Winfried Auzinger
Klaus Felsenstein
Dirk Praetorius

Sommersemester 10
26. Mai 2010

Übungen zur Vorlesung Computermathematik

Serie 9

Die Aufgaben mit Stern (*) sind bis zur Übung in der kommenden Woche vorzubereiten. Kopieren Sie bitte die Source-Codes auf Ihren Account auf der `lva.student.tuwien.ac.at` *und überprüfen Sie vor der Übung, ob diese mittels* `latex` *übersetzt werden können.*

Aufgabe 9.1*. Suchen Sie in `http://www.ams.org/mathscinet` jeweils einen wissenschaftlichen Artikel von Winfried Auzinger, Klaus Felsenstein und Dirk Praetorius heraus. Speichern Sie die bibliographischen Daten in einer Datei `artikel.bib` ins Verzeichnis `serie09`, wobei Sie die Einträge durch einfaches Kopieren aus MathSciNet übernehmen sollen.

Aufgabe 9.2*. Schreiben Sie ein kurzes LaTeX-Dokument, in dem Sie `artikel.bib` aus Aufgabe 9.1 einbinden und alle drei Artikel zitieren. Speichern Sie die Datei `artikel.tex` ins Verzeichnis `serie09`, und erstellen Sie ein `Makefile` für einen vollständigen Kompiliervorgang (d.h. `latex`, `bibtex`, $2\times$ `latex`).

Aufgabe 9.3*. Schreiben Sie einen 10-minütigen `beamer`-Vortrag über ein beliebiges Resultat Ihrer Analysis oder Lineare Algebra Vorlesung. Der Vortrag soll die Formulierung sowie den Beweis (bzw. die Beweisideen) und ggf. die Konsequenzen enthalten. Speichern Sie die Datei unter `vortrag.tex` ins Verzeichnis `serie09`.

Aufgabe 9.4*. Erstellen Sie ein Handout (4 Folien pro Seite) Ihres Vortrags und speichern Sie dieses als `handout.tex` sowie in kompilierter Form als `handout_IhrNachname.pdf` ins Verzeichnis `serie09`.

Aufgabe 9.5. Schreiben Sie folgende Definition: Für $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \le \lambda \le 1$ und eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ist der Raum $C^{k,\lambda}(\Omega)$ der hölderstetigen Funktionen durch

$$C^{k,\lambda}(\Omega) := \big\{ f \in C^k(\Omega) \,\big|\, \|f\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)} < \infty \big\}$$

definiert. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)}$ die entsprechende Höldernorm

$$\|f\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)} := \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\le k}} \|\partial^\alpha f\|_{\infty,\Omega} + \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|=k}} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

Offensichtlich ist $C^{0,1}(\Omega)$ gerade der Raum aller Lipschitz-stetigen Funktionen. Man kann zeigen, dass $C^{k,\lambda}(\Omega)$ mit der entsprechenden Norm ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 9.6. Für eine differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $x\in\mathbb{R}$ definiert

$$\Phi(h) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{für } h>0$$

den **einseitigen Differenzenquotienten**. Nach Definition gilt

$$\lim_{h\to 0^+} \Phi(h) = f'(x).$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass für eine C^2-Funktion

$$|\Phi(h) - f'(x)| = \mathcal{O}(h)$$

gilt und bestimmen Sie die Konstante, die sich in der Landau-Notation versteckt möglichst genau. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in Form eines Lemmas mit Beweis in LaTeX.

Aufgabe 9.7. Die differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei hölderstetig $f\in C^{1,\alpha}(a,b)$ mit $0<\alpha<1$. Zeigen Sie, dass für $x\in(a,b)$ der einseitige Differenzenquotient dann

$$|\Phi(h) - f'(x)| = \mathcal{O}(h^\alpha)$$

erfüllt. Inwiefern verallgemeinert diese Beobachtung das vorausgegangene Resultat? Schreiben Sie Ihr Ergebnis in Form eines Lemmas mit Beweis in LaTeX.

Aufgabe 9.8. Konstruieren Sie eine Funktion $f\in C^{1,\alpha}(a,b)$ mit $0<\alpha<1$. Verifizieren Sie numerisch, dass der einseitige Differenzenquotient mit Ordnung $\mathcal{O}(h^\alpha)$ konvergiert. Visualisieren Sie dies geeignet und binden Sie das Bild inklusive Beschreibung in ein LaTeX Dokument ein.