# ComputerMathematik - Einführung in Maple / Teil II

## (kompetente Verwendung; Ausdrücke und Umformungen; das wichtigste zu Datenstrukturen, Funktionen und Prozeduren)

Winfried Auzinger (SS 2010)

Institut für Analysis und Scientific Computing

*Hinweis:*

Die während der VO entstehende fertige Version dieses Vortrags wird nach der VO auf der CompMath - Homepage als **.mw** und **.pdf** zum Download bereitgestellt.

```
> restart; # restart engine; clear workspace
```

Die Worksheets der Vorlesung sind auf verschiedene Inhalte fokussiert, wobei sich sich öfters Wiederholungen zu früheren Vorlesungen ergeben (insbesondere zu dem Überblick in Teil I), wenn es vom Aufbau her sinnvoll ist (ein bisschen Redundanz schadet nicht).
Manches wird zunächst nur angedeutet und folgt später genauer.

Durcharbeiten der (ggf. individuell modifizierten) Worksheets ist (zumindest für den Neueinsteiger) empfehlenswert. Es handelt sich jedoch um keine komplette 'Referenz'. Zum Nachschlagen verwendet man die Online-Hilfe, und die zur Verfügung gestellte alphabetische Befehlsliste soll die Orientierung erleichtern.

Einige **Praxis-Tipps:**

- Verwendung der Online-Hilfe ist Teil es routine-mäßigen Umganges mit Maple. Vieles erkennt man schnell anhand der dort angegebenen Beipiele.

- Mischen symbolischer und numerischer Operanden in Ausdrücken ist prinzipiell kein Problem. Dasselbe gilt für Funktionen und Prozeduren: Für Parameter können (soweit sinnvoll) sowohl Variablennamen als auch numerische Werte übergeben werden.

- Bei manchen Befehlen ist das genaue Verhalten nicht immer a priori klar, etwa was die genaue Funktionalität oder die kompatibilität mit diversen Datenstrukturen betrifft. Ein gewisses Aufmaß an 'trial and error' ist daher nicht zu vermeiden. Eine gute Strategie besteht darin, zunächst einfachere Spezialfälle oder kleiner dimensionierte Probleme auszutesten, bevor man sich einer allgemeineren Problemstellung widmet.

- Man beobachtet immer wieder, dass von Maple angezeigte Zwischenergebnisse vom Benützer manuell zur Weiterverarbeitng abgetippt werden. Das ist ungeschickt, unflexibel und fehleranfällig. Man bemühe sich daher um einen 'automatisierten' Datenfluss, mittels Zuweisung an Variablen und ggfs. Selektion von Teilausdrücken (vgl. z.B. **? op**)

- Beim Durchspielen von Rechnungen abhängig von einem Parameter, z.B. n, probiert man oft Spezialfälle separat aus (n=1, n=2, n=3, ...). Spätestens ab (z.B.) n=4 zahlt es sich meistens aus, den Code für allgemeines n zu formulieren und dann (ggf. in einer Schleife über n) abzuarbeiten, bzw. Prozeduren zu verwenden.

- Bei der Eingabe von Ausdrücken in konventioneller Textform ('1D-Math', wie hier durchwegs)

lohnt es sich manchmal, den Ausdruck zunächst mit '...' zu 'kapseln' (siehe 2.3) und erst nachher auszuwerten (zur Kontrolle), z.B.

```
> summe := 'sum((1+i+i^2)/(1+i^2+i^4),i=1..5)';
```

$$summe := \sum_{i=1}^{5} \frac{1+i+i^2}{1+i^2+i^4}$$

```
> summe;
```

$$\frac{437}{273}$$

# 1. Prinzipielles über Auswertungen und Umformungen

```
> x := 0; # Wertzuweisung mit :=
```

$$x := 0$$

```
> a:=1, b:=2; # das geht nicht!
Error, `:=` unexpected
> a,b := 1,2; # das geht
```

$$a, b := 1, 2$$

Da Maple neben numerischen Berechnungen in erster Linie **exakte, symbolische** Formelmanipulationen durchführt, sind einige Grundprinzipien zu beachten.

Grundsätzlich wird **exakt** gerechnet; numerische Approximation nach Bedarf

```
> rationale_zahl:=2/6:
  rationale_zahl, evalf(rationale_zahl);
```

$$\frac{1}{3}, 0.3333333333$$

Eine reelle Zahl kann i.allg. nicht numerisch exakt angegeben werden,

```
> sqrt(2), # algebraische Zahl
  sin(3/2);  # transzendente Zahl
```

$$\sqrt{2}, \sin\left(\frac{3}{2}\right)$$

aber man kann natürlich damit rechnen:

```
> sqrt(2)*sqrt(2), arcsin(sin(3/2));
```

$$2, \frac{3}{2}$$

bzw. nunerische Approximation anfordern:

```
> evalf(sqrt(2)), sqrt(2.0);
```

$$1.4142135624, 1.4142135624$$

```
> evalf(sin(3/2)), sin(1.5); # (Bogenmaß)
```

$$0.9974949866, 0.9974949866$$

Rationale Zahlen werden automatisch gekürzt, aber nicht automatisch als Dezimalbruch dargestellt, auch wenn dieser endlich ist, es sei denn, man verwendet Notation mit Dezimalpunkt:

```
> a:=2/5; b:=2./5; convert(a-b,rational);
```

$$a := \frac{2}{5}$$

$$b := 0.4000000000$$
$$0$$

```
> ? convert # diverse Konversionen
```

Viele Ergebnisse sind in einem '**generischen Sinn'** zu interpretieren, d.h.
Maple geht davon aus, was 'normalerweise' - außer in Spezialfällen - zutrifft
(alles andere wäre Unfug):

```
> x:='x';  y:=1/x;
```

$$x := x$$
$$y := \frac{1}{x}$$

```
> subs(x=0,y); # (x=0 einsetzen): das geht hier natürlich nicht
Error, numeric exception: division by zero
```

Als Programmierer hat man daher auf relevante Sonderfälle Acht zu geben.

