Winfried Auzinger
Klaus Felsenstein
Dirk Praetorius

SS 2011
5. April 2011

Übungsaufgaben zur VL Computermathematik

Serie 6

Generelle Anmerkung zu den Maple-Übungen

Alle Ihre Maple-Code sollten Sie so weit wie möglich auf Korrektheit testen. Bei vielen Aufgaben gibt es innerhalb von Maple eigentlich schon fertige Lösungen (mit denen man vergleichen kann). Es spricht aber nichts dagegen, so etwas als Übungsaufgabe zu verwenden (auch in anderen Übungen berechnen oder beweisen Sie Dinge, die schon andere vor Ihnen berechnet bzw. bewiesen haben).

Aufgabe 6.1*. Berechnen Sie mit Hilfe von Maple die erste und die zweite Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^3 + \sqrt{x^5 + \sqrt{x^7}}}$$

und produzieren Sie einen sinnvollen gestalteten Plot, der die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ in einer gemeinsamen Grafik darstellt ($x \in (0,1]$).

Hinweis: Schauen Sie in folgende Hilfe-Seiten: `?diff`, `?sqrt`, `?plot`. Hilfreich ist auch `plots[display]` (aus dem `plots`-package) zum gleichzeitigen Anzeigen mehrerer plots `p[i]`, die man zuvor mittels `p[i] := plot(...):` generiert hat. (? Was passiert, wenn Sie `p[i] := plot(...);` mit ; statt : verwenden ?)

Was heißt 'sinnvoll gestaltet'? – Der Verlauf der drei geplotteten Funktionen soll gut erkennbar sein.

Aufgabe 6.2*. Welche Manipulationen mit Mengen (Datentyp `set`) sind in Maple verfügbar? Recherchieren Sie das (`?set`) und geben Sie je ein Beispiel für die Verwendung an. Bilden Sie auch mit Hilfe von Maple die Mengen

$$D_n := \bigcup_{i=1}^{n} M_i$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$, wobei

$$M_i = \left\{ \frac{i}{n}, \frac{n}{n-i+1} \right\} \text{ falls diese Menge 2-elementig ist, ansonsten } \{\,\}.$$

Aufgabe 6.3*. In den Vorlesungsunterlagen (Teil I / Abschnitt 6) wurde eine Integrationsformel ('Quadraturformel') konstruiert, der Gestalt $Q(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$, wobei die Koeffizienten α_i zu vorgegebenen Knoten $x_i \in [0,1]$ so bestimmt werden, dass die Formel für alle Polynome $p(x)$ vom Grad $\leq n$ exakt ist, d.h. $Q(p) = \int_0^1 p(x)\,dx$.

Konstruieren Sie mit Hilfe von Maple in analoger Weise eine andere Quadraturformel

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i f(x_i)$$

mit der Eigenschaft $Q(p) = \int_0^1 \exp(x)\,p(x)\,dx$ für alle Polynome $p(x)$ vom Grad $\leq n$. Überprüfen Sie die Richtigkeit Ihrer Implementierung für einige konkrete Werte von n und vorgegebene Knoten $x_0, \ldots, x_n$.

Anmerkung: Derartige Quadraturformeln verwendet man in der Praxis für 'schwierigere' Integranden (also f kein Polynom) für Zwecke der numerischen Approximation des bestimmten Integrals.

Aufgabe 6.4*. Die *Stirling'sche Formel* liefert eine einfach auswertbare asymptotische Näherung von $n!$ für große Werte von n:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{für } n \to \infty.$$

Überprüfen Sie diese Aussage experimentell, indem Sie den Verlauf der beiden Größen mit wachsendem n in Form einer Grafik darstellen. (`with(plots); ?pointplot`)

Hinweis: $\pi =$ `Pi`. Für die Fakultät verwendet Maple die übliche Notation $n!$. Für die Euler'sche Zahl e gibt es kein vordefiniertes Symbol. Sie können aber, wenn erwünscht, die Variable e natürlich selbst mit dem entsprechenden Wert belegen.

