. Sei o.B.d.A. der Punkt  $A = (0, s_A)$  mit  $s_A = \max\{t : (0, t) \in J\}$  in  $J_N$  und  $B = (0, s_B)$  mit  $s_B = \min\{t : (0, t) \in J_N\}$  ( $A = B$  nicht ausgeschlossen). Sei  $J_{N,A,B}$  die Teilkurve von  $J_N$  mit Endpunkten  $A, B$ .

$\overline{NA}$  und  $J_S$  sind nach Definition von  $A$  disjunkt,  $J_{N,A,B}$  ist als Teilkurve von  $J_N$ , die  $O, W$  nicht enthält disjunkt zu  $J_S$ , also muss die Strecke  $\overline{BS}$  nach Lemma 7.3.2 nichtleeren Schnitt mit  $J_S$  haben, denn anderenfalls hätte die Kurve die aus der Vereinigung der Kurven  $\overline{NA}, J_{N,A,B}$  und  $\overline{BS}$  besteht leeren Schnitt mit  $J_S$ . Sei  $s_D = \max\{t : (0, t) \in J_S\}$ ,  $D = (0, s_D)$ ,  $s_E = \min\{t : (0, t) \in J_S\}$ ,  $E = (0, s_E)$  sowie  $C$  den Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BD}$ . Wäre dieser in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente, so gäbe es eine Kurve in  $J^c$ , die  $C$  mit einem Punkt des Randes des Einheitskreises verbindet. Hat dieser Punkt  $F$



negative 2. Koordinate, so vereinigt man diese Kurve mit einer Kurve die  $F$  auf dem Einheitskreis mit  $S$  verbindet und erhält eine Kurve  $K_{C,S}$ , so ist  $\overline{NA} \cup J_{N,A,B} \cup \overline{BC} \cup K_{C,S}$  eine Kurve die  $N$  mit  $S$  verbindet ohne  $J_S$  zu schneiden, in Widerspruch zu Lemma 7.3.2.  $C$  ist also ein Punkt in  $J^{\mathbb{C}}$ , der nicht in der unbeschränkten Komponente von  $J^{\mathbb{C}}$  liegt. Hat dieser Punkt  $G$  eine positive 2. Koordinate, so betrachte man die Kurve  $\overline{SE} \cup J_{S,D,E} \cup \overline{DC} \cup K_{C,N}$  und erhält eine Kurve die  $J_N$  nicht schneidet. In beiden Fällen liegt  $C$  nicht in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente und es gibt damit mindestens eine beschränkte Zusammenhangskomponente.

Sei  $Z$  eine Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^2 \setminus J$ . Gilt  $Z \cap B(\mathbf{0}, 1)^{\mathbb{C}} \neq \emptyset$ , hat also  $Z$  mit der unbeschränkten Komponente nichtleeren Schnitt und  $Z$  ist gleich der unbeschränkten Komponente. Anderenfalls liegt  $Z$  ganz in  $B(\mathbf{0}, 1)$ . Nach Lemma 7.3.3 gilt  $\partial Z = J$ . Damit hat  $Z$  nichtleeren Schnitt mit  $B(\mathbf{p}, \delta) \cap B(\mathbf{0}, 1)$  für jedes  $\mathbf{p} \in J$ . Sei  $\delta > 0$  so gewählt, dass  $(B(O, \delta) \cup B(W, \delta)) \cap (J_{N,A,B} \cup J_{S,D,E}) = \emptyset$  gilt. Seien  $O_Z \in (Z \cap B(O, \delta) \cap B(\mathbf{0}, 1))$ ,  $W_Z \in (Z \cap B(W, \delta) \cap B(\mathbf{0}, 1))$  dann gibt es eine in  $Z$  verlaufende Kurve  $K_Z$ , die  $O_Z$  mit  $W_Z$  verbindet.  $\overline{OO_Z} \cup K_Z \cup \overline{WW_Z}$  ist dann eine Kurve die  $O$  mit  $W$  verbindet. Hat diese nichtleeren Schnitt mit  $B(\mathbf{0}, 1)^{\mathbb{C}}$ , so enthält  $Z$  Punkte aus der unbeschränkten Komponente und stimmt damit mit dieser überein. Verläuft sie in  $B(\mathbf{0}, 1)$ , so schneidet sie nach Lemma 7.3.2 die Kurve  $\overline{NA} \cup J_{N,A,B} \cup \overline{BD} \cup J_{S,D,E} \cup \overline{ES}$  und damit schneidet  $K_Z$  die Kurve  $\overline{NA} \cup \overline{ES}$  oder  $\overline{BD}$ . In erstem Fall enthält  $Z$  Punkte aus der unbeschränkten Komponente und stimmt damit mit dieser überein. Schneidet  $K_Z$  die Kurve  $\overline{BD}$ , so stimmt sie mit der Komponente die  $C$  enthält überein. Es gibt also nur eine beschränkte Zusammenhangskomponente.  $\square$

## 7.4 Fixpunktsatz von Schauder

Der folgende Satz ist die Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes auf Banachräume:

**Satz 7.4.1** (Fixpunktsatz von Schauder). *Ist  $f$  eine stetige Abbildung einer kompakten konvexen Teilmenge  $K$  eines Banachraumes  $X$  in sich, so hat  $f$  einen Fixpunkt.*

**Beweis:** Für  $\varepsilon > 0$  gibt es eine endliche Überdeckung der kompakten Menge  $K$  durch  $\varepsilon$ -Kugeln um Punkte  $x_i \in K$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Es sei  $S(x_1, \dots, x_n)$  der von den Punkten  $x_1, \dots, x_n$  erzeugte Simplex, d.h.

$$S(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Wir definieren Funktionen  $\psi_i(x) := \max(0, \varepsilon - |x - x_i|)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Die Funktionen  $\phi_i := \frac{\psi_i}{\sum_{j=1}^n \psi_j}$  bilden dann eine dieser Überdeckung untergeordnete stetige Zerlegung der Eins auf  $K$ . Auf  $K$  definieren wir weiters die Funktion  $r_\varepsilon = r_{\varepsilon; x_1, \dots, x_n}$  durch

$$r_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)x_i.$$

$r_\varepsilon$  ist offensichtlich stetig mit Bild in  $S(x_1, \dots, x_n)$ .

Da  $(\phi_i)$  eine Zerlegung der Eins ist, folgt  $r_\varepsilon(x) - x = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)(x_i - x)$ . Für  $\|x_i - x\| > \varepsilon$  gilt  $\phi_i(x) = 0$ , da diese Zerlegung der Eins der Überdeckung durch  $\varepsilon$ -Kugeln um  $x_i$  untergeordnet ist und wir erhalten

$$\|r_\varepsilon(x) - x\| \leq \sum_{i=1}^n \phi_i(x)\|x - x_i\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \phi_i(x) = \varepsilon \quad (7.7)$$

Also konvergieren für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Abbildungen  $r_\varepsilon$  gleichmäßig auf  $K$  gegen  $\text{Id}_K$  und  $r_\varepsilon f$  gleichmäßig auf  $K$  gegen  $f$ .  $r_\varepsilon f$  bildet  $K$  in  $S(x_1, \dots, x_n) \subseteq K$  ab. Der Simplex  $S(x_1, \dots, x_n)$  ist aber homöomorph zu einem Simplex in  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  und damit hat  $r_\varepsilon f$  für jedes  $\varepsilon > 0$  nach Satz 7.2.7 einen Fixpunkt  $z_\varepsilon$  in  $S(x_1, \dots, x_n)$ .

Für eine Nullfolge  $\varepsilon_k$  gibt es nach Satz 1.4.12 eine gegen ein  $z_0 \in K$  konvergente Teilfolge  $(z_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$  von Fixpunkten der Abbildungen  $r_{\varepsilon_{k_i}} f$ . Wir nehmen o.B.d.A. an dass  $z_i$  gegen  $z_0$  konvergiert. Wir können jetzt ähnlich wie im Beweis von Proposition 7.2.1 argumentieren: Es gilt

$$\|f(z_0) - z_0\| \leq \|f(z_0) - f(z_i)\| + \|f(z_i) - r_{\varepsilon_i} f(z_i)\| + \|r_{\varepsilon_i} f(z_i) - z_i\| + \|z_i - z_0\|.$$

Auf der rechten Seite konvergiert der erste Summand wegen der Stetigkeit von  $f$  in  $z_0$  für  $i \rightarrow \infty$  gegen 0. Der zweite Summand kann wegen (7.7) durch  $\varepsilon_i$  abgeschätzt werden, der dritte verschwindet wegen der Definition von  $z_i$  als Fixpunkt von  $r_{\varepsilon_i} f$  und der letzte geht für  $i \rightarrow \infty$  gegen 0, da  $z_0$  genau der Grenzwert der Folge  $z_i$  ist. Die rechte Seite wird also beliebig klein und  $z_0$  muss ein Fixpunkt von  $f$  sein.  $\square$

**Korollar 7.4.2.** *Eine stetige Abbildung einer abgeschlossenen konvexen Teilmenge eines Banachraumes in sich mit relativ kompaktem Bild hat einen Fixpunkt.*

**Beweis:** Der Abschluss des Bildes der abgeschlossenen Menge  $A$  unter der stetigen Abbildung  $f : A \rightarrow A$  sei eine kompakte Teilmenge von  $A$ .

Die konvexe Hülle  $C$  einer totalbeschränkten Menge  $B$  ist totalbeschränkt, denn für  $\varepsilon > 0$  gibt es zunächst eine endliche Überdeckung  $(B_{\varepsilon/2}(x_1))_{1 \leq i \leq n}$  von

$B$ . Die konvexe Hülle  $\tilde{C}$  von  $\{x_1, \dots, x_n\}$  ist als abgeschlossene beschränkte Teilmenge eines endlichdimensionalen Teilraumes (der ja homöomorph zu  $\mathbb{C}^k$  ist) kompakt, also präkompakt. Sei  $B_{\varepsilon/2}(y_1), \dots, B_{\varepsilon/2}(y_m)$  eine Überdeckung von  $\tilde{C}$ .

Für eine Konvexkombination  $\sum \lambda_j z_j, z_j \in B$  folgt für  $\|z_j - x_{i(j)}\| \leq \varepsilon/2$

$$\sum \lambda_j z_j = \sum \lambda_j x_{i(j)} + \sum \lambda_j (z_j - x_{i(j)}) \in B_{\varepsilon/2}(y_l) + B_{\varepsilon/2}(0)$$

für ein  $l \leq m$ , also  $\sum \lambda_j z_j \in B_{\varepsilon}(y_l)$ . Somit ist die konvexe Hülle von  $B$  präkompakt.

