Winfried Auzinger
Klaus Felsenstein
Dirk Praetorius

SS 2010
(26. März 2010)

Übungsaufgaben zur VL Computermathematik

Serie 4

Die Aufgaben mit Stern (*) sind bis zur nächsten Übung fix vorzubereiten und werden dort abgeprüft (Minimalerfordernis).

Kopieren Sie Ihre Worksheets auf Ihren Account auf `lva.student.tuwien.ac.at`. *Überprüfen Sie vor der Übung, ob Ihre Codes unter Maple 12 auf* `lva` *einwandfrei funktionieren. Es wird empfohlen, für jedes Beispiel im Verzeichnis* `serie04` *ein eigenes Worksheet mit dem Namen* `aufgabey-y.mw` *anzulegen. Alle zu verfassenden Prozeduren sind zu kommentieren und – je nach Angabe – mit verschiedenen Werten für die Parameter auszutesten.*

Suchen und finden Sie unten 4 grüne und 4 rote Ostereier: [Numerische] Lineare Algebra mit Maple. Die Aufgaben dienen unter anderem auch dazu, sich an die übliche Notation und Terminologie der (Numerischen) Linearen Algebra zu gewöhnen, wie sie im Scientific Computing üblich ist.

Manche der Funktionen aus dem `LinearAlgebra`*-Paket vereinfachen nicht automatisch. Es empfiehlt sich daher manchmal, mittels* `map(simplify,...)` *oder* `map(factor,...)` *etc. eine gewünschte Vereinfachung explizit anzufordern.*

Aufgabe 4.1*. Stellen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ dar, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \xi & 1 & 0 & \eta \\ 0 & 1 & 0 & \xi & 0 \\ \xi & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \eta & 0 \end{bmatrix},$$

$\xi, \eta \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^4$ beliebig. Geben Sie auch alle Werte für ξ und η an, für die gilt $\mathrm{Rang}(A) < 4$.

Aufgabe 4.2*. Unter dem *dyadischen Produkt* zweier Spaltenvektoren $x \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^n$ versteht man die $m \times n$-Matrix $x \cdot y^\top$ (Spaltenvektor mal Zeilenvektor im Sinn des Matrixproduktes). Derartige Matrizen kann man also z.B. in einer zweispaltigen Matrix `xy` in komprimierter Form speichern, die aus den beiden Spalten `x` und `y` besteht. Dies nennen wir unser (komprimiertes) 'dyadisches Format'.

Überlegen Sie, dass das Matrixprodukt zweier kompatibel dimensionierter dyadischer Produkte wieder als dyadisches Produkt dargestellt werden kann (man beachte die Assoziativität der Matrixmultiplikation!). Schreiben Sie eine Prozedur `dymmul(xy::Matrix,uv::Matrix)`, die das entsprechende Matrixprodukt zweier derartiger Objekte `xy` und `uv` in effizienter Weise berechnet und wieder im dyadischen Format zurückgibt. Eine zweite Prozedur `dymvmul(xy::Matrix,v::Vector)` soll die durch `xy` repräsentierte Matrix in effizienter Weise mit dem Vektor `v` multiplizieren.

Man beachte: Es ist nicht erforderlich (und auch nicht sinnvoll), die Matrix $x \cdot y^\top$ explizit zu erzeugen. Sehen Sie jeweils Dimensionsüberprüfung vor; ggf. mit `error` abbrechen.

Aufgabe 4.3*. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $C \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $U, V \in \mathbb{R}^{n\times k}$ gegeben. Dann gilt die *Sherman-Morrison-Woodbury*-Formel

$$(A + UCV^\top)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\,(C^{-1} + V^\top A^{-1}U)^{-1} V^\top A^{-1}$$

in dem Sinn, dass $A + UCV^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann invertierbar ist wenn $(C^{-1} + V^\top A^{-1}U)^{-1} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ wohldefiniert ist, und in diesem Fall gilt die behauptete Identität.

Dies kann man z.B. dazu verwenden, um für bereits berechnetes A^{-1} die Inverse $(A + UCV^\top)^{-1}$ zu bestimmen. Für $k < n$ benötigt man dafür nur mehr zusätzlich die 'kleine' Inverse $(C^{-1} + V^\top A^{-1}U)^{-1} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, abgesehen von den zusätzlich erforderlichen Matrixmultiplikationen. Praxisrelevant ist das also für $k \ll n$.

Man implementiere diese Art der Berechnung von $(A + UCV^\top)^{-1}$ in einer Prozedur `SMWInverse(A,U,V::Matrix)` mit Dimensionsüberprüfung und Abfrage auf Singularität (`error ...`). [1]

Eine kleine zusätzliche Spielerei (freiwillig): Für die Argumente U und V sollen jeweils auch eindimensionale Objekte, d.h. Spaltenvektoren zulässig sein: `SMWInverse(A::Matrix,U,V::{Matrix,Vector})`. Dies entspricht dem Spezialfall $k = 1$ der SMW-Formel, mit Spaltenvektoren U und V. Muss man diesen Fall im Code der Prozedur separat berücksichtigen?