Oder: Test auf Gleichheit

```
> evalb(a=1); # ('evaluate boolean')
```

$$false$$

...im Gegensatz zu

```
> a:=3-2; evalb(a=1);
```

$$a := 1$$
$$true$$

Nicht alle naheliegenden Vereinfachungen erfolgen automatisch;
**simplify** versucht hier sein bestes zu geben:

```
> sin(x)^2+cos(x)^2;
```

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2$$

```
> simplify(%);
```

$$1$$

```
> p:=(x-1)*x-2*(x-1);
```

$$p := (x-1)\,x - 2\,x + 2$$

```
> simplify(p);
```

$$x^2 - 3\,x + 2$$

**factor** bzw **.expand** faktorisiert bzw. multpliziert aus:

```
> factor(%);
```

$$(x-1)\,(x-2)$$

```
> expand(%);
```

$$x^2 - 3\,x + 2$$

**collect** ordnet nach Potenzen einer Variablen:

```
> collect(%,x);
```

$$x^2 - 3\,x + 2$$

Gleichungslösung (**solve**):
Beispiel für Verhalten abhängig von einer **Systemvariablen:**

```
> _EnvExplicit; # Voreinstellung: false
```

$$false$$

```
> solve(x^5-x^4+x^3+33*x^2);
```

$$0,\ 0,\ RootOf\left(_Z^3-_Z^2+_Z+33,\ label=_L1\right)$$

```
> _EnvExplicit:=true; # vgl. ? solve
```

$$_EnvExplicit := true$$

```
> solve(x^5-x^4+x^3+33*x^2);
```

$$0,\ 0,\ -\frac{1}{3}\left(449+9\sqrt{2489}\right)^{1/3}+\frac{2}{3\left(449+9\sqrt{2489}\right)^{1/3}}+\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\left(449+9\sqrt{2489}\right)^{1/3}-\frac{1}{3\left(449+9\sqrt{2489}\right)^{1/3}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\,I\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}\left(449+9\sqrt{2489}\right)^{1/3}-\frac{2}{3\left(449+9\sqrt{2489}\right)^{1/3}}\right),$$
$$\frac{1}{6}\left(449+9\sqrt{2489}\right)^{1/3}-\frac{1}{3\left(449+9\sqrt{2489}\right)^{1/3}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\,I\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}\left(449+9\sqrt{2489}\right)^{1/3}-\frac{2}{3\left(449+9\sqrt{2489}\right)^{1/3}}\right)$$

Oder gleich numerisch lösen:

```
> fsolve(x^5-x^4+x^3+33*x^2-x);
```

$$-2.8251006466,\ 0.0000000000,\ 0.0302760688$$

Vorsicht bei Reihenentwicklungen, z.B. geometrische Reihe oder Taylorreihe:

```
> sum(x^i,i=0..infinity); # konvergiert nur für |x|<1!
```

$$-\frac{1}{x-1}$$

```
> taylor(1/(1-x),x=0);     # Konvergenzradius ist 1!
```

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+O\left(x^6\right)$$

Generell wird bei 'anonymen' Objekten angenommen, dass es sich um komplexe Zahlen handelt:

```
> u+u; Re(%); # Re=Realteil
```

$$2\,u$$
$$2\,\Re(u)$$

Man kann aber Eigenschaften definieren, z.B. Reellwertigkeit:

```
> u:='u';assume(u,real); about(u); Re(u),Im(u);
```

$$u := u$$

```
Originally u, renamed u~:
  is assumed to be: real
```

$$u\sim,\ 0$$

```
> Re(u),Im(u); # Im=Imaginärteil
```

$$u\sim,\ 0$$

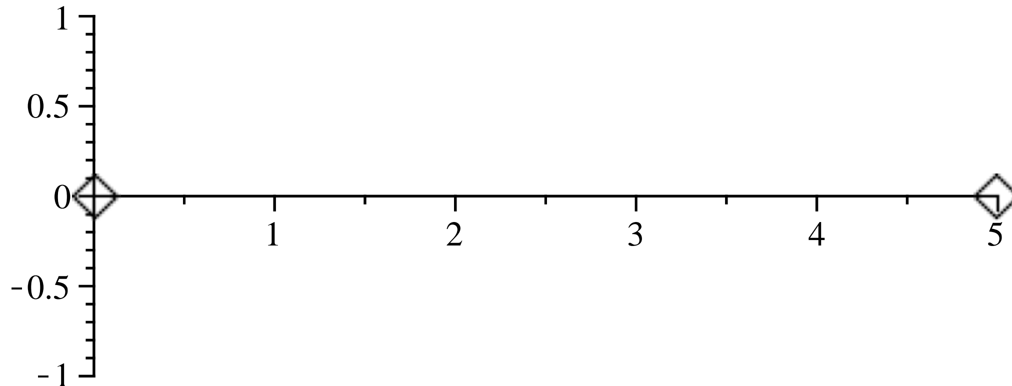
Vieles ist in eigene **packages** ausgelagert, z.B. für diverse Plot-Tools:

```
> with(plots); # aktiviert package
```

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve,*

*sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot* ]

```
> pointplot([[0,0],[5,0]],symbolsize=32,scaling=constrained);
```




oder: plots[pointplot](...)

