BLATT II — SOMMERSEMESTER 2011

8) Man lese die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ und den Vektor $c \in \mathbb{R}^5$ ein. (Dateien B8_A, B8_B und B8_c).

a) Man löse das Gleichungssystem $Ax = c$.

b) Man löse die Matrixgleichung $BX - A = X + A^\top$.
Ergänzungsaufgabe: Ist die Lösung X eine positiv definite Matrix ?

9) Die Dichte der multivariaten Normalverteilung $X \sim N(\mu, \Sigma)$ ist mit dem Mittelvektor $\mu \in \mathbb{R}^k$ und der nichtnegativ-definiten Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{k\times k}$, durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\}$$

bestimmt. Für $k = 2$, $\mu = (5, 3)^\top$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$$

soll diese Dichte graphisch dargestellt werden. Es soll ein Perspektiveplot und ein Contour-Plot von $f(x)$ erstellt werden.

10) Multivariate Konfidenzbereiche für den Mittelvektor μ der k-dimensionalen Normalverteilung $N(\mu, \Sigma)$ sind Ellipsoide der Form

$$\{\theta \in \mathbb{R}^k |\ (\theta - \hat{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\theta - \hat{\mu}) \ \leq\ c\}.$$

Dabei ist $\hat{\mu}$ der Schätzer (komponentenweise Mittelwerte) für μ.

Für $k = 2$ und $\hat{\mu} = (5, 3)^\top$ und Σ aus dem vorigen Beispiel soll die Ellipse gezeichnet werden, wenn c das 90% Quantile der χ^2-Quadrat-Verteilung mit Freiheitsgrad 4 ist.

11) Die stochastische Größe $X \sim D_{10}$ sei diskret gleichverteilt auf dem Merkmalsraum $\Omega = \{1, \ldots, 10\}$. Es soll die Verteilung von $S = \sum_{i=1}^{12} X_i$ ermittelt werden, wenn X_i unabhängige Versionen von X sind (also Bestimmung des 11-fachen Faltungsmaßes). Man berechne die Punktwahrscheinlichkeiten von S und stelle sie gemeinsam mit der (dem zentralen Grenzverteilungssatz entsprechenden) asymptotischen Normalverteilung graphisch dar.

12) Die t_n-Verteilungen (Dichte $f_n(x)$) konvergieren schwach gegen die Standardnormalverteilung (Dichte $\phi(x)$) für $n \to \infty$. Dazu stelle man die Dichte der t_n-Verteilung für $n = 1$, $n = 5$, $n = 15$ und $n = 30$ sowie die Dichte der Standardnormalverteilung $\phi(.)$ in einem Plot dar und berechne für diese Werte von n den maximalen Abstand der Dichten,

$$\sup_x |f_n(x)\ -\ \phi(x)|$$

im Intervall $x \in [-10, 10]$.

Ergänzungsaufgaben

E - 13) Eine Iteration für die k-dimensionale Optimierung für $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x_1, \ldots, x_k) \;\to\; \min$$

kann durch komponentenweise Optimierung erfolgen:
i) Bestimme einen Startvektor $x^0 := (x_1^0, \ldots, x_k^0)$, setze $x^0 = x^i$.
ii) Minimiere f für die erste Komponente

$$f(z, x_2^i, \ldots, x_k^i) \;\to\; \min_z \;,$$

setze $x_1^{i+1} \;=\; z^* \;=\; \arg\min f(z, x_2^i, \ldots, x_k^i)$.
iii) Führe die Minimierung wie in ii) für alle weiteren Komponenten durch,

$$f(x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, \ldots, z, \ldots, x_k^i) \;\to\; \min_z \;.$$

iv) Wiederhole die komponentenweise Optimierung ab Schritt ii) bis eine vorgegebene Toleranz eingehalten wird.

Erstellen Sie eine Prozedur für diese Optimierung und testen Sie diese Iteration für einfache Polynomfunktionen, wie etwa

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - \theta_1)^2 + (x_2 - \theta_2)^2 + (x_3 - \theta_3)^2$$

Hinweis: Für die univariate Optimierung verwende man `optimize()`.

E - 14) $Y \in \mathbb{R}^{25}$ ist ein Beobachtungsvektor (Datei BE14_Y) eines multiplen Regressionsmodells

$$Y \;=\; X\theta$$

mit dem Parameter $\theta \in \mathbb{R}^4$ und der Designmatrix $X \in \mathbb{R}^{25\times 4}$ (Datei BE14_X). Es soll der Kleinste-Quadrate-Schätzer für θ und das Bestimmtheitsmaß berechnet werden.