Die abgeschlossene konvexe Hülle von  $f(A)$  ist also eine kompakte konvexe Menge und  $f$  bildet diese Menge in sich ab. Nach Satz 7.4.1 hat  $f$  in  $f(A)$  und wegen  $f(A) \subseteq A$  in  $A$  einen Fixpunkt.  $\square$

Es stellt sich die Frage, ob in einem Banachraum nicht anstelle der Kompaktheit neben der Konvexität schon die wesentlich schwächere Bedingung an  $A$  beschränkt und abgeschlossen zu sein ausreicht (im  $\mathbb{R}^n$  sind diese Bedingungen ja nach dem Satz von Heine–Borel äquivalent). Das folgende Beispiel von Kakutani gibt eine stetige Funktion auf einer nichtkompakten beschränkten abgeschlossenen konvexen Menge ohne Fixpunkt:

Wir betrachten die abgeschlossene Einheitskugel  $\overline{B_1}$  im Hilbertraum  $\ell^2(\mathbb{N})$  und in dieser die stetige Abbildung

$$T : \overline{B_1} \mapsto \overline{B_1}, \quad T((x_1, x_2, \dots)) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots)$$

mit  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , also  $\|x\| = (\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ .  $T$  bildet  $\overline{B_1}$  offensichtlich auf seinen Rand, also Punkte mit Norm eins ab. Für  $\|x\| = 1$  ist aber  $Tx = (0, x_1, x_2, \dots)$ , dort ist also  $T$  der Rechtsshift, der aber  $(0, 0, \dots)$  als einzigen Fixpunkt hat.

Als Anwendung beweisen wir

**Satz 7.4.3** (Existenzsatz von Peano). *Sei  $f : [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $|f| \leq M$ . Dann hat die Differentialgleichung*

$$y'(x) = f(x, y) \quad \text{mit der Anfangsbedingung } y(x_0) = y_0$$

in  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  mindestens eine Lösung für  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ .

**Beweis:** Die Menge  $A$  aller stetigen Funktionen  $u$  auf  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  mit Werten in  $[y_0 - b, y_0 + b]$  ist eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des Banachraumes  $X = C[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  (versehen mit der Maximumsnorm).

Wir betrachten die (nichtlineare) Abbildung

$$T : X \rightarrow X, \quad Tu(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt \quad |x| \leq \alpha :$$

Sie bildet  $A$  in sich ab. Das Bild  $T(A)$  ist eine Menge gleichmäßig beschränkter gleichgradig stetiger Funktionen. Nach dem Satz von Ascoli ist demnach  $T(A)$  präkompakt.  $T(A)$  ist also eine kompakte Teilmenge von  $A$ . Aus Korollar 7.4.2 folgt, dass  $T$  einen Fixpunkt  $y$  hat. Durch Ableiten der Fixpunktgleichung  $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$  nach  $x$  sieht man, dass  $y$  Lösung der Differentialgleichung ist.  $\square$

Als weitere Anwendung betrachten wir die (i.A. nichtlineare!) Integralgleichung von Urysohn: Im Allgemeinen hat die folgende Gleichung (7.8) keine Lösung. Für  $\lambda = b - a = 1$  und  $K(t, s, r) = 1 + r$  erhalten wir die Gleichung  $\varphi(t) = \int_a^{a+1} \varphi(s) ds$ , in der die rechte Seite von  $r$  unabhängig ist.  $\varphi$  müsste also konstant sein mit  $\varphi = 1 + \varphi$ . Wir zeigen, dass es für kleine  $\lambda$  immer eine Lösung gibt:

**Satz 7.4.4.** *Sei  $K$  eine stetige Abbildung von  $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$  nach  $[a, b]$ . Dann gibt es ein  $\lambda_0 > 0$ , sodass für  $\lambda \leq \lambda_0$  die Integralgleichung*

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s, \varphi(s)) ds \quad (7.8)$$

eine Lösung in  $C[a, b]$  hat.

**Beweis:** Sei  $\bar{B}_c := \{f \in C[a, b] : \|f\| \leq c\}$  und

$$T_\lambda \varphi(t) := \lambda \int_a^b K(t, s, \varphi(s)) ds$$

Die Abbildung  $T_\lambda$  ist für alle  $\lambda$  wegen der Stetigkeit von  $K$  stetig von  $C[a, b]$  in sich. Für  $f \in B_c$  gilt

$$\|T_\lambda f\| \leq \lambda(b-a) \max\{|K(t, s, r)| : (t, s, r) \in [a, b] \times [a, b] \times [-c, c]\} = \lambda L_c.$$

Für  $\lambda \leq c/L_c$  ist also  $T_\lambda$  eine Abbildung von  $\bar{B}_c$  in sich. Da  $K$  wegen Satz 1.4.13 auf dem Kompaktum  $[a, b] \times [a, b] \times [-c, c]$  gleichmäßig stetig in  $t$  ist gibt es ein  $\delta(\varepsilon)$  mit

$$|T_\lambda \varphi(t) - T_\lambda \varphi(\tilde{t})| = \lambda \left| \int_a^b K(t, s, \varphi(s)) - K(\tilde{t}, s, \varphi(s)) ds \right| \leq \lambda \varepsilon$$

für  $|t - \tilde{t}| < \delta(\varepsilon)$ , woraus folgt, dass  $M := \{T_\lambda \varphi : \varphi \in \bar{B}_c\}$  eine gleichgradig stetige Teilmenge von  $C[a, b]$  ist. Wegen dem Satz von Arzelà-Ascoli 1.5.1 folgt, dass  $M$  relativ kompakt in  $C[a, b]$  ist. Mit Korollar 7.4.2 folgt die Existenz einer Lösung für hinreichend kleine  $\lambda$ .  $\square$

## 7.5 Fixpunktsatz von Kakutani

Seien  $X, Y$  metrische Räume und  $f$  eine mehrdeutige Abbildung  $f : X \rightarrow 2^Y$  mit Graph  $G_f = \{(x, y) : y \in f(x)\} \subset X \times Y$ .  $f$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $G_f$  abgeschlossen ist, also wenn für Folgen  $(x_n)$  und  $(y_n)$  mit  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$  und  $y_n \in f(x_n) \forall n$  folgt  $y \in f(x)$ .

Eine mehrdeutige Abbildung  $f$  heißt **oberhalbstetig** in  $x$ , wenn es für jede offene Menge  $U \supset f(x)$  eine Umgebung  $V$  von  $x$  mit  $f(V) \subseteq U$  gibt (wobei  $f(V) = \cup_{x \in V} f(x)$ ).

**Lemma 7.5.1.** *Ist  $X$  ein metrischer und  $Y$  ein kompakter metrischer Raum, so ist jede abgeschlossene Abbildung  $X \rightarrow 2^Y$  oberhalbstetig.*

**Beweis:** Sei  $x \in X$  und  $U$  offen in  $Y$  mit  $f(x) \subseteq U$ . Angenommen es gäbe kein  $V \subseteq X$  mit  $f(V) \subseteq U$ . Dann gibt es, da  $X$  metrisch ist, Folgen  $(x_n)$  in  $X$  und  $(y_n)$  mit  $y_n \in f(x_n) \setminus U$ .  $Y$  ist metrisch und kompakt, also gibt es eine Teilfolge  $(y_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  die gegen ein  $y \in Y$  konvergiert. Da  $f$  abgeschlossen ist folgt aber  $y \in f(x)$ , was wegen  $y_{n_i} \in U^c$  und  $U$  offen mit  $y \in U$  ein Widerspruch ist.  $\square$

**Satz 7.5.2** (Fixpunktsatz von Kakutani). *Sei  $K$  eine kompakte konvexe Teilmenge eines Banachraumes  $X$ .  $f : K \rightarrow 2^K$  sei eine abgeschlossene mehrdeutige Abbildung für die  $f(x)$  für alle  $x \in K$  konvex und nichtleer ist. Dann gibt es  $x \in K$  mit  $x \in f(x)$  („ $x$  ist Fixpunkt von  $f$ “).*

**Beweis:** Für  $\varepsilon > 0$  gibt es eine endliche Überdeckung von  $K$  durch offene  $\varepsilon$ -Kugeln:  $K \subseteq \cup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(x_{\varepsilon,i}, \varepsilon)$ . Mit  $\varphi_{\varepsilon,i}(x) := \max(\varepsilon - \|x - x_{\varepsilon,i}\|, 0)$  ist  $\Phi_{\varepsilon,i}(x) := \varphi_{\varepsilon,i}(x) / \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,j}(x)$  eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Einheit.

Für  $i = 1, \dots, N_\varepsilon$  sei  $y_{\varepsilon,i} \in f(x_{\varepsilon,i})$ . Die Funktion

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \Phi_{\varepsilon,i}(x) y_{\varepsilon,i} \quad (7.9)$$

ist eine eindeutige stetige Funktion, die  $K$  wegen der Konvexität von  $K$  in sich abbildet. Aufgrund des Fixpunktsatzes von Schauder 7.4.1 hat  $f_\varepsilon$  einen Fixpunkt  $z_\varepsilon$ . Da  $K$  kompakt ist können wir zu einer Nullfolge  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(\varepsilon_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$  finden, für die die Folge der Fixpunkte  $(z_{\varepsilon_{n_l}})$  gegen ein  $z \in K$  konvergiert.