Es lohnt sich, mal zu schauen, was es alles für spezielle packages gibt. (siehe UE)

```
> ? index[package]
```

Wichtig: Arbeiten mit online-Hilfe (mit vielen Beispielen!), z.B. Befehlsliste:

```
> ? command
```

Dokumentation eines packages:

```
> ? plots
```

Einige weitere Beispiele für Auswertungen:

```
> evalf(Pi*c); # Hier: Ausgabe auf 10 Dezimalstellen ist eingestellt
               # (interne Rechengenauigkeit ist separat einstellbar)
```

$$3.1415926536\, c$$

```
> evalc(1/(1+I)); # I = imaginäre Einheit
```

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, \mathrm{I}$$

Lösen eines (linearen) Gleichungssystems:

```
> x,y:='x,y';
  solve({x+y=1,2*x+2*y=2},{x,y});
```

$$x, y := x, y$$

$$\{x = -y + 1, y = y\}$$

oder z.B. so:

```
> eqsys := [x+y=1,2*x+3*y=4];
  vars := [x,y];
  solve(eqsys,vars);
```

$$eqsys := [x+y=1, 2\,x+3\,y=4]$$
$$vars := [x, y]$$
$$[[x=-1, y=2]]$$

# 2. Elemente der Maple-Sprache

## *2.1 Zeichensatz*

Groß/Kleinschreibung ist signifikant:

```
> A1,a1,  evalb(A1=a1);
```

*Array*(0 ..3, { }, *datatype* = *anything*, *storage* = *rectangular*, *order* = *Fortran_order*), *Array*(0 ..2, {(0) = 1, (1) = 2, (2) = 3}, *datatype* = *anything*, *storage* = *rectangular*, *order* = *Fortran_order*), *false*

```
> my_var01; # zulässiger Name (mit _)
```

*my_var01*

## *2.2 Bezeichner (Namen; alle gültigen Symbole, aus Zeichen zusammengesetzt)*

```
> end1;
```

*end1*

```
> alpha,Omega; # wird griechisch angezeigt
```

$$\alpha, \Omega$$

```
> pi; # Vorsicht: pi ist nicht Pi, wird aber gleich angezeigt
```

$$\pi$$

```
> simplify(Pi=pi); evalb(%);
```

$$\pi = \pi$$

*false*

***Reservierte*** Namen sind i.w. Befehle der Maple-Sprache (Tabelle 2.2):

```
> end:=1; # unzulässiger Name ('end' ist reserved)
Error, reserved word `end` unexpected
```

Aber: Jede beliebige Zeichenfolge kann man mit \`...\` zu einem Namen machen:

```
> `end`:=infinity; `end`;
```

$$end := \infty$$
$$\infty$$

```
> `manchmal kann auch so ein doofer name praktisch sein` := 0;
```

*manchmal kann auch so ein doofer name praktisch sein* := 0

```
> myPi := 3.14: # : statt ; unterdrückt Ausgabe
> myPi;
```

3.1400000000

'Ditto'-Operator (sparsam verwenden!): %, %%, %%%

```
> a:=1; b:=2; c:=3;
```
$$a := 1$$
$$b := 2$$
$$c := 3$$
```
> %,%%,%%%;
```
3, 2, 1
```
> a,b,c := 'a','b','c'; # löscht zugewiesene Werte!
>                        # '...' nicht zu verwechseln mit `...`
```
$$a, b, c := a, b, c$$
```
> a||b, cat(a,b); # Verkettung von Namen zu neuem Namen
```
*ab, ab*

**Beachte:** Ein Name ist nicht dasselbe wie eine Zeichenkette (string):
```
> whattype(`text`), whattype("text");
```
*symbol, string*

**Mehr über Namen, Voreinstellungen, etc.:**
```
> restart;
```
**Indizierte** Namen (systematisch verwenden für indizierte Objekte!)
```
> a[0], whattype(a[0]); # 0 Index wird tiefgestellt angezeigt
```
$a_0$, *indexed*

Auch mehrfache und symbolische Indizes erlaubt:
```
> a[0],b[1,1],c[heute] := 0,1,2;
```
$$a_0, b_{1,1}, c_{heute} := 0, 1, 2$$

Vordefinierte Namen: siehe
```
> ? ininames
```
Zum Beispiel:
```
> I, I^2; Pi; # aber: Euler'sche Zahl e nicht vordefiniert!
```
$$I, -1$$
$$\pi$$
```
> exp(I*Pi), e^(I*Pi);
```
$$-1, e^{I\pi}$$

Aber man kann es so machen:
```
> e:=exp(1); evalf(e), simplify(e^(I*Pi));
```
$$e := e$$
$$2.7182818285, -1$$

Vordefinierte Umgebungsvariablen:
```
> anames('environment');
```
*Testzero, UseHardwareFloats, Rounding, %, _ans, %%%, Digits, index/newtable, mod, %%, Order, printlevel, Normalizer, NumericEventHandlers*

im Gegensatz zu:
```
> anames('user');
```
*e, b, a, c*

Vieles kann man auch über **Tools/Options** einstellen.

```
> Digits; # eingestellte Gleitpunkt-Rechengenauigkeit;
```
$$30$$

```
> Digits:=3;
```
$$Digits := 3$$

```
> evalf(Pi);
```
$$3.1400000000$$

```
> Digits:=30;
```
$$Digits := 30$$

```
> evalf(Pi); # Ausgabe bei mir auf 20 Stellen eingestellt
```
$$3.1415926536$$

