Winfried Auzinger
Klaus Felsenstein
Dirk Praetorius

Sommersemester 2011
09. März 2011

Übungen zur Vorlesung
Computermathematik

Serie 2

Die Aufgaben mit Stern (*) sind bis zur Übung in der kommenden Woche vorzubereiten. Kopieren Sie bitte die Source-Codes auf Ihren Account auf der `lva.student.tuwien.ac.at` *und überprüfen Sie vor der Übung, ob diese mittels* `latex` *übersetzt werden können.*

Aufgabe 2.1*. Schreiben Sie eine `satz`-Umgebung, die untenstehendes Layout hat. Der Zähler soll von Kapitel und Abschnitt abhängen. Optional soll ein Name für den Satz vergeben werden dürfen. Verwenden Sie diese Umgebung in einem Dokument mit mindestens einem Kapitel (`chapter`), und zwei Abschnitten (`section`). Schreiben Sie pro Abschnitt jeweils zwei beliebige Sätze aus Ihrer Analysis-Vorlesung ab. Legen Sie für jeden Satz ein geeignetes `\label` fest. Speichern Sie Ihre Datei unter `satz.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

SATZ 1.1.2. (*Satz von Bolzano-Weierstrass*): In einem endlich-dimensionalen normierten Raum X hat jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 2.2*. Nehmen Sie sich ein beliebiges Analysis-Buch und schreiben Sie einen Satz inklusive Beweis ab. Für den Satz verwenden Sie die Umgebung aus Aufgabe 2.1, für den Beweis schreiben Sie sich eine eigene Umgebung. Alle etwaigen Referenzen sollen mit `\label` und `\ref` etc. gesetzt werden. Speichern Sie Ihre Datei unter `analysis.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Aufgabe 2.3*. Schreiben Sie eine `myenumerate`-Umgebung mit zugehörigem Zähler und geben Sie mittels dieser die 24 Groß- und Kleinbuchstaben des Griechischen Alphabets in folgender Form aus

(i) A, α

(ii) B, β

(iii) Γ, γ etc.

Bauen Sie auf der `itemize`-Umgebung auf. Schreiben Sie dazu ein Makro `\myitem`, welches den Befehl `\item` geeignet verwendet. Beachten Sie, dass die griechischen Großbuchstaben nur dann als eigene LaTeX-Befehle vorliegen, wenn Sie *nicht* mit den lateinischen übereinstimmen. Speichern Sie Ihre Datei unter `enumerate.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Aufgabe 2.4*. Schreiben Sie eine Umgebung für Lemmata analog zu der aus Aufgabe 2.1, wobei Lemmata und Sätze gemeinsam numeriert werden. Formulieren Sie die folgende Aussage als Lemma, beweisen Sie dieses mit Techniken der Linearen Algebra und schreiben Sie Lemma und Beweis in LaTeX, wobei Sie für den Beweis die Umgebung aus Aufgabe 2.2 verwenden: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $\sum_{j,k=1}^n x_j A_{jk} x_k > 0$, so ist A regulär. Speichern Sie Ihre Datei unter `laxmilgram.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Aufgabe 2.5. Mit Hilfe der vorausgegangenen Aufgabe kann man das *Lemma von Lax-Milgram* im Fall endlich-dimensionaler Räume beweisen: E seien X ein endlich-dimensionaler Innenproduktraum über $\mathbb{R}$ mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$, $a(\cdot,\cdot)$ eine Bilinearform auf X mit $a(v,v) > 0$ für alle $v \in X$ und $F : X \to \mathbb{R}$ linear. Dann gibt es ein eindeutiges $u \in X$ mit $a(u,v) = F(v)$ für alle $v \in X$. Um dies zu beweisen, macht man den Ansatz $u = \sum_{k=1}^n x_k v_k$ und zeigt, dass der Koeffizientenvektor $x \in \mathbb{R}^n$ eindeutig existiert. Formulieren Sie das Lemma von Lax-Milgram inklusive Beweis in LaTeX und erweitern Sie das Dokument aus der vorausgegangen Aufgabe.