Wir behaupten  $z$  ist ein Fixpunkt von  $f$ . Für  $\delta > 0$  sei

$$U_\delta := f(z) + B(0, \delta) = \{y \in K : \exists w \in f(z), \|y - w\| < \delta\}.$$

$U_\delta$  ist offen und konvex. Nach Lemma 7.5.1 gibt es ein  $\kappa > 0$  mit  $f(B(z, \kappa)) \subseteq U_\delta$ . Wir wählen ein  $\varepsilon < \kappa/2$  mit  $z_\varepsilon \in B(z, \kappa/2)$ . Für  $\Phi_{\varepsilon,i}(z_\varepsilon) > 0$  gilt  $\|x_{\varepsilon,i} - z_\varepsilon\| < \varepsilon < \kappa/2$  und

$$\|x_{\varepsilon,i} - z\| \leq \|x_{\varepsilon,i} - z_\varepsilon\| + \|z_\varepsilon - z\| < \kappa/2 + \kappa/2 = \kappa.$$

Also gilt  $x_{\varepsilon,i} \in B(z, \kappa)$  für alle  $i$  mit  $\Phi_{\varepsilon,i} > 0$ . Für diese  $i$  gilt  $y_{\varepsilon,i} \in f(x_{\varepsilon,i}) \subseteq f(B(z, \varepsilon)) \subseteq U_{\delta}$ . Da  $z_{\varepsilon}$  Fixpunkt von  $f_{\varepsilon}$  ist, gilt nach (7.9)

$$z_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} \Phi_{\varepsilon,i}(z_{\varepsilon}) y_{\varepsilon,i}.$$

$z_{\varepsilon}$  ist also eine Konvexkombination von Elementen  $y_{\varepsilon,i}$  aus  $U_{\delta}$  und damit in  $U_{\delta}$ . Es folgt  $z \in \overline{U_{\delta}} \subseteq U_{2\delta}$ . Da  $f$  abgeschlossen ist, ist  $f(z)$  abgeschlossen, also  $f(z) = \cap_{\delta} U_{\delta}$ . Damit gilt  $z \in f(z)$ .  $\square$

Wir verwenden diesen Fixpunktsatz um einen Satz der Spieltheorie zu beweisen: Es sei ein Spiel definiert bei dem der Gewinn des einen Spielers der Verlust des anderen ist. Der erste Spieler kann einen Parameter  $x \in X_0$  wählen, der zweite  $y \in Y_0$ . Die Gewinnfunktion  $K(x, y)$  gibt den Gewinn des ersten Spielers in Abhängigkeit der gewählten Parameter an. Bei vom ersten Spieler gewähltem Parameter  $x$  wird der zweite Spieler den Parameter  $y$  so wählen, dass der Gewinn des ersten Spielers (=Verlust des zweiten) minimiert wird. Deshalb wird der erste Spieler  $x$  so wählen, dass bei dieser Wahl von  $y$  sein Gewinn maximiert wird. Wählt also der erste Spieler zuerst seinen Parameter wird bei optimaler Strategie der Spieler  $\max_x \min_y K(x, y)$  die Gewinnfunktion sein. Wählt hingegen der zweite Spieler zuerst seinen Parameter, danach der erste, so ergibt sich als Gewinnfunktion  $\min_y \max_x K(x, y)$ . Wir sagen das Spiel hat eine Lösung  $(x_0, y_0)$ , wenn  $\max_x \min_y K(x, y) = \min_y \max_x K(x, y)$  gilt, wenn also der Ausgang des Spiels unabhängig davon ist welcher Spieler beginnt. Äquivalent dazu kann man von einer Lösung  $(x_0, y_0)$  des Spiels sprechen wenn bei diesen Parametern keiner der Spieler die Gewinnfunktion zu seinen Gunsten verändern kann wenn er annimmt dass der andere Spieler seine Wahl des Parameters beibehält.

Es gilt für alle  $x_0 \in X$   $\inf_y \sup_x K(x, y) \geq \inf_y K(x_0, y)$ , also

$$\inf_y \sup_x K(x, y) \geq \sup_x \inf_y K(x, y), \quad (7.10)$$

weshalb es im Allgemeinen von Bedeutung ist welcher Spieler beginnt.

**Satz 7.5.3.** *Seien  $X_0, Y_0$  kompakte konvexe Teilmengen der Banachräume  $X$  respektive  $Y$ . Eine Funktion  $K : X_0 \times Y_0 \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig auf  $X_0 \times Y_0$  sowie konkav im ersten Argument und konvex im zweiten Argument, d.h. für  $0 \leq \lambda \leq 1$  gilt*

$$\begin{aligned} K(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, y) &\geq \lambda K(x_1, y) + (1 - \lambda)K(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2 \in X_0, y \in Y_0 \\ K(x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) &\leq \lambda K(x, y_1) + (1 - \lambda)K(x, y_2) \quad \forall x \in X_0, y_1, y_2 \in Y_0. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\min_y \max_x K(x, y) = \max_x \min_y K(x, y).$$

Das heißt das Spiel  $(X_0, Y_0, K)$  hat eine Lösung.

*Beweis.* Für  $x \in X_0$  sei  $B_x := \{y \in Y_0 : K(x, y) = \min_z K(x, z)\}$ . Da  $K(x, \cdot)$  stetig auf der kompakten Menge  $Y_0$  ist folgt mit Satz 1.4.3, dass  $B_x$  nichtleer und kompakt ist. Für  $y_1, y_2 \in B_x$  und  $\lambda \in [0, 1]$  gilt  $\lambda y_1 + (1 - \lambda y_2) \in Y_0$  mit

$$K(x, \lambda y_1 + (1 - \lambda y_2)) \leq \lambda K(x, y_1) + (1 - \lambda) K(x, y_2) = \min_z K(x, z).$$

Also ist für alle  $x \in X_0$  die Menge  $B_x$  nichtleer konvex und kompakt. Analog ist für alle  $y \in Y_0$  die Menge  $A_y := \{x \in X_0 : K(x, y) = \max_w K(w, y)\}$  nichtleer konvex und kompakt.

Für  $(x, y) \in X_0 \times Y_0$  ist  $A_y \times B_x$  nichtleer konvex und kompakt, also auch abgeschlossen in  $X_0 \times Y_0$ . Die mehrdeutige Abbildung  $f$  auf  $X_0 \times Y_0 : f(x, y) := A_y \times B_x$  ist eine abgeschlossene Abbildung, denn für  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$  und  $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$  mit  $(u_n, v_n) \in f(x_n, y_n)$  folgt  $u_n \in A_{y_n}$ ,  $v_n \in B_{x_n}$  und damit

$$K(u_n, y_n) = \max_{w \in X_0} K(w, y_n)$$

$$K(x_n, v_n) = \min_{z \in Y_0} K(x_n, z)$$

und

$$K(u, y) = \lim_n K(u_n, y_n) = \lim_n \max_{w \in X_0} K(w, y_n) = \max_{w \in X_0} K(w, y).$$

Es folgt  $u \in A_y$  und völlig analog  $v \in B_x$ . Damit sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Kakutani erfüllt und wir sehen, dass es  $(x_0, y_0)$  mit  $(x_0, y_0) \in f(x_0, y_0)$  gibt, woraus

$$K(x_0, y_0) = \max_{x \in X_0} K(x, y_0) = \min_{y \in Y_0} K(x_0, y)$$

und

$$\min_{y \in Y_0} \max_{x \in X_0} K(x, y) \leq K(x, y) \leq \max_{x \in X_0} \min_{y \in Y_0} K(x, y)$$

folgt. Wegen (7.10) erhalten wir hieraus

$$\min_{y \in Y_0} \max_{x \in X_0} K(x, y) = \max_{x \in X_0} \min_{y \in Y_0} K(x, y). \quad \square$$



# Kapitel 8

## Anhang

### 8.1 Hauptsatz über implizite Funktionen

Ein lineares homogenes Gleichungssystem von  $q$  Gleichungen in  $r + q$  Unbekannten kann bekanntlich verwendet werden um  $q$  Unbekannte durch die verbleibenden  $r$  Unbekannten auszudrücken falls die entsprechende  $q \times q$  Untermatrix regulär ist, d.h. es gilt dann wenn das Gleichungssystem  $Ax + By = 0$  durch  $q \times r$  und  $q \times q$  Matrizen  $A, B$ , mit  $B$  regulär gegeben ist eine eindeutige (lineare) Lösungsfunktion nämlich  $y = B^{-1}Ax$ . Für nichtlineare Abbildungen ist dies im Allgemeinen klarerweise nicht möglich. Ist die Abbildung  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{p+q} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^q$  aber in einer Umgebung von  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  stetig differenzierbar, so ist sie in  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  von höherer als erster Ordnung durch  $d\mathbf{F}$  approximierbar und man kann hoffen, dass sich lokal um  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$   $\mathbf{u}$  vermöge  $\mathbf{F}$  darstellen lässt. Im Allgemeinen ist eine explizite Darstellung nicht möglich, im Folgenden zeigen wir aber die Existenz solcher Lösungsfunktionen. Wir zeigen die Aussage zunächst für den Fall  $q = 1$ :

**Satz 8.1.1.** Sei  $C^k(D) \ni F : D \rightarrow \mathbb{R}^{q+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \geq 1$  für eine offene Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}^{q+1} = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ . Für  $(\mathbf{x}_0, u_0) \in D$  gelte  $F(\mathbf{x}_0, u_0) = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}_0, u_0) \neq 0$ . Dann gibt es eine Umgebung  $V$  von  $\mathbf{x}_0$  sowie ein  $\alpha > 0$ , sodass es für  $\mathbf{x} \in V$  genau ein  $u \in (u_0 - \alpha, u_0 + \alpha)$  mit  $F(\mathbf{x}, u) = 0$  gibt.

Fasst man dieses  $u$  als eine Funktion  $g : V \rightarrow (u_0 - \alpha, u_0 + \alpha)$  auf, so ist  $g$  in  $V$   $k$ -mal stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, u)}{\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, u)}.$$

**Beweis:** Wir dürfen  $\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}_0, u_0) > 0$  annehmen (anderenfalls betrachten wir  $-F$  statt  $F$ ). Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitung  $\partial/\partial u$  gibt es eine

Umgebung  $\tilde{V}$  von  $\mathbf{x}_0$ , eine Umgebung  $(u_0 - \alpha, u_0 + \alpha)$  von  $u_0$  und ein  $\rho > 0$  sodass

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, u) > \rho \quad (8.1)$$

für  $(\mathbf{x}, u) \in \tilde{V} \times (u_0 - \alpha, u_0 + \alpha)$  gilt.

Es folgt  $F(\mathbf{x}_0, u_0 \pm \alpha) \geq 0$  und aus der Stetigkeit von  $F$  folgt  $F(\mathbf{x}, u_0 \pm \alpha) \geq 0$  für  $\mathbf{x}$  in einer Umgebung  $V$  von  $\mathbf{x}_0$ . Mit dem Zwischenwertsatz folgt,  $F(\mathbf{x}, u_0 + t) = 0$  für ein  $t \in (-\alpha, \alpha)$ .

Es gibt also eine Funktion  $g : V \rightarrow (u_0 - \alpha, u_0 + \alpha)$ , die  $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$  erfüllt. Wegen (8.1) ist  $F(\mathbf{x}, \cdot)$  streng monoton steigend, daher ist die Funktion  $g$  eindeutig.

