Winfried Auzinger
Klaus Felsenstein
Dirk Praetorius

SS 2009
(2. April 2009)

Übungen zur Vorlesung Computermathematik

Serie 5

Die Aufgaben mit Stern (*) sind bis zur Übung in der kommenden Woche fix vorzubereiten und werden dort abgeprüft (Minimalerfordernis).

Kopieren Sie Ihre Worksheets auf Ihren Account auf `lva.student.tuwien.ac.at`*. Überprüfen Sie vor der Übung, ob Ihre Codes unter Maple 12 auf* `lva` *einwandfrei funktionieren. Es wird empfohlen, für jedes Beispiel im Verzeichnis* `serie05` *ein eigenes Worksheet mit dem Namen* `aufgabey-y.mw` *anzulegen. Alle zu verfassenden Prozeduren sind zu kommentieren und – je nach Angabe – mit verschiedenen Werten für die Parameter auszutesten.*

Verwenden Sie konsequent die Online-Hilfe – das ist wichtig für den erfolgreichen praktischen Umgang mit Maple. Insbesondere kommt es immer wieder vor, dass etwas in der Vorlesung aus [noch] nicht im Detail besprochen wurde – dann muss man sich zu helfen wissen. Explizite Verweise auf die Hilfe (z.B. `? set`*) deuten an, dass man sich die entsprechende Hilfe-Seite auf jeden Fall ansehen sollte. Manchen Aufgaben dienen auch der Wiederholung bzw. Vertiefung von Themen, die in der Vorlesung behandelt wurden.*

'Perfekte' Maple-Prozeduren arbeiten mit konsequenter Überprüfung der Zulässigkeit der Eingangsparameter, insbesondere mittels `type`*. Bei den meisten für die Übung zu implementierenden Prozeduren verzichten wir jedoch darauf, es sei denn, es wird explizit verlangt.*

Aufgabe 5.1*. Checken Sie die wesentlichen Systemparameter, die sich unter dem Menüpunkt `Tools/Options...` einstellen lassen, und erkunden Sie ihre Bedeutung.

Aufgabe 5.2*. Eine endliche Menge (`? set`) wird in Maple repräsentiert als eine `exprseq` zwischen geschwungenen Klammern, im einfachsten Fall in der expliziten Gestalt

{ *element1*,*element2*, . . . , *elementn* }

Generieren Sie zwei Mengen von natürlichen Zahlen,

`M[1]:={...}; M[2]:={...};`

und führen Sie folgende Operationen aus.

- Durchschnitt, Vereinigung;
- die beiden Differenzmengen;
- Schreiben Sie eine Prozedur `sumval(M)`, die eine derartige Menge `M` als Eingabeparameter erwartet und die Summe der Werte der Elemente von `M` zurückliefert. (`? for`)
- Schreiben Sie eine Prozedur `membership(e,M[1],M[2])`, die den Wert 0, 1, 2 oder 12 zurückliefert, je nachdem ob `e` in keiner der beiden Mengen, nur in `M[1]`, nur in `M[2]` oder in beiden Mengen enthalten ist.
- Die Hilfe `? set` enthält offenbar keinen Hinweis auf eine Funktion, die die Relation $A \subset B$ realisiert (Test auf Enthaltensein). Recherchieren Sie die betreffende Funktion. Ist es damit auch möglich, auf 'echte Teilmenge' zu testen? Falls nein, schreiben Sie eine Prozedur, die das realisiert.

Aufgabe 5.3*. Führen Sie für die Funktion $f(x) := x^4 - x^2$ mit Hilfe von Maple eine Kurvendiskussion durch (inklusive Plots für $f, f', \ldots$).

Aufgabe 5.4*. Der *Primzahlsatz* macht eine Aussage über die asymptotische Häufigkeit des Auftreten von Primzahlen: Bezeichnet man mit $\pi(n)$ die Anzahl aller Primzahlen $\leq n$, so gilt

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n} \quad \text{für } n \to \infty.$$

(Die Schreibweise '$a_n \sim b_n$' bedeutet $a_n/b_n \to 1$ für $n \to \infty$.)
Überprüfen Sie diese Aussage experimentell unter Verwendung von `nextprime` oder `ithprime` und stellen Sie den Verlauf mit wachsendem n in Form einer Grafik dar. (`with(plots); ? pointplot`)

Aufgabe 5.5. Datum und Uhrzeit; CPU-Zeit

Für Dokumentationszwecke ist es nützlich, Tagesdatum, Wochentag und Uhrzeit als String zur Verfügung zu haben (z.B. für die Ausgabe von Ergebnissen auf externe Dateien – später). Die entsprechende Systemfunktion ist in Maple in dem package `StringTools` versteckt. Recherchieren Sie das und erläutern Sie die Verwendung in einem Worksheet (mit ein paar Varianten).

Die Funktion `time()` dient als 'Stoppuhr' (liefert verbrauchte CPU-Zeit in s seit Beginn der aktuellen Maple-Session). Schreiben Sie irgendeine Schleife, die jeweils am Beginn eines Durchlaufes überprüft, ob eine vorgegebene CPU-Zeit bereits abgelaufen ist. Falls ja, wird die Schleife beendet. (Die Maximalzeit wird als Wert einer Variablen vorgegeben, z.B. `timelimit:=10` vor Beginn der Schleife.)