Aufgabe 2.6. Die Matrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ liege in Blockform

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

vor mit $L_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Sind L_{11} und L_{22} regulär, so ist L regulär, und die Inverse ist gegeben durch

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & 0 \\ -L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Formulieren Sie diese Aussage inklusive Beweis in LaTeX. Speichern Sie Ihre Datei unter `inverse.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Aufgabe 2.7. Schreiben Sie ein LaTeX-File, in dem Sie den folgenden Satz von Brezzi formulieren. Definieren Sie geeignete Makros für die Normen sowie die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$. Speichern Sie Ihre Datei unter `brezzi.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Satz (Brezzi 1974). Es seien X und Y Hilbert-Räume. Ferner seien $a : X \times X \to \mathbb{R}$ und $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen und $X_0 := \big\{x \in X \,:\, b(x,\cdot) = 0 \in Y^*\big\}$. Unter den Voraussetzungen

- $\alpha := \inf\limits_{v\in X_0\setminus\{0\}} \dfrac{a(v,v)}{\|v\|_X^2} > 0$, d.h. $a(\cdot,\cdot)$ ist elliptisch auf X_0,
- $\beta := \inf\limits_{y\in Y\setminus\{0\}} \sup\limits_{x\in X\setminus\{0\}} \dfrac{b(x,y)}{\|x\|_X\|y\|_Y} > 0$.

gilt dann folgende Aussage: Für jedes $(x^*,y^*) \in X^* \times Y^*$ gibt es eine eindeutige Lösung $(x,y) \in X \times Y$ des sogenannten Sattelpunktproblems

$$\begin{array}{lcll} a(x,\widetilde{x}) \;+\; b(\widetilde{x},y) & = & x^*(\widetilde{x}) & \text{for all } \widetilde{x} \in X, \\ b(x,\widetilde{y}) & = & y^*(\widetilde{y}) & \text{for all } \widetilde{y} \in Y. \end{array} \tag{1}$$

Aufgabe 2.8. Schreiben Sie ein LaTeX-File mit dem Algorithmus der Gauss-Elimination, wobei bei einer allfälligen Implementierung der obere Index (k) an den Koeffizienten entfallen kann.

Input: Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit LU-Zerlegung, rechte Seite $b \in \mathbb{K}^n$

for $k = 1,\dots,n-1$
  for $i = k+1,\dots,n$
    $\ell_{ik} = a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$
    $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \ell_{ik}b_k^{(k)}$
    for $j = k+1,\dots,n$
      $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik}a_{kj}^{(k)}$
    end
  end
end

Output: nicht-triviale Einträge der Matrizen $L, U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $u_{ij} := a_{ij}^{(i)}$, sowie modifizierte rechte Seite $y \in \mathbb{K}^n$ mit $y_i := b_i^{(i)}$.

Aufgabe 2.9. Schreiben Sie folgenden Text: Die Definition der Gleitkommazahlen erfordert den folgenden Satz aus der Grundvorlesung zur Analysis, siehe z.B. Kapitel 5 in *Analysis I* von O. FORSTER:

Satz 1.1. Zu fixierter **Basis** $b \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ und gegebenem $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ existieren ein **Vorzeichen** $\sigma \in \{\pm 1\}$, **Ziffern** $a_j \in \{0,1,\dots,b-1\}$ und ein **Exponent** $e \in \mathbb{Z}$ mit

$$x = \Big(\sigma \sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}\Big) b^e \quad \text{und} \quad a_1 \neq 0.$$

Man bezeichnet diese Darstellung als **normalisierte Gleitkommadarstellung** oder ***b*-adische Darstellung** von x. ■

Aufgabe 2.10. Schreiben Sie folgenden Text unter der Verwendung geeigneter Makros. Das Symbol $\pm$ with dabei mit `\pm` erzeugt: Mit Hilfe von Satz 1.1 lassen sich die Gleitkommazahlen wie folgt definieren: Zu gegebener **Basis** $b \in \mathbb{N}_{\ge 2}$, **Mantissenlänge** $t \in \mathbb{N}$ und **Exponentialschranken** $e_{\min} < 0 < e_{\max}$ definieren wir die Menge der **normalisierten Gleitkommazahlen** $\mathbb{F} := \mathbb{F}(b,t,e_{\min},e_{\max}) \subset \mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{F} = \{0\} \cup \Big\{ \Big(\sigma \sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}\Big) b^e \;\Big|\; \sigma \in \{\pm 1\}, a_j \in \{0,\dots,b-1\}, a_1 \neq 0, e \in \mathbb{Z}, e_{\min} \le e \le e_{\max} \Big\}.$$

Die endliche Summe $a = \sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}$ bezeichnet man als **(normalisierte) Mantisse** einer Gleitkommazahl.