Es gilt für  $\mathbf{x} \in V$  und hinreichend kleine  $h \in \mathbb{R}$  nach dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} 0 &= F(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i, g(\mathbf{x})) - F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \\ &\quad - F(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i, g(\mathbf{x})) + F(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i, g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i)) \\ &= hF_{x_i}(\mathbf{x} + \zeta h\mathbf{e}_i, g(\mathbf{x})) \\ &\quad + (g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x}))F_u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i, g(\mathbf{x})) + \eta(g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

$\zeta, \eta \in (0, 1)$ , womit

$$\frac{g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x})}{h} = -\frac{F_{x_i}(\mathbf{x} + \zeta h\mathbf{e}_i, g(\mathbf{x}))}{F_u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i, g(\mathbf{x})) + \eta(g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x}))} \quad (8.2)$$

folgt.

Wegen der Stetigkeit von  $F_{x_i}$  und (8.1) folgt zunächst, dass  $\frac{g(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x})}{h}$  beschränkt und  $g(\mathbf{x})$  damit in der  $i$ -ten Koordinate stetig ist.

Für  $h \rightarrow 0$  erhalten wir damit aus (8.2) die stetige partielle Differenzierbarkeit von  $g$  mit

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{F_{x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{F_u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))} \quad (8.3)$$

also die stetige Differenzierbarkeit. Aus der Darstellung (8.3) von  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$  folgt, dass  $g$   $k$ -mal stetig differenzierbar ist, wenn  $F$  dieser Differenzierbarkeitsforderung genügt.  $\square$

Wir verallgemeinern die Aussage des Satzes auf die Lösbarkeit eines Gleichungssystems

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^q, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^r, \quad 1 \leq i \leq r$$

nach den Variablen  $u_i$ , d.h. wir fragen ob es lokal um einen Punkt  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ , der  $F_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$  erfüllt, eindeutige Funktionen  $g_j : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq r$  gibt, für die  $F_i(\mathbf{x}, g_1(\mathbf{x}), \dots, g_r(\mathbf{x})) = 0$  für  $1 \leq i \leq r$  gilt.

Wir schreiben für die Ableitungsmatrizen der Funktionen  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_r)^t$  und  $\mathbf{G} = (g_1, \dots, g_r)^t$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial x_q} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times q}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial u_r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r},$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_q} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times q}$$

**Satz 8.1.2.** (Hauptsatz über implizite Funktionen) Es seien in einer offenen Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$   $C^k$ ,  $k \geq 1$ , Funktionen  $F_i: \mathbb{R}^{q+r} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, die für einen Punkt  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \in D$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 0, \quad \det \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \right) \neq 0$$

erfüllen. Dann gibt es Umgebungen  $V$  von  $\mathbf{x}^0$  und  $W$  von  $\mathbf{u}^0$ , sodass es für  $\mathbf{x} \in V$  genau ein  $\mathbf{u} \in W$  mit  $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$ ,  $1 \leq i \leq r$  gibt. Die so definierte Lösungsfunktion  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_r(\mathbf{x}))$  erfüllt in  $V$  also  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{G}(\mathbf{x})) = 0$ , ist  $k$ -mal stetig differenzierbar und hat Ableitungsmatrix

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = - \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{G}(\mathbf{x})) \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{G}(\mathbf{x})) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{G}(\mathbf{x})) \in V \times W.$$

**Beweis:** Wir führen den Beweis durch Induktion nach  $r$ . Für  $r = 1$  ist die Aussagen Satz 8.1.1. Wir nehmen an der Satz gilt für  $r - 1$  und zeigen ihn für  $r$ :

Wir dürfen o.B.d.A. (gegebenenfalls nach Permutation der Variablen  $u_i$ ) annehmen, dass

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial u_r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(r-1) \times (r-1)},$$

regulär ist. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es  $C^1$ -Funktionen  $\phi_2, \dots, \phi_r$ , die für  $(\mathbf{x}, u_1)$  aus einer Umgebung von  $(\mathbf{x}^0, u_1^0)$

$$F_i(\mathbf{x}, u_1, \phi_2(\mathbf{x}, u_1), \dots, \phi_r(\mathbf{x}, u_1)) = 0, \quad 2 \leq i \leq r \quad (8.4)$$

erfüllen. Wir betrachten die Funktion

$$H(\mathbf{x}, u_1) := F_1(\mathbf{x}, u_1, \phi_2(\mathbf{x}, u_1), \dots, \phi_r(\mathbf{x}, u_1)).$$

Um Satz 8.1.1 auf die Funktion  $H$  anwenden zu können müssen wir zeigen, dass  $\frac{\partial H}{\partial u_1}(\mathbf{x}^0, u_1^0) \neq 0$  gilt.

Wegen

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \frac{\partial F_1}{\partial u_1} + \sum_{l=2}^r \frac{\partial F_1}{\partial u_l} \frac{\partial \phi_l}{\partial u_1}$$

würde aus  $\frac{\partial H}{\partial u_1}(\mathbf{x}^0, u_1^0) = 0$

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1} = - \sum_{l=2}^r \frac{\partial F_1}{\partial u_l} \frac{\partial \phi_l}{\partial u_1} \quad (8.5)$$

folgen. Aus (8.4) folgt aber mit der Kettenregel

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_1} = - \sum_{l=2}^r \frac{\partial F_i}{\partial u_l} \frac{\partial \phi_l}{\partial u_1}, \quad 2 \leq i \leq r. \quad (8.6)$$

Aus (8.5) und (8.6) würde

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_1} = - \sum_{l=2}^r \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_l} \frac{\partial \phi_l}{\partial u_1}$$

folgen und der erste Spaltenvektor von  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}$  wäre eine Linearkombination der anderen Spaltenvektoren, was der Regularität der Ableitungsmatrix  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}$  widerspricht.

Mit Satz 8.1.1 erhalten wir somit eine differenzierbare Funktion  $g_1(\mathbf{x})$  für die, wenn wir  $g_i(\mathbf{x}) := \phi_i(\mathbf{x}, g_1(\mathbf{x}))$ ,  $2 \leq i \leq r$  definieren gilt

$$F_i(\mathbf{x}, g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_r(\mathbf{x})) = 0, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Aus der stetigen Differenzierbarkeit von  $g_1$  und der von  $\phi_i$  folgt dass die Funktionen  $g_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  stetig differenzierbar sind.

Durch Differentiation der Gleichungen  $F_i(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})) = 0$  erhalten wir

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} = - \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (8.7)$$

Es bleibt zu zeigen dass für  $\mathbf{F} \in C^k$  auch  $\mathbf{G} \in C^k$  gilt: Für  $\mathbf{F} \in C^k$  sind  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$  und  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}$  in  $C^{k-1}$ . Da die Inversenbildung eine  $C^\infty$ -Funktion auf dem Raum der regulären  $r \times r$  Matrizen ist, wie man etwa durch die Darstellung der Inversen mithilfe der algebraischen Komplemente sieht, folgt aus (8.7), dass  $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}$  eine  $C^{k-1}$ -Funktion ist.  $\square$

Ein wichtiger Spezialfall des vorangegangenen Satzes ist der Fall  $q = r$ . Eine bijektive Abbildung  $\mathbf{F}$  von einer offenen Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^r$  auf eine offene Menge  $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^r$  heißt ein  $C^k$ -Diffeomorphismus, wenn  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{F}^{-1}$   $C^k$ -Funktionen sind.

**Satz 8.1.3.** (Umkehrsatz) Ist  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  offen eine  $C^k$ -Abbildung mit  $d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  regulär, dann gibt es offene Umgebungen  $V$  von  $\mathbf{x}_0$  und  $W$  von  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ , sodass  $\mathbf{F}$  eingeschränkt auf  $V$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus von  $V$  auf  $W$  ist. Ist  $d\mathbf{F}$  auf ganz  $\Omega$  regulär, dann ist  $\mathbf{F}$  eine offene Abbildung, d.h. das Bild offener Teilmengen von  $\Omega$  ist offen.

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus Satz 8.1.2, wenn wir die Funktion  $\tilde{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \mathbf{F}(\mathbf{w}) - \mathbf{z}$  betrachten: Dann gibt es eine Funktion  $\mathbf{G}$  von einer Umgebung von  $\mathbf{z}_0$  in eine Umgebung von  $\mathbf{w}_0$ , die  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, \mathbf{G}(\mathbf{z})) = 0$ , also  $\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{z})) - \mathbf{z} = 0$  erfüllt.  $\mathbf{G}$  ist also lokal die Umkehrfunktion zu  $\mathbf{F}$ . Insbesondere liegt mit  $\mathbf{F}(\mathbf{z})$  eine Umgebung dieses Punktes in der Bildmenge von  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}$  ist also eine offene Abbildung.  $\square$

**Beispiel 8.1.4.** Wir suchen zwei der vier Variablen für die in einer Umgebung des Punktes  $\mathbf{x}_0 = (r_0, s_0, t_0, u_0) = (0, 0, 1, 0)$  durch die Gleichungen

$$F_1(r, s, t, u) = \tan r + rs + \sqrt{t} \sin u = 0 \quad (8.8)$$

$$F_2(r, s, t, u) = s^2 - u^2 + tu = 0 \quad (8.9)$$

diese beiden Variablen durch die anderen beiden definiert sind und berechnen das Differential  $d\mathbf{G}$  für diese Lösungsfunktionen  $\mathbf{G}$ .

Die Ableitungsmatrix bei  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 1, 0)$  ist

$$d\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die einzige 2x2 Untermatrix mit Rang 2 ist die aus der 1. und der 4. Spalte bestehende Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{von } d\mathbf{F}.$$

Aufgrund des Hauptsatzes über implizite Funktionen kann das Gleichungssystem lokal um  $\mathbf{x}_0$  nach  $r$  und  $u$  aufgelöst werden, d.h. es gibt in einer Umgebung von  $(0, 1)$  eine Funktion  $\mathbf{G} = (g_1, g_2)^t$  mit  $F_i(g_1(s, t), s, t, g_2(s, t)) = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ gilt} \quad d\mathbf{G}(0, 0) = - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 8.2 Extrema unter Nebenbedingungen

Häufig werden Extrema einer Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gesucht, wobei die Variablen  $\mathbf{x}$  gewissen Nebenbedingungen  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0$  genügen sollen, d.h. wir suchen lokale Maxima (Minima) in der Nullstellenmenge von  $\mathbf{G} = (g_1, \dots, g_l)$ .