Vordefinierte mathematische und logische Konstanten:

```
> constants;
```
$$false, \gamma, \infty, true, Catalan, FAIL, \pi$$

```
> evalf(gamma);
```
$$0.5772156649$$

```
> gamma:=0.6;
Error, attempting to assign to `gamma` which is protected
```

```
> unprotect(gamma); gamma:=0.6; # mit Vorsicht verwenden
```
$$\gamma := 0.6000000000$$

## 2.3 Spezielle Zeichen und ihre syntaktische Bedeutung, z.B.
**: , ( ) ' ' [ ] { }**

Zuweisung: Man ein beliebiges Objekt einen Namen zuweisen:

```
> dingsbums := a+a+b-int(sin(v),v):
> dingsbums;
```
$$2\,a + b + \cos(v)$$

: statt ; unterdrückt Ausgabe.

```
> (x+y)*z; expand(%); # Klammerung
```
$$(x + y)\,z$$
$$z\,x + z\,y$$

```
> a:=1:   a,whattype(a); # a wird ausgewertet
  a:='a': a,whattype(a); # WICHTIG! - Bedeutung der Apostrophe!
```
$$1, integer$$
$$a, symbol$$

Mit einer derartigen Zuweisung (name='name')
wird also eine ggfs. zuvor vorgenommene Zuweisung rückgängig gemacht.

**REGEL**: **Auswertung eines 'gekapselten' Ausdruckes (mit Apostrophen)**
**entfernt genau ein Paar von Apostrophen.**

```
> x:=1;
```
$$x := 1$$

```
> ''x''; %; %;
```

'x'

x

1

```
> a,b,c; whattype(%); # eine FOLGE (exprseq; Basiskonstrukt)
```

*a*, *b*, *c*

*exprseq*

```
> 1,seq(i^2,i=1..5); # generiert Folge mittels `impliziter Schleife'
```

1, 1, 4, 9, 16, 25

[...] und {...} dienen zur Konstruktion von Listen und Mengen
(siehe Teil I und Abschnitt 4 unten):

**Listen** sind statisch allokierte, geordnete lineare Folgen von Objekten in der Form [Folge], Indizierung beginnt mit 1.

```
> primes:=[2,3,5,7];
```

*primes* := [2, 3, 5, 7]

```
> ? list
```

Endliche **Mengen** (im Sinne der mengentheoretischen Definition)
schreibt man in der Form {Folge}, mit allen Eigenschaften von Mengen:

```
> M:={2,2,3,5,7};
```

*M* := {2, 3, 5, 7}

```
> ? set
```

## *2.4 Typen und Operanden*

Jedes Maple-Objekt gehört einem oder mehreren von (vielen) **Typen** an. Typ-Deklaration ist jedoch im allgemeinen nicht erforderlich, und mit Neuzuweisung einer Variablen kann sich auch ihr Typ ändern.

Typ-Überprüfung wird in Prozeduren verwendet, die übergebene Parameter auf ihre Zulässigkeit prüfen sollen.

Beispiele für Typen:

```
> whattype('x');
```

*symbol*

```
> type('x',name), type('x',integer);
```

*true*, *false*

```
> whattype(1);
```

*integer*

```
> type(1,integer), type(1,posint), type(1,negint),
  type(1,rational), type(1,fraction);
```

*true*, *true*, *false*, *true*, *false*

```
> whattype(1/3);
```

*fraction*

```
> type(1/3,fraction), type(1/3,rational);
  # (rational bedeutet integer oder fraction)
```

*true*, *true*

```
> whattype(q[1]); type(q[1],name);
```
$$indexed$$
$$true$$

```
> whattype("Zeichenkette");
```
$$string$$

```
> whattype(3.14); type(3.14,numeric);
```
$$float$$
$$true$$

```
> whattype(1,2,3,4); whattype([%]); whattype({%%});
```
$$exprseq$$
$$list$$
$$set$$

Jedes Maple-Objekt besteht aus einem oder mehreren **Operanden**.
Zugriff mittels **op**(...); benötigt man manchmal bei der fortgeschritteneren Programmierung zur Selektion der intern hierarchisch organisierten Teilausdrücke.

Beispiele:

```
> a:='a';
```
$$a := a$$

```
> nops(a);
```
$$1$$

```
> op(0,a), op(1,a);  # op(0,...) ergibt Typ
```
$$symbol, a$$

```
> op(a);
```
$$a$$

```
> b:=a+1;
```
$$b := a + 1$$

```
> nops(b);
```
$$2$$

```
> op(0,b), op(b);
```
$$`+`, a, 1$$

```
> c:=a^2-2*a+1-5+sin(x);
```
$$c := a^2 - 2\,a - 4 + \sin(1)$$

```
> op(c); # geht rekursiv weiter:
```
$$a^2, -2\,a, -4, \sin(1)$$

```
> op(0,op(1,c)), op(op(1,c));
```
$$`\hat{}`, a, 2$$

```
> op([1,2,3,4]);
```
$$1, 2, 3, 4$$

```
> restart:
```

## 3. Maple-Ausdrücke und Anweisungen

Ein systematischer Überblick inklusive der wichtigsten Datenstrukturen;
Grundbegriffe für Funktionen und Prozeduren