[1] Man beachte jedoch: [Nicht]Singularität lässt sich bei Rechnung in Gleitpunktarithmetik aufgrund der auftretenden Rundungsfehler nicht zweifelsfrei entscheiden – das ist ein 'numerisch unscharfer' Begriff.

Aufgabe 4.4*. Man denke sich eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in 4 Blöcke unterteilt, $A = \begin{bmatrix} U & V \\ Y & X \end{bmatrix}$, und zwar so dass $U \in \mathbb{R}^{k\times k}$ und $X \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ quadratisch $(1 \le k < n)$. Weiters sei $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Überlegen Sie, wie die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mittels Block-Elimination auf die Lösung zweier kleinerer Systeme der Dimension k bzw. $n-k$ zurückgeführt werden kann, und implementieren Sie das in Form einer Prozedur `SchurSolve(A::Matrix,b::Vector,k::posint)`. Verwenden Sie `LinearSolve` für die kleinen Systeme.

Anmerkung: Eines der beiden kleinen Systeme hat die Koeffizientenmatrix $U \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Das andere hat die Koeffizientenmatrix $S \in \mathbb{R}^{k\times k}$ – überlegen Sie, wie S aussieht [2] (S nennt man das *Schur-Komplement* von U). U und S müssen invertierbar sein, sonst funktioniert das nicht in der hier beschriebenen Weise.

Aufgabe 4.5. Für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt die elementare Identität

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Bild}(A) \oplus \mathrm{Kern}(A^\top)$$

im Sinne einer direkten Summe von Unterräumen, wobei der Bildraum von A auf den Kern von $A^\top$ orthogonal steht. Schreiben Sie eine Prozedur `orthosum(A::Matrix)`, die zu gegebenem A Orthogonalbasen von Bild(A) und von Kern$(A^\top)$ (z.B. spaltenweise in zwei Matrizen) zurückliefert (vgl. `? GramSchmidt`). Testen Sie einige einfache Beispiele.

(Wie bestimmt man die Unterräume Bild(A) und Kern$(A^\top)$? Maple nimmt Ihnen diese Arbeit ab – finden Sie es selbst heraus. Die betreffenden Funktionen im Paket `LinearAlgebra` heißen aber nicht 'kernel' oder 'image' o.ä., sondern anders; irgendwas mit '`... Space`'.)

Aufgabe 4.6. Betrachten Sie 2×2-Matrizen der Gestalt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}$. Die Eigenwerte [3] von A bezeichnen wir mit λ_1, λ_2. Konstruieren Sie eine multiplikative Zerlegung der Gestalt

$$A = L\,B\,L^{-1}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & y \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Wie lauten x und y? (Eine Möglichkeit: Überlegen Sie, wie b und c mit Hilfe der λ_i ausgedrückt werden können und stellen Sie dann auch x und y mit Hilfe der λ_i dar. Das kann man alles auch relativ einfach 'per Hand' erledigen, aber mit Maple ist es bequemer zu rechnen.)

Aufgabe 4.7. Verwenden Sie Maple als Experimentierlabor, um die allgemeine Gestalt der Matrix J^p $(p \in \mathbb{N})$ zu vermuten, wobei

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

(eine sogenannte Jordan-Matrix). Schreiben Sie eine Prozedur `JordanPower(lambda,n,p)`, die Ihre Vermutung implementiert, und testen Sie. (Sie können auch versuchen, die Formel per Hand exakt zu beweisen, aber das ist hier nicht verlangt. Das Werkzeug dafür wäre der binomische Lehrsatz in Kombination mit einer geeigneten additiven Zerlegung von J.)

Aufgabe 4.8. In MATLAB gibt es den Befehl `spy` zur grafischen Darstellung der Besetzungsstruktur schwach besetzter Matrizen (etwa so: weißes Kasterl = Nullelement, schwarzes Kasterl = ungleich Null).

Schreiben Sie eine Prozedur `spy(A::Matrix,...)`, die etwas ähnliches macht. Verwenden Sie z.B. `plots[pointplot]` und spielen Sie mit den dort zur Verfügung stehenden Optionen (`? plot/options`), um ein halbwegs ansprechendes Resultat zu erzeugen. (Vielleicht haben Sie eine bessere Idee; das ist natürlich auch eine Frage des Programmieraufwandes.)

Vgl. auch `? plots[matrixplot]`.

---

[2] Achtung: Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ.

[3] Eigenwerte = reelle oder komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$; $\lambda_1 = \lambda_2$ ist ein zulässiger Spezialfall. Siehe `? Determinant` bzw. `? CharacteristicPolynomial` bzw. `? Eigenvalues`.