Winfried Auzinger
Klaus Felsenstein
Dirk Praetorius

Sommersemester 2011
16. März 2011

Übungen zur Vorlesung Computermathematik

Serie 3

Aufgabe 3.1*. Welche Zeitschrift versteckt sich hinter der Abkürzung *Appl. Numer. Math.*? Wie ist der vollständige Titel? Was ist die aktuelle Ausgabe? Schreiben Sie ein Literaturverzeichnis, das zwei Artikel aus der letzten Ausgabe dieser Zeitschrift enthält. Welche Zeitschrift hat die Abkürzung *Math. Comput.*? Wie ist der vollständige Titel? Wie lautet die nunmehr korrekte Abkürzung? Was ist die aktuelle Ausgabe? Erweitern Sie das Literaturverzeichnis um zwei Artikel aus der aktuellen Ausgabe dieser Zeitschrift. Erweitern Sie Ihr Literaturverzeichnis um ein englisches Buch von Wolfgang Hackbusch sowie dessen Dissertation. Um die Dissertation zu finden, können Sie das *Mathematics Genealogy Project* nutzen, siehe `http://www.genealogy.ams.org`. Speichern Sie Ihre Datei unter `literatur.tex` ins Verzeichnis `serie03`.

Aufgabe 3.2*. Wie lauten die korrekten Abkürzungen für die Zeitschriften *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *SIAM Journal on Scientific Computing* und *Mathematics of Computation*? Welchen Ampelstatus haben diese Zeitschriften? Welche Ausgaben sind frei verfügbar? Schreiben Sie das Ergebnis Ihrer Recherche in eine geeignete 3-spaltige Tabelle der Form

Titel der Zeitschrift	Abkürzung laut `mathscinet`	Verfügbarkeit
Journal of Computational and Applied Mathematics	...	...

Speichern Sie Ihre Datei unter `journal.tex` ins Verzeichnis `serie03`.

Aufgabe 3.3*. Für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den **einseitigen Differenzenquotienten**

$$\Phi(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{für } h > 0$$

und $\Phi(0) := f'(x)$. Nach Voraussetzung gilt $\lim\limits_{h\to 0} \Phi(h) = \Phi(0)$. Beweisen Sie mittels Satz von Tayler, dass für $f \in C^2(\mathbb{R})$ gilt

$$|\Phi(0) - \Phi(h)| = \mathcal{O}(h),$$

und bestimmen Sie dabei die Konstante, die sich in der Landau-Notation versteckt, möglichst genau. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in Form eines Lemmas mit Beweis in LaTeX. Speichern Sie Ihre Datei unter `diffquot.tex` ins Verzeichnis `serie03`.

Aufgabe 3.4*. Für $f \in C^2(\mathbb{R})$ gilt $e_h := |\Phi(h) - \Phi(0)| = \mathcal{O}(h)$ mit der Funktion Φ aus Aufgabe 3.3. Für allgemeines $f \in C^1(\mathbb{R})$ beobachtet man aber nur $e_h = \mathcal{O}(h^\alpha)$ für ein $\alpha \in (0,1]$. Die Konstante α nennt man **Konvergenzordnung**. Mit dem Ansatz $e_h = ch^\alpha$ erfüllt dann die Größe $\delta_h := |\Phi(h) - \Phi(h/2)|$ die Abschätzung

$$e_h(1 - 2^{-\alpha}) \le \delta_h \le e_h(1 + 2^{-\alpha}),$$

d.h. es gilt ebenso $\delta_h = \mathcal{O}(h^\alpha)$. Mit dem weiteren Ansatz $\delta_h = Ch^\alpha$ erhält man für h und $h/2$ zwei Gleichungen, aus denen man die **experimentelle Konvergenzordnung** α und die zugehörige Konstante C berechnen kann:

$$\alpha = \log(\delta_h/\delta_{h/2})/\log(2) \quad \text{sowie} \quad C = \delta_h/h^\alpha.$$

Formulieren Sie diesen Aufgabentext in eigenen Worten und mit allen rechnerischen Zwischenschritten in LaTeX. Erweitern Sie das Dokument aus Aufgabe 3.3.

