

Übungen zur Vorlesung Computermathematik

Serie 4

Aufgabe 4.1*. Wir betrachten die Funktion $f(N) = C N^{-\alpha}$ für gegebene $C, \alpha > 0$. Wenn man f in einem doppellogarithmischen Plot abbildet, d.h. man plottet $\log f(N)$ über $\log N$ (vgl. die Funktion `loglog` in MATLAB), so ist die Konvergenzrate α gerade als negative Steigung einer Geraden sichtbar. Formulieren Sie diese Beobachtung als Lemma mit Beweis in \LaTeX . Speichern Sie Ihre Datei unter `loglog.tex` ins Verzeichnis `serie04`.

Aufgabe 4.2*. Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Für $N \in \mathbb{N}$ und $x_j := a + j(b-a)/N$ für $j = 0, \dots, N$ definieren wir die **summierte Mittelpunktsregel**

$$I_N := \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^N f((x_{j-1} + x_j)/2). \quad (1)$$

Da I_N eine Riemann-Summe ist, gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = \int_a^b f dx.$$

Man kann sogar zeigen, dass für $f \in C^2[a, b]$

$$\left| \int_a^b f dx - I_N \right| = \mathcal{O}(N^{-2})$$

gilt. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
int = mittelpunktsregel(a,b,f,n)
```

die für eine Folge $N = 2^k$ und $k = 0, \dots, n$ die Werte I_N berechnet und als Vektor `int` zurückgibt. Speichern Sie Ihre Datei unter `mittelpunktsregel.m` ins Verzeichnis `serie04`.

Aufgabe 4.3*. Betrachten Sie das Integral $I := \int_0^1 \exp dx$. Berechnen Sie mithilfe der vorausgegangenen Aufgabe eine Folge I_N von Approximationen. Plotten Sie den Fehler $E_N = |I - I_N|$ und den Fehlerschätzer $\delta_N = |I_{2N} - I_N|$ in einem doppellogarithmischen Plot. Verifizieren Sie das Konvergenzverhalten $\mathcal{O}(N^{-2})$, indem Sie eine Gerade mit Gefälle 2 in den Plot einzeichnen. Beschriften Sie die Grafik geeignet und exportieren Sie diese als EPS-File. Speichern Sie Ihre Datei unter `test.m` ins Verzeichnis `serie04`.

Aufgabe 4.4*. Binden Sie die EPS-Graphik aus Aufgabe 4.3 in ein \LaTeX -Dokument in einer `figure`-Umgebung ein. Ersetzen Sie die MATLAB-Beschriftung mittels `\psfrag`. Schreiben Sie ferner einen geeigneten Text, der *ausführlich* beschreibt, was man in der Abbildung sieht: Welche Größen werden abgebildet (Formeln!)? Was wird wie geplottet? Was sieht man mit Hilfe der eingezeichneten Geraden etc.? Speichern Sie Ihre Datei unter `mittelpunktsregel.tex` ins Verzeichnis `serie04`.

Aufgabe 4.5. Binden Sie den erstellten MATLAB-Code der vorausgegangenen Aufgaben mit Hilfe des `listings`-Pakets in ein \LaTeX -Dokument ein. Dabei sollen MATLAB-Schlüsselwörter in fett-rot hervorgehoben und Kommentarzeilen kursiv-grün dargestellt werden. Speichern Sie Ihre Datei unter `listings.tex` ins Verzeichnis `serie04`.

Aufgabe 4.6. Ersetzen Sie in der summierten Mittelpunktsregel (1) die f -Auswertung $f((x_{j-1} - x_j)/2)$ durch $f(x_{j-1})$. Welche Konvergenzrate beobachten Sie jetzt? Erzeugen Sie eine Graphik, in der Sie die summierte Mittelpunktsregel und die Modifikation zusammen mit zugehörigen Konvergenzgeraden geeignet plotten. Binden Sie diese Graphik in ein L^AT_EX-Dokument ein und dokumentieren Sie Ihre Beobachtungen. Speichern Sie Ihre Datei unter `comparison.tex` ins Verzeichnis `serie04`.

Aufgabe 4.7. Klären Sie mit Hilfe des WWW, welche Funktionalität der folgende L^AT_EX-Code bereitstellt. Bereiten Sie vor, den Code zeilenweise erklären zu können.

```

1 \newsavebox{\tmptext}%
2 \newenvironment{mycolorbox}[1]%
3 { \def\tmpcolor{#1}%
4   \begin{lrbox}{\tmptext}%
5     \begin{minipage}{\textwidth}%
6   }%
7 { \end{minipage}%
8   \end{lrbox}%
9   \colorbox{\tmpcolor}{\usebox{\tmptext}}}%
10 }
```

Schreiben Sie einen Beispielcode, in dem die Verwendung erklärt wird. Speichern Sie Ihre Datei unter `mycolorbox.tex` ins Verzeichnis `serie04`.

Aufgabe 4.8. Schreiben Sie eine Umgebung `myitemize` und ein parameterloses Makro `\myitem`, das bei Verwendung

```

1 \begin{myitemize}
2 \myitem Punkt 1
3 \myitem Punkt 2
4 \myitem Punkt 3
5 \end{myitemize}
```

eine Auzählung folgenden Stils realisiert:

Punkt 1

Punkt 2

Punkt 3

Schreiben Sie ein kurzes L^AT_EX-Dokument, in dem Sie an mindestens zwei Stellen Ihre `myitemize`-Umgebung verwenden. Speichern Sie Ihre Datei unter `myitemize.tex` ins Verzeichnis `serie04`.

Hinweis: Verwenden Sie einen Zähler und die vorausgegangene Aufgabe.

Aufgabe 4.9. Schreiben Sie einen beliebigen Text mit Überschrift und mindestens 400 Worten in L^AT_EX. Als Schriftgröße wählen Sie 12pt. Gliedern Sie den Text in mindestens 2 Sections. Tragen Sie alle Eigennamen in einen Index ein, der am Ende des Dokuments ausgegeben wird. Speichern Sie Ihre Datei unter `index.tex` ins Verzeichnis `serie04`.

Aufgabe 4.10. Üblicherweise zeichnet man Konvergenzgraphen mit (ggf. farbiger) durchgehender Linie und mit Markern, um berechnete Punkte zu kennzeichnen. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `texlegend(x1,y1,y2,art,text)`, die eine „Legende“ in einen `loglog`-Graphen zeichnet. Dabei ist $(10^{x_1}, 10^{y_1})$ der linke obere Punkt und $(10^{x_2}, 10^{y_2})$ der linke untere Punkt der Legende. Ein „Eintrag“ in der Legende bestehe aus der Linie (in entsprechender Farbe), dem entsprechenden Marker in der Mitte dieser Linie und einem fortlaufendem Text, der später mittels `\psfrag` in L^AT_EX ersetzt werden kann. Das Cell-Array `art` enthält die Einträge in der Legende (und ihr Design), z.B. `art = {'r.', 'bx', '--go'}` für 3 Einträge. Das Cell-Array `text` enthält die zugehörigen Text-Einträge der Legende, z.B. `text = {'Fehler', 'Schaetzer', 'O(N-2)'}` für den Plot aus Aufgabe 4.3. Binden Sie Ihren Code mittels `listings`-Paket in ein L^AT_EX-Dokument ein. Speichern Sie Ihre Datei unter `texlegend.tex` ins Verzeichnis `serie04`.