Ein lokales Extremum der Funktion  $f$  unter der Nebenbedingung  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0$  ist demnach ein Punkt  $\mathbf{x}$  des Definitionsbereiches von  $f$ , der  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0$  und  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{z})$  ( $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{z})$ )  $\forall \mathbf{z} \in U$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{z}) = 0$  für eine Umgebung  $U$  von  $\mathbf{x}$  erfüllt. Hat  $d\mathbf{G}(\mathbf{x})$  in einem Punkt  $\mathbf{x}$  der Nullstellenmenge von  $\mathbf{G}$  vollen Rang, so können wir nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen  $l$  der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mithilfe der Gleichungen  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0$  durch die restlichen  $n - l$  Variablen ausdrücken. Sei zunächst angenommen, dass  $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}}$  vollen Rang hat. Dann ist  $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{u}) \in D$  ein lokales Extremum von  $f$  unter den Nebenbedingungen  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0$  genau dann, wenn  $\tilde{f}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{y}, \mathbf{H}(\mathbf{y}))$  in  $\mathbf{y}$  ein lokales Extremum ohne Nebenbedingungen hat, wobei  $\mathbf{H}$  die durch Satz 8.1.2 gegebene Lösungsfunktion der Gleichung  $\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{H}(\mathbf{y})) = 0$  ist. Eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum in  $\mathbf{x}_0$  von  $f$  unter den Nebenbedingungen  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0$  in Punkten in denen  $d\mathbf{G}$  vollen Rang hat ist also  $d\tilde{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ . Diese Bedingung ist wegen

$$\frac{d\tilde{f}}{d\mathbf{y}} = \frac{df}{d\mathbf{y}} + \frac{df}{d\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{y}}$$

äquivalent zu

$$\frac{df}{d\mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) + \frac{df}{d\mathbf{u}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) \frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) = 0. \quad (8.10)$$

Wegen  $\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{H}(\mathbf{y})) = 0$  folgt

$$\frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{y}} + \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{y}} = 0 \text{ bzw. } \frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{y}} = - \left( \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}} \right)^{-1} \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{y}}$$

Mit

$$\boldsymbol{\lambda} := \frac{df}{d\mathbf{u}} \left( \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}} \right)^{-1} \text{ bzw. } \frac{df}{d\mathbf{u}} - \boldsymbol{\lambda} \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{u}} = 0 \quad (8.11)$$

(die Faktoren  $\boldsymbol{\lambda}$  werden *Lagrangemultiplikatoren* genannt) folgt aus (8.10)

$$\frac{df}{d\mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) - \boldsymbol{\lambda} \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0) = 0. \quad (8.12)$$

(8.11) und (8.12) können mit  $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{u})$  und  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0)$  zusammen als

$$\frac{df}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) - \boldsymbol{\lambda} \frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = 0. \quad (8.13)$$

geschrieben werden. In dieser Darstellung spielt es keine Rolle nach welchen Variablen wir die Nebenbedingung  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0$  lösen. Die getroffene Annahme, dass die  $r \times r$ . Matrix der letzten  $r$  Spalten von  $d\mathbf{G}$  vollen Rang hat, kann also

in dieser Darstellung durch die Bedingung  $dG$  hat vollen Rang ersetzt werden. Setzen wir  $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}G(\mathbf{x})$ , so entspricht (8.13) der Gleichung

$$\frac{dF}{d\mathbf{x}} = 0. \quad (8.14)$$

Da  $\frac{dF}{d\boldsymbol{\lambda}} = 0$  genau die Nebenbedingungen  $G(\mathbf{x}) = 0$  ergeben können wir diese mit (8.14) also  $dF = 0$  schreiben.

Damit erhalten wir:

**Satz 8.2.1.** *Eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines lokalen Extremums unter Nebenbedingungen  $G = 0$  an einer Stelle  $\mathbf{x}_0$  für die  $dG(\mathbf{x}_0)$  vollen Rang hat, ist dass die Funktion*

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}G(\mathbf{x})$$

an der Stelle  $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda})$  eine stationäre Stelle hat, also  $dF = 0$  erfüllt.

*Beispiel 8.2.2.* Das folgende Beispiel zeigt, dass die Bedingung an  $dG$  vollen Rang in  $\mathbf{x}$  zu haben tatsächlich notwendig ist, um durch Lagrange-Multiplikatoren zu prüfen ob in  $\mathbf{x}$  ein lokales Extremum unter Nebenbedingungen vorliegen kann:

*Beispiel 8.2.3.* Gesucht sind die lokalen Extrema von  $f(x, y) = x$  unter der Nebenbedingung  $x^3 - y^2 = 0$ .

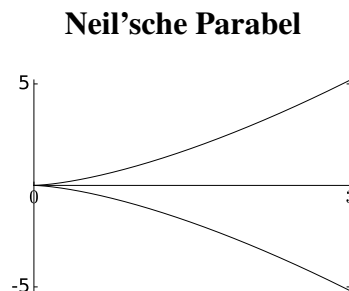
Die Neil'sche Parabel kann implizit durch die Gleichung  $f(x, y) = 0$  dargestellt werden. Offensichtlich ist in  $(0, 0)$  für alle Punkte auf der Neil'schen Parabel die  $x$ -Koordinate minimal.

Für  $F(x, y, \lambda) = x - \lambda(x^3 - y^2)$  erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - 3x^2\lambda = 0 \quad (\text{i})$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y\lambda = 0 \quad (\text{ii})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^3 - y^2 = 0 \quad (\text{iii})$$



Aus i) folgt  $x\lambda \neq 0$ , damit aus ii)  $y = 0$  und mit iii) ein Widerspruch.

Das Gleichungssystem hat also keine Lösung. Die Bedingung  $dG$  hat vollen Rang ergibt  $(3x^2, 2y^2) \neq (0, 0)$ . Da der Punkt  $(0, 0)$  in der Nullstellenmenge von  $G$  liegt muss die Funktion  $f$  in  $(0, 0)$  zusätzlich auf das Vorliegen eines lokalen Extremums unter der Nebenbedingung  $x^3 - y^2 = 0$  untersucht werden. Offensichtlich gilt  $x \geq 0$  auf der Nullstellenmenge von  $x^3 - y^2$ . Im Punkt  $(0, 0)$  ist also ein Minimum von  $f$  unter der Nebenbedingung.

*Beispiel 8.2.4.* Gesucht sind Extrema der Funktion  $f: f(x, y, z) = x + 2y + 3z$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ .

Wir erhalten

$$F(x, y, z, \lambda) = x + 2y + 3z - \lambda(x^2 + 2y^2 + z^2 - 1)$$

und aus  $dF = 0$  das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 - 2x\lambda &= 0 \\ 2 - 4y\lambda &= 0 \\ 3 - 2z\lambda &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt  $\lambda = 1/2x$  und  $x \neq 0$  und damit  $y = x$  und  $z = 3x$  aus der 2. und 3. Gleichung. Setzen wir in die 4. Gleichung ein erhalten wir  $x^2 + 2x^2 + 9x^2 = 1$ , also  $12x^2 = 1$  und die beiden Lösungen für  $(x, y, z) \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 3)$ . Da das Differential  $dg$  der Funktion  $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$  außer in  $(0, 0, 0)$  vollen Rang hat, aber  $g(0, 0, 0) \neq 0$  gilt sind das die einzigen möglichen lokalen Extrema. Die Nullstellenmenge von  $g$  ist eine beschränkte und wegen der Stetigkeit von  $\mathbf{G}$  abgeschlossene, also eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$ , die stetige Funktion  $f$  nimmt darauf somit ihr Maximum und ihr Minimum an. Als globales Maximum resp. Minimum unter der NB sind diese Extrema auch lokale Extrema unter der NB. Wegen  $f(\pm \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 3)) = \pm 2\sqrt{3}$  ist das einzige lokale Minimum das globale Minimum in  $-\frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 3)$  und das einzige lokale Maximum das globale Maximum in  $\frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 3)$ .

Man beachte, dass die Definitheit von  $d^2F$  keine Rückschlüsse auf das Vorhandensein lokaler Extrema von  $f$  unter der NB zulässt, da Satz 8.2.1 nur sagt dass lokale Extrema von  $f$  unter der NB stationäre Stellen von  $F$  sind, die aber keine lokalen Extrema von  $F$  sein müssen. Tatsächlich ist  $d^2F$  an  $\frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 3)$  indefinit wie man aus den ersten beiden Hauptminoren von  $d^2F(\frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 3))$  sieht, obwohl dort das Maximum unter der NB liegt.

*Beispiel 8.2.5.* Wir untersuchen welcher Quader mit Volumen 1 minimale Oberfläche hat:

Für die Lagrangefunktion der halben Oberfläche unter der Nebenbedingung  $xyz - 1 = 0$  erhalten wir

$$F(x, y, z, \lambda) = yz + xz + xy - \lambda(xyz - 1).$$



Wir setzen die partiellen Ableitungen 0:

$$\begin{aligned}y + z - \lambda yz &= 0 \\x + z - \lambda xz &= 0 \\x + y - \lambda xy &= 0 \\xyz - 1 &= 0\end{aligned}$$

Multiplikation der 1. Gleichung mit  $x$ , der 2. mit  $y$  und der 3. mit  $z$  gibt als einzige Lösung  $x = y = z = 1$  (Wegen der 4. Gleichung gilt  $x, y, z \neq 0$ ). Da das Differential  $dg$  der Funktion  $g(x, y, z) = xyz - 1$  auf ihrer Nullstellenmenge Rang 1 hat, ist dies das einzig mögliche lokale Extremum unter der Nebenbedingung.

Auf der Nullstellenmenge von  $g$  gilt

$$O/2 = yz + xz + xy \geq xyz / \min\{x, y, z\} = 1 / \min\{x, y, z\} \geq \sqrt{\max\{x, y, z\}}.$$

Allso strebt  $O/2$  für  $\max\{x, y, z\} \rightarrow \infty$  gegen unendlich. Damit muss  $O/2$  auf der Nullstellenmenge von  $g$  ein globales Minimum haben. Dieses ist auch ein lokales Extremum und kann also nur  $(1, 1, 1)$  sein.