Aufgabe 5.6. Für viele Befehle gibt es in Maple 'fleißige' und 'faule' (träge, *inert*) Varianten, z.B. `diff, Diff`; `int, Int`. Die Eingabe `Int(x^2,x)=int(x^2,x)` erzeugt als Ausgabe eine übersichtliche Gleichung:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}\,x^3$$

Schreiben Sie eine Prozedur `indefint(expr,var,c)`, die das bewirkt, für einen beliebigen Integranden `expr` und Integrationsvariable `var`. Das dritte Argument `c` soll rechts noch als Integrationskonstante addiert werden. (Man kann dann für `c` einen Variablenamen übergeben oder auch einen konkreten Wert.)

Dasselbe für das bestimmte Integral, d.h. `defint(expr,var,a,b)` für $\int\limits_a^b \ldots$. Testen Sie auch ein uneigentliches Integral (z.B. mit `a=0, b=infinity`). Exportieren Sie Ihr Worksheet im LaTeX-Format und kompilieren Sie es mit LaTeX.
Hinweis: `export TEXINPUTS=:/usr/local/maple12/etc`

Aufgabe 5.7. Analog wie die vorhergehenden Aufgabe, für `sum` und `Sum` (Prozeduren `indefsum` und `defsum`).

Aufgabe 5.8. Ein Praxis-Tipp: Manchmal ist es übersichtlicher, wenn eine Eingabe nicht sofort ausgewertet wird (ähnlich wie bei den trägen Befehlen). Dazu 'kapselt' man den Ausdruck zwischen `'...'`. Beispiel:

```
> v := 'sin(Pi)';
```

$$\sin(\pi)$$

```
> v;
```

$$0$$

Die erste Auswertung 'entfernt nur die Quotes', danach erst wird wirklich ausgewertet. Manchmal ist das tatsächlich *notwendig*: Versuchen Sie einmal, die durch folgende Prozedur definierte Funktion zu plotten:

```
> f := proc(t) if t<0 then -1 else 1 end if end proc:
> plot(f(t),t=-1..1);
```

Überlegen Sie, warum das nicht funktioniert und wie man das es Laufen bringt.
Eine andere Alternative besteht in der Verwendung von `?piecewise` – recherchieren und ausprobieren.

Aufgabe 5.9. Das *Cauchyprodukt* zweier absolut konvergenter Reihen $A := \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ und $B := \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ ist wie folgt definiert. Man denkt sich die beiden Reihen formal miteinander multipliziert und fasst für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$ alle Terme $a_j \cdot b_k$ mit $j+k=n$ zu einem Term c_n zusammen (einfache Formel). Das Ergebnis ist eine (wiederum absolut konvergente) Produktreihe $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit der Eigenschaft $C = A \cdot B$.

Für eine Implementierung gehe man wie folgt for: Man geht davon aus, dass das Bildungsgesetz für die Koeffizienten a_j und b_k mittels vorgegebener Prozeduren `a(j)` und `b(k)` vorgegeben ist. Schreiben Sie eine Prozedur `c(a,b,n)`, die einen beliebigen Koeffizienten c_n zurückliefert. (Hier werden Prozedurnamen als Parameter übergeben!)

- Testen Sie was passiert, wenn `a` und/oder `b` nicht definiert ist.
- Verifizieren Sie' damit die Identität $e^x e^y = e^{x+y}$, indem Sie anhand der Potenzreihendarstellung $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ einige Terme der Produktreihe überprüfen. (Verwenden Sie `?factor`). Was passiert, wenn Sie den Parameter `n` beim Aufruf undefiniert lassen? Deklarieren Sie weiters mittels

  `assume(n,nonnegint);`

  die Variable `n` als Element von $\mathbb{N}_0$ und werten Sie wiederum `c(a,b,n)` aus.

  Hinweis: $n! = \Gamma(n+1)$ mit der sogenannten Gammafunktion (Verallgemeinerung der Fakultät für positive reelle Argumente). Maple 'liebt' offenbar die Schreibweise mit der Gammafunktion.

Aufgabe 5.10. Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) := \frac{5\sin(3x + b\sqrt{x^2 + e^{2x}})\,\tan\!\left(\frac{k^2x^2}{1+u^2x^2}\right) + \sqrt[3]{\frac{ax-\ln x}{a^2+x^2}}}{\arccos\!\left(\frac{x}{\sqrt{3+x}}\right) + \frac{3a^2x^3}{\arctan(1/x)} + e^{-\frac{x^2-b^2}{2}}\,\arcsin\sqrt{\frac{3x}{1-x^2}}}$$

Überprüfen Sie das Ergebnis durch manuelles Nachrechnen. `;-(`
Testen Sie auch, ob Maple es schafft, durch Integration des Ergebnisses den ursprünglichen Funktionsausdruck $f(x)$ zurückzugewinnen. `;-(`