## 3.1 Ausdrücke

Beispiele für Konstanten:

```
> infinity;
```

$$\infty$$

```
> sin(1);
```

$$\sin(1)$$

```
> 3.14E-3;
```

$$0.0031400000$$

```
> 4/6; # wird automatisch gekürzt
```

$$\frac{2}{3}$$

```
> numer(%), denom(%); # Zähler, Nenner
```

$$2, 3$$

```
> z:=3+4*I; whattype(z); # komplexe Zahl
```

$$z := 3 + 4\,I$$

$$complex(extended_numeric)$$

```
> Re(z), Im(z), abs(z), argument(z);
```

$$3, 4, 5, \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

**Einsetzen von Werten** in einen Ausdruck: **subs**

```
> subs(x=2,x^2+y^2);
```

$$4 + y^2$$

Verwendung arithmetischer Operatoren:

```
> infinity*infinity; whattype(%);
```

$$\infty$$

$$extended_numeric$$

```
> 1-infinity, infinity/infinity;
```

$$-\infty, undefined$$

```
> x^y; # Potenz
```

$$x^y$$

```
> I^I; simplify(%);
```

$$I^I$$

$$e^{\left(-\frac{1}{2}\pi\right)}$$

Operatoren für Funktionskomposition:

```
> (sin@cos)(x); # Komposition von Funktionen
```

$$\sin(\cos(x))$$

```
> ((x->x^2)@@3)(x); # funktionale Potenz
```

$$x^8$$

oder:

```
> g:=x->x^2; (g@@3)(y); # (Klammerung notwenig)
```

$$g := x \to x^2$$
$$y^8$$

Range-Operator: ('von a bis b')
(wird z.B. für Schleifenkonstrukte verwendet=:

```
> 1..5;
```

$$1\,..5$$

```
> 'sum(i,i=1..5)'; %;
```

$$\sum_{i=1}^{5} i$$
$$15$$

... 1..5 ist aber nicht dasselbe wie die Folge 1,2,3,4,5

```
> x:=1,2,3,4,5; x[1];
```

$$x := 1, 2, 3, 4, 5$$
$$1$$

das ist dasselbe wie:

```
> y:=seq(i,i=1..5); y[1];
```

$$y := 1, 2, 3, 4, 5$$
$$1$$

Diverses:

```
> 5!; # Faktorielle
```

$$120$$

```
> 11 mod 3; # modulo
```

$$2$$

Vergleichsoperatoren:

```
> 1<2; whattype(%);
```

$$1 < 2$$
$$`<`$$

```
> evalb(1<2); # 'evaluate boolean'
```

$$true$$

```
> x,y:='x','y'; evalb(x=y); evalb(x<>y); # 'generisch' korrekt!
```

$$x, y := x, y$$
$$false$$
$$true$$

Weitere Vergleichsoperatoren: <= >= <>

Gleichungen, linke und rechte Seite einer Gleichung:

```
> x=y; evalb(%); # hier braucht man evalb
```

$$x = y$$
$$false$$

```
> eq := x=y; lhs(eq),rhs(eq);
```

$$eq := x = y$$
$$x, y$$

Logische Operatoren: operieren auf Boole'schen Ausdrücken:

```
> 1>2 or 1<2; # wird automatisch ausgewertet (ohne evalb)
```

$$true$$

```
> a=a and a=c;
```

$$false$$

```
> 1<2 xor 1<3;
```

$$false$$

```
> x := not(a=b);
```

$$x := true$$

```
> evalb(1+I*2<3); # !!!
```

$$FAIL$$

```
> FAIL or true, FAIL and true;
```

$$true, FAIL$$

Die Funktion **is** fragt: Ist das wahr? - Beispiele:

```
> is(1,positive);
```

$$true$$

```
> is(I,integer);
```

$$false$$

## 3.2 Weitere Datenstrukturen

* Folge (**exprseq**), Liste (**list**), Menge (**set**): bereits erwähnt

* Weiters: Tabelle (**table**), Feld (**Array**)

**table**: Eine Tabelle ist ein **assoziatives** Feld; dynamische Allokation:

```
> days:=table([Januar=31]);
```

$$days := table([Januar = 31])$$

```
> days[Januar];
```

$$31$$

```
> days[Februar]:=28;
```

$$days_{Februar} := 28$$

Die Inhalte komplexerer Objekte wie tables werden nur `bei Bedarf',
z.B. mittels eval(...) angezeigt:

```
> days;
  eval(days);
```

$$days$$

$$table([Januar = 31, Februar = 28])$$

```
> length(days); # !!!
```

$$4$$

Der Befehl **length** ist mit Vorsicht zu genießen;
er zählt (kontext-abhängig) Ziffern, Zeichen, Speicher o.ä.,
aber z.B. nicht die Anzahl von Tabellenelementen.

```
> ? length
```

Die tatsächliche Anzahl der Einträge erhält man mittels

```
> nops(eval(days)); # eval!
```

$$2$$

Auch: mehrdimensionale Tabellen:

```
> sudokufarbe:=table();
```

$$sudokufarbe := table([\ ])$$

```
> sudokufarbe[eins,zwei]:=grün;
```

$$sudokufarbe_{eins,\ zwei} := grün$$

Man beachte: indizierte Variablen sind nichts anderes als Spezialfälle von tables.

```
> eval(sudokufarbe);
```

$$table([(eins, zwei) = grün])$$

**Array**: Ähnlich wie table, aber -- ganzzahlige Indizierung
-- statische Speicherallokation

```
> a:=Array(-2..-1,0..1); # hier wird der Indexbereich festgelegt
                         # Standard-Initialisierung: alle Werte 0
```

$$a := Array(-2..-1, 0..1, \{\ \}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran_order)$$

```
> eval(a);
```

$$Array(-2..-1, 0..1, \{\ \}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran_order)$$

```
> print(a);
```

$$Array(-2..-1, 0..1, \{\ \}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran_order)$$

```
> a[-1,0];
```

$$0$$

```
> a[-1,0]:=9999999; eval(a);
```

$$a_{-1,\ 0} := 9999999$$

$$Array(-2..-1, 0..1, \{(-1, 0) = 9999999\}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran_order)$$

```
> A:=Array(1..2);A[1],A[2],A[3];
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Error, Array index out of range