*Beispiel 8.2.6.* Wir bestimmen den Zylinder mit maximalem Volumen der in der Einheitskugel liegt durch Lagrangemultiplikatoren:

Das Zylindervolumen ist  $\pi r^2 h$  unsere Nebenbedingung ist  $r^2 + h^2/4 = 1$ . Wir setzen  $F(r, h, \lambda) = \pi r^2 h - \lambda(r^2 + h^2/4 - 1)$  und erhalten aus  $dF = 0$ :

$$\begin{aligned}2\pi r h - 2r\lambda &= 0 \\ \pi r^2 - \frac{1}{2}h\lambda &= 0 \\ r^2 + h^2/4 - 1 &= 0\end{aligned}$$

Als Lösungen ergibt sich  $(0, 2, 0)$  mit  $V = 0$  und  $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2\pi}{\sqrt{3}})$  mit Volumina  $0$  und  $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ . Da das Differential der Funktion  $g(r, h) = r^2 + h^2/4 - 1$  auf ihrer Nullstellenmenge vollen Rang hat, gibt es keine weiteren lokalen Extrema. Da die Volumina für  $r = 0$  und  $r = 1$   $0$  sind muss die stationäre Stelle das Maximum sein.

*Beispiel 8.2.7.* Gesucht ist der minimale Abstand von Punkten auf der Ellipse  $x^2 + 2y^2 = 1$  und der Geraden  $x + y = 4$ .

Der Euklidische Abstand zweier Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  ist offensichtlich genau dann minimal, wenn  $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$  minimal ist.

Wir erhalten mit

$$F = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \lambda(x_1^2 + 2y_1^2 - 1) - \mu(x_2 + y_2 - 4)$$

durch partielle Differentiation das Gleichungssystem

$$2x_1 - 2x_2 - 2\lambda x_1 = 0 \quad (\text{i})$$

$$2x_2 - 2x_1 - \mu = 0 \quad (\text{ii})$$

$$2y_1 - 2y_2 - 4\lambda y_1 = 0 \quad (\text{iii})$$

$$2y_2 - 2y_1 - \mu = 0 \quad (\text{iv})$$

$$x_1^2 + 2y_1^2 - 1 = 0 \quad (\text{v})$$

$$x_2 + y_2 - 4 = 0 \quad (\text{vi})$$

Aus (i) und (ii) ergibt sich  $-\mu = 2\lambda x_1$  und aus (iii) und (iv)  $4\lambda y_1 = -\mu$ . Da wie man unmittelbar nachrechnet  $\lambda = 0$  keine Lösung ergibt folgt  $x_1 = 2y_1$  und mit (v)  $x_1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ ,  $y_1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$ .

Aus (ii) und (iv) folgt  $x_2 - y_2 = x_1 - y_1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$ , was mit (vi)  $x_2 = 2 \pm \frac{\sqrt{6}}{12}$  und  $y_2 = 2 \mp \frac{\sqrt{6}}{12}$  ergibt.

Da  $d\mathbf{G}$  auf der Nullstellenmenge von  $\mathbf{G}$  vollen Rang hat sind

$$\left( \left( \pm \frac{\sqrt{6}}{3}, \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \right), \left( 2 \pm \frac{\sqrt{6}}{12}, 2 \mp \frac{\sqrt{6}}{12} \right) \right)$$

die einzigen möglichen Punkte mit minimalem Abstand mit Abständen

$$2\sqrt{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Da es offensichtlich Punkte mit minimalem Abstand gibt folgt dass

$$\left( \left( \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right), \left( 2 + \frac{\sqrt{6}}{12}, 2 - \frac{\sqrt{6}}{12} \right) \right)$$

die gesuchte Lösung ist.

### 8.3 Lemma von Zorn

Eine Menge  $M$  heißt nichtleer, wenn sie mindestens ein Element besitzt, d.h.  $\exists x \in M$  oder äquivalent es gibt eine Funktion, die die Menge  $M$  auf eines ihrer Elemente abbildet. Hat man eine Familie von nichtleeren Mengen  $(M_i)_{i \in I}$ , so können wir den Produktraum  $\prod_{i \in I} M_i$  betrachten, das ist die Menge der Funktionen  $f : I \rightarrow \cup_{i \in I} M_i$ , die  $f(M_i) \in M_i$  für alle  $i \in I$  erfüllen. Mit den Zermelo-Fraenkel Axiomen der Mengenlehre kann nicht gezeigt werden, dass  $\prod_{i \in I} M_i$  für

nichtleere Mengen  $M_i$  nichtleer ist. Es kann aber gezeigt werden, dass die Existenz einer solchen Auswahlfunktion unabhängig von den anderen ZF-Axiomen ist, d.h. sie können aus diesen nicht hergeleitet werden, können aber als weiteres Axiom hinzugenommen werden und liefern ein erweitertes widerspruchsfreies Axiomensystem (ZFC für Zermelo-Fraenkel Choice genannt). Wir verwenden dieses und zeigen die Äquivalenz zu einer Aussage, die als Lemma von Zorn bekannt ist.

In einem teilgeordneten Raum  $(\mathcal{A}, \preceq)$  bezeichnet eine **Kette** eine unter  $\preceq$  totalgeordnete Teilmenge von  $\mathcal{A}$ , also eine Teilmenge  $\mathcal{K}$  von  $\mathcal{A}$  für die  $x \preceq y$  oder  $y \preceq x$  für alle  $x, y \in \mathcal{K}$  gilt.

Eine Teilmenge  $\mathcal{B}$  einer teilgeordneten Menge  $\mathcal{A}$  heißt **beschränkt**, wenn es ein  $u \in \mathcal{A}$  gibt, das  $b \preceq u$  für alle  $b \in \mathcal{B}$  erfüllt.

Ein Element  $m \in \mathcal{A}$  heißt **maximal**, wenn aus  $m \preceq a$  für ein  $a \in \mathcal{A}$   $m = a$  folgt. Maximale Elemente müssen keine größten Elemente sein, d.h. es kann  $a \in \mathcal{A}$  geben mit  $m \not\preceq a$  und  $a \not\preceq m$ .

Eine kleinste obere Schranke einer Teilmenge  $\mathcal{B}$  von  $\mathcal{A}$  ist eine obere Schranke die kleiner jeder anderen oberen Schranke von  $\mathcal{B}$  ist und wird mit  $\sup \mathcal{B}$  bezeichnet.

**Lemma 8.3.1 (Zorn).** *Hat eine teilgeordnete Menge  $\mathcal{A}$  die Eigenschaft, dass jede Kette in  $\mathcal{A}$  beschränkt ist, so hat sie ein maximales Element.*

Die Bedeutung des Lemmas von Zorn liegt darin, dass man die Existenz gewisser Elemente, die das Auswahlaxiom erfordern nicht durch einen konstruktiven Beweis zeigen kann, aber die Existenz von oberen Schranken von Ketten oft sehr einfach zu zeigen ist. Typischerweise ist die teilgeordnete Menge  $\mathcal{S}$  eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge  $M$  versehen mit der Mengeninklusion als Teilordnung. In vielen Fällen ist leicht zu zeigen, dass für eine Kette  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  aus  $\mathcal{S}$  die Vereinigung  $\cup_{i \in I} \mathcal{A}_i$  in  $\mathcal{S}$  liegt, womit man eine (sogar die kleinste) obere Schranke von  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{S}$  gefunden hat. Mit dem Lemma von Zorn folgt dann die Existenz eines maximalen Elementes. Typische Beispiele hierfür ist der Satz von der Existenz von Ultrafiltern oder Satz von der Existenz einer Basis in einem linearen Raum.

Der Beweis der Äquivalenz des Lemmas von Zorn zum Auswahlaxiom (Satz 8.3.3) beruht auf folgendem Fixpunktsatz:

**Lemma 8.3.2.** *Sei  $(\mathcal{A}, \preceq)$  eine nichtleere teilgeordnete Menge, in der jede Kette eine kleinste obere Schranke hat.  $F$  sei eine Abbildung von  $\mathcal{A}$  in sich, die  $x \preceq F(x) \forall x \in \mathcal{A}$  erfüllt. Dann gibt es  $m \in \mathcal{A}$  mit  $F(m) = m$ ,*

**Beweis:** Sei  $a_0$  ein beliebiges Element von  $\mathcal{A}$  fest gewählt. Wir nennen eine Teilmenge  $\mathcal{B}$  von  $\mathcal{A}$  zulässig, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- i)  $a_0 \in \mathcal{B}, a_0 \preceq b \forall b \in \mathcal{B}$
- ii) Für  $x \in \mathcal{B}$  gilt  $F(x) \in \mathcal{B}$
- iii) Für eine Kette  $\mathcal{T}$  in  $\mathcal{B}$  gilt  $\sup \mathcal{T} \in \mathcal{B}$

$\{b \in \mathcal{A} : a_0 \preceq b\}$  ist offensichtlich zulässig, also ist die Menge der zulässigen Mengen nichtleer.

Der Durchschnitt  $\mathcal{B}_0$  aller zulässigen Mengen ist, wie man unmittelbar sieht zulässig.

Ein Element  $e \in \mathcal{B}_0$  heißt **extremal**, wenn für  $x \in \mathcal{B}_0$  aus  $x \prec e$  folgt  $F(x) \preceq e$ .  $a_0$  ist extremal. Wir zeigen, dass für extremales  $e$ , die Menge

$$\mathcal{B}_e := \{x \in \mathcal{B}_0 : x \preceq e \text{ oder } F(e) \preceq x\}$$

zulässig ist:

- i)  $a_0 \preceq e$  also  $a_0 \in \mathcal{B}_e$ .
- ii) Für  $x \in \mathcal{B}_e$  und  $x \prec e$  gilt wegen der Extremalität von  $e$   $F(x) \preceq e$ . Für  $x = e$  folgt  $F(x) = F(e)$  und für  $F(e) \preceq x$  folgt  $F(e) \preceq x \preceq F(x)$ , also in allen Fällen  $F(x) \in \mathcal{B}_e$ .
- iii) Ist  $\mathcal{T}$  eine Kette in  $\mathcal{B}_e$  und ist  $x \prec e$  für alle  $x \in \mathcal{T}$ , so folgt  $e$  ist obere Schranke von  $\mathcal{T}$  und damit  $\sup \mathcal{T} \preceq e$ , also  $\sup \mathcal{T} \in \mathcal{B}_e$ . Gilt  $F(e) \preceq x$  für ein  $x \in \mathcal{T}$  so folgt  $x \preceq \sup \mathcal{T}$  und damit ebenfalls  $\sup \mathcal{T} \in \mathcal{B}_e$ .

