Winfried Auzinger
Klaus Felsenstein
Dirk Praetorius

Sommersemester 10
05. Mai 2010

Übungen zur Vorlesung
Computermathematik

Serie 7

Die Aufgaben mit Stern (*) sind bis zur Übung in der kommenden Woche vorzubereiten. Kopieren Sie bitte die Source-Codes auf Ihren Account auf der `lva.student.tuwien.ac.at` *und überprüfen Sie vor der Übung, ob diese mittels* `latex` *übersetzt werden können.*

Aufgabe 7.1*. Schreiben Sie ein LaTeX-File, in dem Sie den folgenden Satz von Brezzi formulieren. Definieren Sie geeignete Makros für die Normen sowie die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$. Speichern Sie die Datei unter `brezzi.tex` ins Verzeichnis `serie07`.

Theorem (Brezzi 1974). Let X be a Hilbert space and Y be a reflexive Banach space. Let $a : X \times X \to \mathbb{R}$ and $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ be continuous bilinear forms. We define $X_0 := \big\{x \in X \,:\, b(x,\cdot) = 0 \in Y^*\big\}$ and assume

- $\alpha := \inf\limits_{v\in X_0\backslash\{0\}} \dfrac{a(v,v)}{\|v\|_X^2} > 0$, i.e. $a(\cdot,\cdot)$ is elliptic on X_0,
- $\beta := \inf\limits_{y\in Y\backslash\{0\}} \sup\limits_{x\in X\backslash\{0\}} \dfrac{b(x,y)}{\|x\|_X\|y\|_Y} > 0.$

Then, for any $(x^*,y^*) \in X^* \times Y^*$, there is a unique solution $(x,y) \in X \times Y$ of

$$\begin{array}{lcll} a(x,\widetilde{x}) \;+\; b(\widetilde{x},y) & = & x^*(\widetilde{x}) & \text{for all } \widetilde{x} \in X, \\ b(x,\widetilde{y}) & = & y^*(\widetilde{y}) & \text{for all } \widetilde{y} \in Y. \end{array} \tag{1}$$

Aufgabe 7.2*. Schreiben Sie eine `satz`-Umgebung, sodass Aufruf mittels

```
\begin{satz} ... \end{satz}
```

auf fortlaufende Numerierung der Form **Satz 1.1.2.** führt, wohingegen

```
\begin{satz}[Bolzano-Weierstraß] ... \end{satz}
```

Satz von Bolzano-Weierstraß ergibt, ohne dass der Zähler angezeigt oder weitergezählt wird. Der Zähler soll von Kapitel und Abschnitt abhängen. Verwenden Sie diese Umgebung in einem Dokument mit mindestens einem Kapitel (`chapter`), und zwei Abschnitten (`section`). Schreiben Sie pro Abschnitt jeweils zwei beliebige Sätze aus Ihrer Analysis-Vorlesung ab. Speichern Sie die Datei unter `satz.tex` ins Verzeichnis `serie07`.

Aufgabe 7.3*. Verwenden Sie `\newtheorem`, um eine *Satz*-Umgebung zu erzeugen. Schreiben Sie eine *Beweis*-Umgebung. Der Beweis werde (als Teil der Umgebung) mit fett-kursiv ***Beweis*** eingeleitet. Das Beweisende werde (als Teil der Umgebung) mittels rechtsbündigem `\blacksquare` $\blacksquare$ angezeigt, d.h. $\blacksquare$ steht rechtsbündig in der letzten Zeile des Beweises. Formulieren Sie den folgenden Satz inkl. ausführlichem Beweis in LaTeX. Speichern Sie die Datei unter `stetig.tex` ins Verzeichnis `serie07`:

Satz 1. *Für eine stetige Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist gleichmäßig stetig.*

(ii) *f erlaubt eine stetige Fortsetzung aufs kompakte Intervall $[a,b]$, d.h. es gibt eine stetige Funktion $\widehat{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\widehat{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$.*

In diesem Fall ist die stetige Fortsetzung $\widehat{f}$ sogar eindeutig.

Aufgabe 7.4*. Schreiben Sie ein LaTeX-File mit folgendem Inhalt. Alle Referenzen sollen dynamisch sein. Das Symbol ∂ erzeugt man mit `\partial`, $\overline{\Omega}$ mit `\overline{\Omega}`. Speichern Sie den Code unter `ref.tex` ins Verzeichnis `serie07`.

We shall assume that Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^d$ with smooth boundary $\Gamma := \partial\Omega$. Here, *smooth* just means that we may use the **integration by parts formula**

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\, v\, dx + \int_\Omega u\, \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx = \int_\Gamma u v n_j\, ds \quad \text{for } u, v \in C^1(\overline{\Omega}), \tag{2}$$

where n_j denotes the j-th component of the outer normal vector of Ω. We stress some immediate consequences of (2):

- With the Laplace operator $\Delta u := \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, we obtain the **first Green's formula**

$$\int_\Omega (-\Delta u) v\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, ds \quad \text{for } u \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ and } v \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{3}$$

- Using the first Green's formula (3) twice, we prove the **second Green's formula**

$$\int_\Omega (-\Delta u) v\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, ds = \int_\Omega u(-\Delta v)\, dx + \int_\Gamma u\, \frac{\partial v}{\partial n}\, ds \quad \text{for } u, v \in C^2(\overline{\Omega}). \tag{4}$$

Aufgabe 7.5. Schreiben Sie folgende Formel in LaTeX: Die Matrix L sei eine untere Dreiecksmatrix und liege in Blockform

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

vor. Dann läßt sich die Inverse von L offensichtlich in Blockform

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & 0 \\ -L_{22}^{-1} L_{21} L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

schreiben.

Aufgabe 7.6. Definieren Sie über den Befehl `\newtheorem` Umgebungen für Satz, Lemma und Folgerung. Dabei soll nur ein Zähler für alle drei Umgebungen verwendet werden. Die Zählung erfolge kapitelweise in der Form 2.1, 2.2, etc. Schreiben Sie einen beliebigen Satz inklusive seiner Folgerung(en) aus der Vorlesung zur Linearen Algebra ab, wobei alle Referenzen dynamisch sein sollen.

Aufgabe 7.7. Schreiben Sie ein LaTeX-File mit dem Algorithmus der Gauss-Elimination, wobei bei einer allfälligen Implementierung der obere Index (k) an den Koeffizienten entfallen kann.

Input: Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit LU-Zerlegung, rechte Seite $b \in \mathbb{K}^n$

`for` $k = 1, \dots, n-1$
    `for` $i = k+1, \dots, n$
        $\ell_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$
        $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \ell_{ik} b_k^{(k)}$
        `for` $j = k+1, \dots, n$
            $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k)}$
        `end`
    `end`
`end`

Output: nicht-triviale Einträge der Matrizen $L, U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $u_{ij} := a_{ij}^{(i)}$, sowie modifizierte rechte Seite $y \in \mathbb{K}^n$ mit $y_i := b_i^{(i)}$.

Aufgabe 7.8. Schreiben Sie in eine `enumerate`-Umgebung die 24 Groß- und Kleinbuchstaben des Griechischen Alphabets, z.B.

(1). A, α
(2). B, β
(3). Γ, γ etc.

wobei die griechischen Großbuchstaben nur dann als eigene LaTeX-Befehle vorliegen, wenn Sie *nicht* mit den lateinischen übereinstimmen.