```
> A:=Array(1..2,1..3);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A:=Array([[1,2,3],[4,5,6]]); # hier werden Werte mittels Listen
  zugewiesen
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> A, A[1,1];
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, 1$$

```
> ArrayDims(A);
```

$$1..2, 1..3$$

```
> ? Array
```

```
> restart:
```

## 3.3 Funktionen, Prozeduren

**Achtung:** Eine Definition der Form

```
> f(t) := t^2;
```

$$f(t) := t^2$$

definiert **keine Funktion,** sondern eine Variable mit Namen f(t):

```
> f(t), f(1);
```

$$t^2, f(1)$$

Für Funktion: 'Arrow'-Notation verwenden:

```
> f:=t->t^2; eval(f); f(1);
```

$$f := t \to t^2$$
$$t \to t^2$$
$$1$$

Das ist eine 'unspezifizierte' Funktionsauswertung:

```
> f:='f':
> f(s);
```

$$f(s)$$

```
> diff(f(s),s);
```

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(s)$$

Eine Funktion in 2 Variablen:

```
> f := (x,y)->x+x-y;
  f(u,v);
```

$$f := (x, y) \to 2\,x - y$$
$$2\,u - v$$

Auswertungsregel:

Zuerst wird f symbolisch ausgewertet,
dann werden Argumente ausgewertet und eingesetzt
('call by value')

```
> f(sin(1),cos(2));
```

$$2\sin(1) - \cos(2)$$

... Könnte man auch als Prozedur schreiben:

```
> f:=proc(x,y)
>     x-y; # besser explizit: return x+y;
> end proc;
```

$$f := \mathbf{proc}(x, y)\ \ x - y\ \ \mathbf{end\ proc}$$

```
> eval(f); whattype(%);
```

$$\mathbf{proc}(x, y)\ \ x - y\ \ \mathbf{end\ proc}$$
$$\mathit{procedure}$$

```
> f(1,irgendwas), f(irgendwas,1);
```

$$1 - \mathit{irgendwas}, \mathit{irgendwas} - 1$$

```
> f(1);
```

```
Error, invalid input: f uses a 2nd argument, y, which is missing
```

**Funktionen** und **Prozeduren** werden von Beginn an in den Übungen verwendet.
Im einfachsten Fall übergibt man einfach ein oder mehrere Parameter,
die die Prozedur beim Aufruf abarbeitet. Das innerhalb der Prozedur
zuletzt berechnete Objekt wird zurückgegeben.

**Definition einer Prozedur:**

```
> myint := proc(f,var)
    local C, indefinite_integral;   # lokale Variablen
    indefinite_integral := int(f(var),var)+C;
    return Int(f(var),var)=indefinite_integral
  end proc;
```

*myint* := **proc**( *f*, *var*)
**local** *C*, *indefinite_integral*;
*indefinite_integral* := *int*( *f* (*var*), *var*) + *C*; **return** *Int*( *f* (*var*), *var*) = *indefinite_integral*
**end proc**

**Aufruf:**

```
> myint(sin,t);
```

$$\int \sin(t)\, dt = -\cos(t) + C$$

```
> myint(t->sin(sqrt(t)),y);
```

$$\int \sin(\sqrt{y})\, dy = 2\sin(\sqrt{y}) - 2\sqrt{y}\cos(\sqrt{y}) + C$$

### *3.4 Beispiel für eine allgemeinere Prozedur*

Wir schreiben eine [eher sinnlose] Prozedur,
wo jedoch rein syntaktisch ziemlich viel vorkommt
(genaueres später)

```
> restart:
> p:=proc(a::posint,b::posint)
  description "eine sinnlose prozedur";
  local i,s,p;  # lokale Variablen
  global g;     # globale Variablen
  s,p:=a+b,a*b; # Zuweisung

  if (p<s) then # Selektion (if)
    printf("a*b ist kleiner als a+b")
  elif (p=s) then # Vorsicht: elif nicht elseif
    printf("a*b ist gleich a+b")
  else
    printf("a*b ist größer als a+b")
  end if;

  printf("\n");
  for i from a*b to 1 by -1 do # Schleife abwärts
    printf("%d ",i) # formatierte Ausgabe
```

```
   end do;

   i:=0;
   printf("\n");
   while(i<a+b and is(i,prime)) do # while-Schleife
     printf("%d ist < a+b \n",i);
     i:=i+1:
   end do;

   for i from 1 to a*b do
      if is(i,prime) then # (überspringe Primzahlen:)
         next # setze Schleife fort
      end if;
      if is(i^2+1,prime) then
         break # verlasse Schleife
      end if
   end do;

   if (a=10) then # hier provozieren wir Division durch 0
      return 1/(a-10);
   elif (a>10) then
      error "a zu gross!!"; # für Fehler-Exit
   end if

   end proc:
> p(a,b);
Error, invalid input: p expects its 1st argument, a, to be of type posint, but received a
```

**Zu beachten**: Bei Auftreten eines Syntaxfehlers bei der Definition der Prozedur erscheint eine Fehlermeldung, und Cursor springt zu der Zeile, wo das Problem festgestellt wurde.