Da  $\mathcal{B}_0$  die kleinste zulässige Menge ist und  $\mathcal{B}_e \subseteq \mathcal{B}_0$  gilt, folgt  $\mathcal{B}_e = \mathcal{B}_0$  für alle extremalen  $e \in \mathcal{B}_0$ . Insbesondere folgt aus der Definition von  $\mathcal{B}_e$ , dass ein extremales Element  $e \in \mathcal{B}_0$  mit allen Elementen von  $\mathcal{B}_0$  in Relation steht.

Wir zeigen jetzt, dass die Menge  $\mathcal{E}$  der extremalen Elemente vom  $\mathcal{B}_0$  zulässig ist:

- i)  $a_0$  ist extremal da  $\{x \in \mathcal{B}_0 : x \prec a_0\} = \emptyset$ .
- ii) Ist  $e$  extremal und  $x \prec e$ , so folgt wegen  $e$  extremal  $F(x) \preceq e$ , also aus  $x \preceq e$  folgt  $F(x) \preceq F(e)$ . Damit gilt wegen  $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_e$  für alle  $x \in \mathcal{B}_0$  mit  $x \prec F(e)$  immer  $x \preceq e$ , also gilt  $F(x) \preceq F(e)$  für alle  $x$  mit  $x \prec F(e)$ .
- iii) Ist  $\mathcal{T}$  eine Kette in  $\mathcal{E}$  und  $y \prec \sup \mathcal{T}$ . Dann gilt  $y \preceq t$  oder  $t \preceq y$  für alle  $t \in \mathcal{T}$ , woraus für ein  $x \in \mathcal{T}$   $y \prec x$  folgt, anderenfalls wäre  $y$  eine kleinere obere Schranke als  $\sup \mathcal{T}$  von  $\mathcal{T}$ . Wegen  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}$  ist  $x$  extremal und damit gilt  $F(y) \preceq x \preceq \sup \mathcal{T}$ . Damit ist  $\sup \mathcal{T}$  extremal.

Wir haben gezeigt, dass alle Elemente von  $\mathcal{B}_0$  extremal sind. Da in  $\mathcal{B}_e$  per definitionem alle Elemente mit  $e$  vergleichbar sind, folgt wegen  $\mathcal{B}_e = \mathcal{B}_0 \forall e \in \mathcal{E}$ , dass  $\mathcal{B}_0$  eine Kette ist. Da  $\mathcal{B}_0$  zulässig ist folgt  $\sup \mathcal{B}_0 \in \mathcal{B}_0$  und  $F(\sup \mathcal{B}_0) \in \mathcal{B}_0$  und wegen  $\sup \mathcal{B}_0 \preceq F(\sup \mathcal{B}_0)$  folgt  $F(\sup \mathcal{B}_0) = \sup \mathcal{B}_0$ . ▀

**Satz 8.3.3.** *Das Auswahlaxiom ist äquivalent zum Lemma von Zorn.*

**Beweis:** Es gelte das Lemma von Zorn und  $(M_i)_{i \in I}$  sei eine Familie nichtleerer Mengen. Auf der Menge  $\mathcal{A}$  aller Auswahlfunktionen auf Teilmengen  $J$  von  $I$  definieren wir eine Halbordnung  $\preceq$  wie folgt: Für  $x_J \in \prod_{i \in J} M_i$  und  $y_{J'} \in \prod_{i \in J'} M_i$ ,  $J, J' \subseteq I$  gilt  $x \preceq y$  genau wenn  $J \subseteq J'$  und  $\text{pr}_i(x) = \text{pr}_i(y) \forall i \in J$ , d.h. wenn  $y$  eine Fortsetzung von  $x$  ist.  $\text{pr}_i$  bezeichnet die Projektion von  $x$  auf seine  $i$ -te Koordinate, beziehungsweise  $\text{pr}_i(x) = x(i)$ .  $\mathcal{A}$  ist nichtleer und jede Kette  $\mathcal{S} = \{x_J : J \in \mathcal{J}\}$  in  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{J}$  totalgeordnet in  $\mathcal{P}(I)$  hat eine obere Schranke  $x_{J_0}$ , nämlich die durch  $\text{pr}_i(x_{J_0}) := \text{pr}_i(x_J)$  für ein  $J$  mit  $i \in J \subseteq J_0 := \cup\{J : J \in \mathcal{J}\}$  gegebene Auswahlfunktion. Diese Definition ist, da  $\mathcal{S}$  eine Kette ist, unabhängig von der Wahl von  $J \in \mathcal{J}$  mit  $i \in J$ , also ist  $x_{J_0}$  wohldefiniert.

Anwendung des Zorn'schen Lemmas gibt die Existenz einer unter  $\preceq$  maximalen Auswahlfunktion  $x_{J_m}$  auf einer Menge  $J_m \subseteq I$ . Für ein  $i_0 \in I \setminus J_m$  können wir (ohne Verwendung des Auswahlaxioms) ein  $x_{\{i_0\}} \in M_{i_0}$  finden. Die durch

$$\text{pr}_i(x_{J_m \cup \{i_0\}}) := \begin{cases} x_{J_m}(i) & i \in I_0 \\ x_{\{i_0\}} & i = i_0 \end{cases}$$

definierte Auswahlfunktion auf  $J_m \cup \{i_0\}$  erfüllt  $x_{J_m} \prec x_{J_m \cup \{i_0\}}$  im Widerspruch zur Maximalität von  $x_{J_m}$ . Also muss  $J_m = I$  gelten und die Auswahlfunktion  $x_{J_m}$  ist eine Auswahlfunktion auf  $I$ .

Gilt das Auswahlaxiom und hat eine teilgeordnete Menge  $(M, \preceq)$  in der jede Kette beschränkt ist kein maximales Element, so sind alle Mengen  $M_x := \{y \in M : x \prec y\}$  nichtleer und es gibt aufgrund des Auswahlaxioms eine Funktion  $f$  auf  $M$ , die  $x \prec f(x)$  erfüllt. Mit dem Auswahlaxiom wählen wir für alle Ketten  $\mathcal{T}$  in  $(M, \preceq)$  eine obere Schranke  $s(\mathcal{T})$  und definieren  $F(\mathcal{T}) := \mathcal{T} \cup \{f(s(\mathcal{T}))\}$ . Die Menge  $\mathcal{K}$  aller Ketten in  $M$  ist durch Mengeninklusion teilgeordnet:  $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$  für  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ . Mit dieser Ordnungsrelation gilt dann für alle Ketten

$$\mathcal{T} < F(\mathcal{T}). \quad (8.15)$$

Jede Kette in  $\mathcal{K}$  (das ist also eine Kette von Ketten) hat die Vereinigung aller Mengen in dieser Kette als kleinste obere Schranke, d.h. für eine Kette  $(\mathcal{T}_i)_{i \in \mathcal{J}}$  von Ketten gilt

$$\cup_{i \in \mathcal{J}} \mathcal{T}_i = \sup\{\mathcal{T}_i : i \in \mathcal{J}\} \in \mathcal{P}(M).$$

$(\mathcal{K}, \leq)$  mit der Funktion  $F$  erfüllt also die Voraussetzungen von Lemma 8.3.2. Damit müsste es eine Kette  $\mathcal{T}$  mit  $\mathcal{T} = F(\mathcal{T})$  geben, was aber im Widerspruch zu (8.15) steht. Die Annahme, dass die Voraussetzungen des Zorn'schen Lemmas erfüllt sind, aber es kein maximales Element gibt, führt also mit dem Auswahlaxiom, Lemma 8.3.2 und (8.15) zu einem Widerspruch.  $\blacksquare$

Als typische Anwendung des Lemmas von Zorn zeigen wir, dass jeder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ -lineare Raum eine algebraische Basis besitzt, d.h. es gibt Elemente  $\{v_i : i \in I\}$

von  $V$ , sodass jedes  $x \in V$  eine eindeutige Darstellung  $x = \sum_{j \in F} a_j v_j$  mit  $a_j \in \mathbb{R}$  (bzw.  $\mathbb{C}$ ) und einer endlichen Teilmenge  $F$  von  $I$  besitzt.

Auf der Menge  $\mathcal{B}$  aller linear unabhängigen Teilmengen von  $V$  ist durch Mengeninklusion eine Teilordnung definiert. Ist  $B_i$ ,  $i \in I$  eine totalgeordnete Teilmenge von  $(\mathcal{B}, \subseteq)$ , so ist die Menge  $\cup_{i \in I} B_i$  ebenfalls in  $\mathcal{B}$ , denn für  $b_1, \dots, b_n \in \cup_{i \in I} B_i$  gibt es aufgrund der Totalordnung ein  $i_0$  mit  $b_i \in B_{i_0} \forall i = 1, \dots, n$ , womit diese Elemente linear unabhängig sind.  $\cup_{i \in I} B_i$  ist klarerweise eine obere Schranke der Kette  $(B_i)_{i \in I}$ , also ist die Voraussetzung des Lemmas von Zorn erfüllt und wir können auf die Existenz eines maximalen Elements  $B_m$  in  $(\mathcal{B}, \subseteq)$  schließen. Gäbe es ein  $x \in V$ , das sich nicht als endliche Linearkombination von Elementen aus  $B_m$  darstellen lässt, so wäre auch  $B_m \cup \{x\}$  linear unabhängig im Widerspruch zur Maximalität von  $B_m$ .

# Literaturverzeichnis

- [AP] Apostol, Tom *Mathematical Analysis* 1981; Addison-Wesley.
- [DO] Dobrowolski, Manfred *Angewandte Funktionalanalysis* 2010; Springer.
- [EL] Elstrodt, Jürgen *Maß- und Integrationstheorie* 2009; Springer.
- [EV] Evens, Lawrence *Partial Differential Equations* 2010; AMS.
- [HO] Howard, Ralph *The Milnor-Rogers proof of the Brouwer Fixed Point Theorem* <http://people.math.sc.edu/howard/Notes/brouwer.pdf>.
- [KA] Katznelson, Yitzhak *An Introduction to Harmonic Analysis* 2004; Cambridge.
- [KP] Krantz, Steven G., Parks Harold R. *Geometric Integration Theory* 2008; Birkhäuser.
- [MA] Maehara, Ryuji *The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem* 1984; Am. Math. Monthly, 641-643.
- [ZI] Ziemer, William *Weakly differentiable Functions* 1989; Springer.