Aufgabe 3.5. Sei $\Phi(h)$ der Differenzenquotient aus Aufgabe 3.3. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
fprimex = diff(f,x,h0,tau,filename)
```

die mit $h_n := 2^{-n}h_0$ die Folge $\Phi(h_n)$ berechnet, bis

$$|\Phi(h_n) - \Phi(h_{n+1})| \leq \tau \cdot \max\{|\Phi(h_n)|, |\Phi(h_{n+1})|\}$$

gilt. In diesem Fall werde `fprimex` $:= \Phi(h_{n+1})$ als Approximation von $f'(x)$ zurückgegeben. Wird als *optionaler* Parameter `filename` übergeben, so soll eine Tabelle (`tabular`-Umgebung) in ein ASCII-File geschrieben werden, das später mit `\input{filename}` in ein LaTeX-Dokument eingebunden werden kann. Die Tabelle habe folgende Form:

n	h_n	$\Phi(h_n)$	$\lvert\Phi(h_n) - \Phi(h_{n-1})\rvert$	C	α
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Für $n = 0$ bleiben die Spalten 4–6 leer. Die experimentelle Konvergenzrate α sowie die zugehörige Konstante C sollen basierend auf (h_{n-2}, h_{n-1}, h_n) berechnet werden. Für $n = 1$ bleiben daher die letzten beiden Spalten leer. Für n verwende man Dezimaldarstellung, für α Fixpunktdarstellung mit 2 Nachkommastellen (z.B. 1.23) und für $\Phi(h_n)$ Exponentialdarstellung mit 12 Nachkommastellen. Die übrigen Daten sollen in Exponentialdarstellung mit 3 Nachkommastellen ausgegeben werden (z.B. $1.378e - 3$).
Hinweis. Siehe MATLAB `help` zu `fopen`, `fclose`, `fprintf`, `varargin`, `nargin`

Aufgabe 3.6. Wählen Sie eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R})$ und ein $x \in \mathbb{R}$, und binden Sie den tabellarischen Output aus Aufgabe 3.5 für $\tau = 10^{-12}$ in das LaTeX-Dokument aus Aufgabe 3.3–3.4 ein. Dabei soll eine `table`-Umgebung verwendet werden.

Aufgabe 3.7. Schreiben Sie folgende Definition in eine geeignete Umgebung, die Sie mittels `\newtheorem` definieren: Für $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \lambda \leq 1$ und eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ist der Raum $C^{k,\lambda}(\Omega)$ der hölderstetigen Funktionen durch

$$C^{k,\lambda}(\Omega) := \big\{ f \in C^k(\Omega) \,\big|\, \|f\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)} < \infty \big\}$$

definiert. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)}$ die entsprechende Höldernorm

$$\|f\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)} := \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| \leq k}} \|\partial^\alpha f\|_{\infty,\Omega} + \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| = k}} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

Offensichtlich ist $C^{0,1}(\Omega)$ gerade der Raum aller Lipschitz-stetigen Funktionen.

Aufgabe 3.8. Die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei hölderstetig $f \in C^{1,\alpha}(a,b)$ mit $0 < \alpha < 1$. Zeigen Sie, dass für $x \in (a,b)$ der einseitige Differenzenquotient dann

$$|\Phi(h) - f'(x)| = \mathcal{O}(h^\alpha)$$

erfüllt. Inwiefern verallgemeinert diese Beobachtung das Resultat aus Aufgabe 3.3? Schreiben Sie Ihr Ergebnis in Form eines Lemmas mit Beweis in LaTeX, wobei Sie für beides geeignete Umgebungen verwenden sollen.