Aufgabe 6.5. Exportieren Sie eines der Worksheets aus den vorhergehenden Aufgaben im LaTeX-Format und zeigen Sie, wie man es mit LaTeX kompiliert. (Siehe Hinweis in Vorlesungsunterlagen, Teil I.)

Aufgabe 6.6. Generieren Sie mit Hilfe einer Schleife die rekursiv definierte Folge

$$u_i := a\,u_{i-1} + (-1)^{n-i} b_i, \quad i = 1, \ldots, n; \quad u_0 \text{ vorgegeben}$$

(Für u_i etc. schreibt man `u[i]` etc. – indizierte Variablen.) Aufgrund der beobachteten Werte für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist leicht zu erkennen, wie die allgemeine Lösung aussieht (man sieht das auch direkt ganz leicht). Implementieren Sie diese Lösungsformel ebenfalls in einer Schleife und überprüfen Sie experimentell, dass sich für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ dasselbe ergibt wie wenn man die ursprüngliche Rekursion ablaufen lässt.

Anmerkung: Dieses Beispiel ist elementar. Bei komplizierter gebauten Rekursionen (wo man die Gestalt der Lösung nicht leicht erkennt) kann dieser 'experimentelle Zugang' manchmal ganz nützlich sein. Damit soll nicht gesagt sein, dass man immer nur blind herumexperimentieren soll – man muss auch nachdenken, aber der Computer kann einem dabei assistieren. Abgesehen davon sind in Maple viele Algorithmen implementiert, die ein durchschnittlicher Benützer gar nicht kennt (sozusagen: in Software gegossenes mathematisches Wissen).

Aufgabe 6.7. Ein Praxis-Tipp: Manchmal ist es übersichtlicher, wenn eine Eingabe nicht sofort ausgewertet wird (ähnlich wie bei den 'faulen' Befehlen). Dazu 'kapselt' man den Ausdruck zwischen `'...'`. Beispiel:

```
> v := 'cos(Pi)';
```

$$\cos(\pi)$$

```
> v;
```

$$-1$$

Die erste Auswertung entfernt nur die Quotes '...', danach erst wird wirklich ausgewertet. Manchmal ist das tatsächlich *notwendig:* Versuchen Sie einmal, die durch folgende Prozedur definierte Funktion zu plotten:

```
> f := proc(t) if t<0 then -1 else 1 end if end proc:
> plot(f(t),t=-1..1);
```

Das funktioniert nicht. Versuchen Sie diesen Effekt zu verstehen und zu erklären. Mittels geeigneter Setzung von Quotes funktioniert es. Zeigen Sie, wie.

Aufgabe 6.8. Der Operator `@` dient zur Komposition von Funktionen, z.B. `(sin@cos)(x)` bedeutet dasselbe wie `sin(cos(x))`. `@@` steht für die funktionale Potenz, z.B. `(sin@@2)(x)` bedeutet dasselbe wie `sin(sin(x))`.[1]

Definieren Sie mit Hilfe dieser Operatoren die von einem Parameter $k \in \mathbb{Z}$ abhängige Funktion $g(x,k) = e^{k \sin^k(\ln(\cos x))}$ in der Form `g:=`*Funktionsausdruck*. Schreiben Sie zum Vergleich auch (ohne Verwendung von @) eine Prozedur

```
G := proc(x,k) ...end proc;
```

die dasselbe leistet, und verifizieren Sie, dass die beiden Funktionen identisch wirken. Testen Sie für $k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.

[1] Hinweis: Die Notation $f^k(x)$ wird nicht einheitlich verwendet. Für $k \geq 0$ bedeutet es manchmal $f(x)^k$ (Werte von f zur k-ten Potenz erhoben), oft jedoch die k-fache Anwendung $f(f(f(\ldots(x)))$ (funktionale Potenz). Hier ist letzteres gemeint. Man bedenke auch, was $f^k(x)$ für negative k bedeutet.