**Bemerkungen**:

* Es gibt formal nur **einen** Rückgabewert; dieser kann aber im Prinzip ein beliebiges Maple-Objekt sein, auch eine exprseq (für Rückgabe mehrerer Werte)

  (Man kann z.B. auch eine Prozedur schreiben, die eine Prozedur als Wert zurückliefert - später.)

* **Lokale** Variablen sind Prozedur-intern
* **Globale** Variablen sind innen und außen sichtbar, können innerhalb Prozedur auch neu generiert und verändert werden.

Normalerweise sollte Ein/Ausgabe jedoch über Eingangsparameter und Funktionswert erfolgen, nicht 'versteckt' über globale Variablen.

Ausnahme: Sehr große Objekte, die nur einmal im Speicher vorhanden sein sollen.

```
> Describe(p);
```

```
# eine sinnlose prozedur
p( a::posint, b::posint )
```

```
> p(2,7);
a*b ist größer als a+b
14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
```

```
> p(10,0);
Error, invalid input: p expects its 2nd argument, b, to be of type posint, but received 0
```

```
> p(0,1);
Error, invalid input: p expects its 1st argument, a, to be of type posint, but received 0
```

```
> p(2,9);
a*b ist größer als a+b
18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
```

```
> p(11,2); # provoziert error-exit
a*b ist größer als a+b
22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Error, (in p) a zu gross!!
```

Beachte: Bei **Laufzeit-Fehlermeldungen** wird man normalerweise **nicht** darauf hingewiesen, an welcher Stelle der Fehler aufgetreten ist!

Daher wichtig für längere Prozeduren: **Debugger** verwenden (später)

```
> p(10,1); # Laufzeitfehler in Prozedur - wurde oben
           # absichtlich provoziert.
a*b ist kleiner als a+b
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Error, (in p) numeric exception: division by zero
```

```
> restart:
```

# 4. Praktischer Umgang mit Datenstrukturen

... Wir geben jeweils einige **genauere Beispiele zur praktischen Verwendung** von sets, lists, tables etc.

## *4.1 Mengen (set)*

```
> s1 := {seq(-i,i=1..5)};
  s2 := {-2,-2,-1};
```

$$s1 := \{-5, -4, -3, -2, -1\}$$

$$s2 := \{-2, -1\}$$

```
> s1 union s2, s1 intersect s2, s1 minus s2;
```

$$\{-5, -4, -3, -2, -1\}, \{-2, -1\}, \{-5, -4, -3\}$$

```
> member(-1,s1);
```

*true*

```
> max(s1); # maximales Element
```

$$-1$$

Der Befehl **map** wendet eine Funktion **elementweise** an
(verwandt zu **map** ist **zip**)

```
> f:=x->x^2; map(f,s1);
```

$$f := x \to x^2$$

$$\{1, 4, 9, 16, 25\}$$

```
> s:={sin(y),cos(y)};
```

$$s := \{\cos(y), \sin(y)\}$$

Eine allgemeinere Variante von **map** übergibt ein Argument an die
angewendete Funktion:

```
> map(diff,s); # das ist sinnlos
Error, invalid input: diff expects 2 or more arguments, but received 1
```

```
> map(diff,s,y); # differenziere alles nach y
```

$$\{-\sin(y), \cos(y)\}$$

Ansonsten: Variante des **for**-Befehls, um eine Operation auf alle
Elemente einer Menge (oder Liste, etc.) anzuwenden:

```
> for e in s1 do e^2 end do; # praktisch
```

25

16

9

4

1

## *4.2 Listen (list)*

```
> L:=[$1..5]; # $1..5 ist Abkürzung für seq(i,i=1..5)
```

$$L := [1, 2, 3, 4, 5]$$

```
> nops(L); op(L);
```

5

1, 2, 3, 4, 5

```
> L[]; # liefert dasselbe wie op(L)
```

1, 2, 3, 4, 5

```
> L:=[op(L),6]; # Element dazugeben
```

$$L := [1, 2, 3, 4, 5, 6]$$

**map, for .. in** funktionieren analog wie bei sets:

```
> map(exp,L);
```

$$[e, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6]$$

es gibt auch **listlist** (= Liste von gleich langen Listen):

```
> LL:=[[1,1],[2,4],[3,9]];
```

$$LL := [[1, 1], [2, 4], [3, 9]]$$

```
> whattype(LL); type(LL,listlist);
```

*list*

true

Manipulationen mit Listenelementen:

```
> L:=map(x->x^2,L);
```

$L := [1, 4, 9, 16, 25, 36]$

```
> member(9,L);
```

true

```
> member(9,L,'position'); position;
  # Element suchen; Achtung: eigenwillige Syntax
```

true

3

```
> L[position]; # Zugriff auf Element
```

9

Manipulation von Listen:

```
> L1:=[1,2]; L2:=[3,4];
```

$L1 := [1, 2]$

$L2 := [3, 4]$

```
> L:=[op(L1),op(L2)]; # Verknüpfung (Aneinanderhängen)
```

$L := [1, 2, 3, 4]$

```
> L:=[V,V,op(L),H,H,H]; # Elemente vorne,hinten anhängen
```

$L := [V, V, 1, 2, 3, 4, H, H, H]$

```
> convert(L,set);
```

$\{1, 2, 3, 4, H, V\}$

```
> L:=convert(%,list);
```

$L := [1, 2, 3, 4, H, V]$

Einfügen zwischendrin ist etwas mühsam:

```
> L:=[op(1..3,L),eingefuegt,op(4..nops(L),L)];
```

$L := [1, 2, 3, \mathit{eingefuegt}, 4, H, V]$

**Beachte:**
Listen dienen der `geordneten' Aufbewahrung
durchnummerierter Objekte; sie sind aber zum `Rechnen' im Sinne
von Vektorrechnung nur bedingt geeignet. Dafür gibt
es eigene Datenstrukturen (insbesondere **Vector**, siehe unten).