# Index

- Abbildung
  - abgeschlossene mehrdeutige, 176
- abgeschlossen, 1
- Ableitung
  - distributionelle, 139
  - schwache, 135
- Abschluss, 2
- Abschnittsfilter, 5
- Alexandroff–Kompaktifizierung, 28
- Algebra von Funktionen, 21
- Approximative Einheit, 54
- Atlas, 115
- Banachraum, 42
- Basis, 2
  - algebraische, 62
  - topologische, 62
- Berührungspunkt, 13
- Betafunktion, 34
- Cantormenge, 89
- Cesàro
  - mittel, 74
  - summierbar, 74
- dicht, 2
- Diffeomorphismus, 106
- Dini-Test, 69
- Dirichletkern, 68
- Dirichletproblem, 129
- Distribution, 139
- Divergenz, 127
- Dualraum, 45
- Durchmesser, 36, 86
- Durchschnittseigenschaft endliche, 14
- Einbettung, 147
- Einbettungssatz, 147
- Einfache Funktion, 55
- Einpunktkompaktifizierung, 28
- essentielles Supremum, 48
- Faltung
  - auf  $\mathbb{R}^n$ , 51
  - auf  $\mathbb{T}$ , 56
- Faltungskern, 53
- Fejérkern, 74
- Filter, 3
  - feiner, 4
  - Grenzwert, 4
  - gröber, 4
  - konverent, 4
- Filterbasis, 4
- Fixpunktraum, 163, 167
- Flächenformel, 100, 102
- Flächenmaß, 99
- Folge
  - gleichverteilte, 24
  - konvergente, 6
- folgenstetig, 6
- Fourier-Plancherel Operator, 81
- Fourierkotransformation, 76
- Fourierreihe, 66
- Fouriertransformation, 76
  - auf  $L^2$ , 81
- Fraktal, 89
- Fundamentallemma
  - der Variationsrechnung, 136
- Funktion
  - lokal integrierbare, 135
- Funktional, 45
- Gammafunktion, 34



- gerichtet, 4
- gleichgradig stetig, 19
- gleichmäßig stetig, 19
- Gleichung Parceval'sche, 61
- Gradient, 119, 137
- Häufungspunkt, 13
- Hausdorffdimension, 88
- Hausdorffmaß, 87
- Hausdorffraum, 5
- Hilbertraum, 59
- Hölder-Norm, 150, 155
- Hölder-stetig, 149, 155
- Homöomorphismus, 16
- Hyperbolisches Paraboloid, 103
- Häufungspunkt, 18
- Immersion, 100
- Innere, 2
- Integralsatz von
  - Green, 129
  - Gauß, 127
  - Stokes, 130, 131
- Jordan-test, 72
- Jordankurve, 169
  - geschlossene, 169
- Karte, 115
- Katenoide, 105
- Klein'sche Flasche, 118
- Koffflächenformel, 110
- kompakt, 13
- Kompaktifizierung, 28
- Kugelkoordinaten, 108
- Kurve, 169
- Laplaceoperator, 129
- Lebesguepunkt, 151
- Lemma von
  - Morrey, 147
  - Rieman-Lebesgue, 67, 76
  - Urysohn, 26
- Lemniskate, 116
- Liegruppe, 117
- Lipschitz-stetig, 155
- lokal absolut stetig, 137
- lokal Lipschitz-stetig, 155
- Lokalisierungssatz, 70
- Mannigfaltigkeit, 115
  - differenzierbare, 115
  - implizit definierte, 115
- Maximalfunktion, 151
- Maß komplexes, 48
- Menge gerichtete, 4
- Metrisches äußeres Maß, 91
- Minimalfläche, 106
- Mollifier, 54
- Multiindex, 52, 135
  - Ordnung, 52, 135
- Möbiusband, 118
- Netz, 4
  - konvergentes, 5
- Norm, 42
  - äquivalente, 139
- normal, 25
- oberhalbstetig, 176
- offen, 1
- Operatornorm, 44
- Orthonormalbasis, 62
- Orthonormalsystem, 61
  - vollständiges, 62
- Polarkoordinaten, 107
- Polynom trigonometrisches, 23
- positiv orientiert, 130
- Produktraum, 11
- Produkttopologie, 11
- Projektion kanonische, 11
- präkompakt, 17
- Pseudodifferentialoperator, 83
- Punkt kritischer, 101
- punktetrennend, 21
- punktweise beschränkt, 19
- quasikompakt, 13
- Quotiententopologie, 13

- Rand, 2
- Randpunkt regulärer, 124
- Randpunkt singulärer, 125
- Raum
  - lokalkompakter, 28
  - normierter, 42
  - topologischer, 1
- relativ kompakt, 13
- Relativtopologie, 2, 11
- Retrakt (Retraktion), 165
- Retraktionssatz, 167
- Rotation, 130, 131
- Satz von
  - Arzelà–Ascoli, 20
  - Banach, 163
  - Brouwer, 166, 168
  - Jordan, 170
  - Kakutani, 176
  - Kronecker, 25
  - Lebesgue (Diff.barkeit), 152
  - Meyers-Serrin, 144
  - Morrey, 148
  - Peano, 174
  - Pythagoras, 61
  - Rademacher, 155
  - Sard, 101
  - Schauder, 172
  - Stone–Weierstraß, 21, 22
  - Tichonow, 17
  - Tietze, 26
  - Weyl, 24
- Schwartzraum, 80
- Schwarz'scher Zylinder, 85
- separabel, 63
- Skalarprodukt, 58
- Skalarproduktraum, 59
- Sobolevraum(norm), 139
- Sphäre, 116
- Spurtopologie, 2, 11
- Steiner–Symmetrisierung, 36
- stetig, 6, 8
- Struktur differenzierbare, 115
- Subbasis, 2
- T4-Raum, 25
- Tangentialraum, 118
- Teilnetz, 4
- Testfunktion, 136
- Topologie, 1
  - der punktweisen Konvergenz, 11
  - diskrete, 2
  - feinere, 2
  - finale, 12
  - gröbere, 2
  - indiskrete, 2
  - initiale, 10
- topologische Gruppe, 11
- Torus, 112
- totalbeschränkt, 17
- Totalvariation, 49
- Träger, 47
- Transformationsformel, 106
- Translation, 52
- Überdeckung (lokal endliche), 120
- Ultrafilter, 5
- Umgebung, 2
- Umgebungsbasis, 4
- Umgebungsfilter, 4
- Umkehrsatz, 183
- Ungleichung
  - Bessel'sche, 61
  - Cauchy-Schwarz, 59
  - Hölder, 33
  - Hölder verallgemeinerte, 156
  - isodiametrische, 36
  - isoperimetrische, 128
  - Minkowski, 33
  - Sobolev, 157
  - Wirtinger, 67
  - Young, 33
- Variationsnorm, 49
- Vervollständigung, 42
- Wegzusammenhangskomponente, 31
- wegzusammenhängend, 31
- Wert kritischer, 101

Zerlegung der Eins, 120  
zusammenhängend, 30  
Zusammenhangskomponente, 31  
Zylinderkoordinaten, 107

$B$	offene Einheitskugel
$B(\mathbf{x}, r)$	$\{\mathbf{y} :  \mathbf{x} - \mathbf{y}  < r\}$
$C_0$	Banachraum der stetigen Funktionen die im Unendlichen gegen 0 konvergieren (Maximumsnorm) (S. 52)
$C_b$	Banachraum der stet. beschr. Funktionen mit Supremumsnorm
$C_c(\Omega)$	Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in $\Omega$
$C_c^k(\Omega)$	Raum der $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in $\Omega$ (S. 52)
$C^k(\Omega)$	Raum der $k$ -mal stetig differenzierbare Funktionen auf $\Omega$ (S. 52)
$C^{k,\gamma}(\Omega)$	Raum der in $\Omega$ $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit Hölder-stetiger Ableitung zum Exponenten $\gamma$ (S. 150)
$D^\alpha$	(schwache) Ableitung (S. 52, 135)
$D_i$	partielle Ableitung $\partial/\partial x_i$ , schwache Ableitung nach $x_i$
$D_n$	Dirichletkern (S. 68)
$\text{diam}(C)$	$\sup\{d(x, y) : x, y \in C\}$ Durchmesser der Menge $C$
$\text{dist}(A, B)$	$\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ Abstand der Mengen $A, B$
$\text{dist}(x, A)$	$\text{dist}(\{x\}, A)$
$\partial$	Rand (S. 2)
$\partial_r$	Menge der regulären Randpunkte (S. 124)
$\partial_s$	Menge der singulären Randpunkte (S. 125)
$\mathcal{H}^s$	$s$ -dimensionales Hausdorffmaß (S. 87)
$\mathcal{H}_\delta^s$	äußere Maßfunktion (S. 86)
$\ell^\infty(M)$	Banachraum d. beschränkten reell-oder komplexwertigen Funktionen auf $M$
$f^\wedge (f^\vee)$	Fourier(ko)transformierte von $f$
$E_n$	Fejérkern (S. 74)
$\mathcal{H}^n$	$n$ -dim. Hausdorffmaß (= $n$ -dim. Flächenmaß) (S. 87)
$L^p(\Omega)$	Banachraum der Äquivalenzklassen (modulo Nullmengen) der zur $p$ -ten Potenz integrierbaren Funktionen auf $\Omega$ mit Norm $\ f\  = (\int_\Omega  f ^p d\lambda^n)^{1/p}$
$L^p(\mathbb{R}^n)$	lineare Raum der zur $p$ -ten Potenz integrierbaren Lebesgue-messbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$
$L_{\text{loc}}^1(\Omega)$	Raum der auf kompakten Teilmengen v. $\Omega$ integrierbaren Funktionen
$m_\alpha$	Monom $\mathbf{x} \mapsto m_\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ (S. 52)
$f * g$	Faltung der Funktionen $f$ und $g$ (S. 51)
$(\eta_\delta)_\delta$	Mollifier (S. 54)
$\omega_n$	Volumen der $n$ -dim. Einheitskugel (S. 36)
$\ \cdot\ _p$	$L^p$ -Norm, $\ f\ _p = \begin{cases} (\int  f ^p d\mu)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}(f) & p = \infty \end{cases}$
$\ \cdot\ _{m,p}, \ \cdot\ _{\tilde{m},p}$	Sobolevnormen (S. 139)
$\text{supp}(f)$	Träger von $f = \overline{\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$
$\tau_{\mathbf{z}}$	Translationsoperator $\tau_{\mathbf{z}}f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{z})$ (S. 52)
$W^{m,p}$	Sobolevraum (S. 139)
$\mathbf{x}$	Element des $\mathbb{R}^n$ , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$
$ \mathbf{x} $	Euklidische Norm $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