Aber immerhin: Elementare Vektorrechung,
d.h. Linearkombination von Listen funktioniert:

```
> [a,b,c]+2*[x,y,z];
```

$[2 x + a, 2 y + b, 2 z + c]$

Siehe auch

```
> ? ListTools
```

### *4.3 Tabellen (table)*

Eine Tabelle (assoziatives array) erstellt man entweder explizit mittels einer
Elementliste (Default für Indizes ist 1,2,...) oder mittels expliziter
Zuordnung der Elemente zu beliebigen `Indizes'.

```
> t1:=table([cos,sin,tan]);
```

$t1 := \mathit{table}([1 = \cos, 2 = \sin, 3 = \tan])$

```
> t1, eval(t1); t1[1]; indices(t1); entries(t1);
```
$$t1, table([1 = \cos, 2 = \sin, 3 = \tan])$$
$$\cos$$
$$[1], [2], [3]$$
$$[\cos], [\sin], [\tan]$$

```
> t2:=table([Montag=erster,Dienstag=zweiter]);
```
$$t2 := table([Dienstag = zweiter, Montag = erster])$$

```
> t2, eval(t2); t2[Montag]; indices(t2); entries(t2);
```
$$t2, table([Dienstag = zweiter, Montag = erster])$$
$$erster$$
$$[Dienstag], [Montag]$$
$$[zweiter], [erster]$$

tables sind `dynamisch' - man kann beliebig Elemente hinzufügen:

```
> t1[infinity]:=unendlich; eval(t1);
```
$$t1_{\infty} := unendlich$$
$$table([1 = \cos, 2 = \sin, 3 = \tan, \infty = unendlich])$$

## *4.4 Felder (Array)*

(Statische Allokation (d.h. Initialisierung erforderlich);
Arrays beruhen auf einer alternativen, speicher-flexibleren Implementierung von tables (sogenannte 'rectangular tables', **rtables**) .

Vorteil von Arrays: Man kann beliebige ganzzahlige Indexbereiche verwenden, insbesondere auch von 0 weg indizieren
(ist in manchen Anwendungen natürlicher als von 1 weg)

```
> a1:=Array(0..2,[1,2,3]);
```
$$a1 := Array(0 ..2, \{(0) = 1, (1) = 2, (2) = 3\}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran_order)$$

```
> a2:=Array(0..2,0..2);
```
$$a2 := Array(0 ..2, 0 ..2, \{ \}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran_order)$$

```
> a2[0,0]:=x; eval(a2);
```
$$a2_{0, 0} := x$$
$$Array(0 ..2, 0 ..2, \{(0, 0) = x\}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran_order)$$

Hier sind die anderen Elemente (noch) undefiniert.

```
> A1:=Array(0..3); # hier: automatisch Initialisierung mit 0
```
$$A1 := Array(0 ..3, \{ \}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran_order)$$

```
> A1[1];
```
$$0$$

```
> eval(A1); # das ist ewas seltsam
```
$$Array(0 ..3, \{ \}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran_order)$$

```
> #indices(A1);
```

```
> A2:=Array(0..2,0..2,[[1,2,3],[4,5,x]]): eval(A2);
```
$$Array(0 ..2, 0 ..2, \{(0, 0) = 1, (0, 1) = 2, (0, 2) = 3, (1, 0) = 4, (1, 1) = 5, (1, 2) = x\}, datatype = anything, storage = rectangular, order = Fortran_order)$$

```
> A2:=Array([[1,2,3],[4,5,x]]): eval(A2);
```

```
# so sieht es vernünftiger aus
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & x \end{bmatrix}$$

**Anmerkung**:
Bei Datenstrukturen herrscht in Maple ein gewisser 'Wildwuchs'
(z.T. aus historischen Gründen und zwecks Abwärtskompatibilität),
mit teilweise ganz spezifischen Zugriffsfunktionen.

Hier wird nicht alles besprochen; manche packages verwenden ihre
eigenen Datenstrukturen.

**Empfehlung:**

* Verwende **set** für endliche Mengen
* Verwende **list** für (endliche) Folgen von Objekten
* Verwende **table** bei Bedarf für assoziative Arrays
* Verwende **Array** für `Vektoren' bzw `Matrizen', falls
  man flexible Indizierung wünscht (z.B. von 0 weg)

und

- Verwende **Vector** und **Matrix** für Lineare Algebra im **R^n, C^n.**
  Dies sind eigentlich spezielle Arrays (Index beginnt mit 1);
  einfacher im Handling als allgemeine Arrays; viele spezielle Funktionen.

**Vector** und **Matrix** sind für das Rechnen mit Vektoren und Matrizen
(sowohl symbolisch als auch nuemrisch) relevant. Diese werden später bei
der Diskussion des **LinearAlgebra** - Packages genauer besprochen.

=== *Ende Maple / Teil II* ===