Winfried Auzinger
Klaus Felsenstein
Dirk Praetorius

Sommersemester 09
19. März 2009

Übungen zur Vorlesung Computermathematik

Serie 3

Aufgabe 3.1*. Welche Zeitschrift versteckt sich hinter der Abkürzung *M2AN*? Wie ist der vollständige Titel? Wie lautet die korrekte Abkürzung? Schreiben Sie ein Literaturverzeichnis, das zwei Artikel aus der letzten Ausgabe dieser Zeitschrift enthält. Welche Zeitschrift hat die Abkürzung *Math. Comput.*? Wie ist der vollständige Titel? Wie lautet die nunmehr korrekte Abkürzung? Erweitern Sie das Literaturverzeichnis um zwei Artikel aus der aktuellen Ausgabe dieser Zeitschrift. Erweitern Sie Ihr Literaturverzeichnis um ein englisches Buch von Walter Rudin sowie dessen Dissertation. Um die Dissertation zu finden, können Sie das *Mathematics Genealogy Project* nutzen, siehe `http://www.genealogy.ams.org`. Speichern Sie Ihre LaTeX-Datei unter `literatur.tex` ins Verzeichnis `serie03`.

Aufgabe 3.2*. Wie lauten die korrekten Abkürzungen für die Zeitschriften *Numerische Mathematik*, *SIAM Journal on Scientific Computing* und *Mathematics of Computation*? Welchen Ampelstatus haben diese Zeitschriften? Welche Ausgaben sind frei verfügbar? Schreiben Sie das Ergebnis Ihrer Recherche in eine geeignete 3-spaltige Tabelle der Form

Titel der Zeitschrift	Abkürzung laut `mathscinet`	Verfügbarkeit
Numerische Mathematik	...	...

und speichern Sie die Datei unter `journal.tex` ins Verzeichnis `serie03`.

Aufgabe 3.3*. Für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den **einseitigen Differenzenquotienten**

$$\Phi(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{für } h > 0$$

und $\Phi(0) := f'(x)$. Nach Voraussetzung gilt $\lim_{h\to 0} \Phi(h) = \Phi(0)$. Beweisen Sie mit Hilfe der Taylor-Formel, dass für $f \in C^2(\mathbb{R})$

$$|\Phi(0) - \Phi(h)| = \mathcal{O}(h),$$

gilt und bestimmen Sie dabei die Konstante, die sich in der Landau-Notation versteckt, möglichst genau. Schreiben Sie Ihr Ergebnis in Form eines Lemmas mit Beweis in LaTeXund speichern Sie die Datei unter `diff.tex` ins Verzeichnis `serie03`.

Aufgabe 3.4*. Benutzen Sie den Differenzenquotienten aus Aufgabe 3.3, um die Zahl $\exp(1) = \exp'(1)$ zu approximieren. Plotten Sie in MATLAB den Fehler $e_h = |\Phi(0) - \Phi(h)|$ für eine Folge $h = 1, 1/2, \ldots, 2^{-16}$ über $1/h$ in einem doppel-logarithmischen Plot. Verifizieren Sie das Konvergenzverhalten $\mathcal{O}(h)$, indem Sie eine Gerade mit Gefälle 1 in den Plot einzeichnen. Beschriften Sie die Grafik geeignet und exportieren Sie diese als EPS-File. Binden Sie die Grafik in LaTeX ein und ersetzen Sie die Beschriftung mittels `\psfrag`. Speichern Sie die Dateien unter `exp.eps` und `exp.tex` ins Verzeichnis `serie03`.

Aufgabe 3.5. Für $f \in C^2(\mathbb{R})$ gilt $e_h := |\Phi(h) - \Phi(0)| = \mathcal{O}(h)$ mit der Funktion Φ aus Aufgabe 3.3. Für allgemeines $f \in C^1(\mathbb{R})$ beobachtet man aber nur $e_h = \mathcal{O}(h^\alpha)$ für ein $\alpha \in (0, 1]$. Die Konstante α nennt man **Konvergenzordnung**. Mit dem Ansatz $e_h = ch^\alpha$ erfüllt dann die Größe $\delta_h := |\Phi(h) - \Phi(h/2)|$ die Abschätzung

$$e_h(1 - 2^{-\alpha}) \le \delta_h \le e_h(1 + 2^{-\alpha}),$$

d.h. es gilt ebenso $\delta_h = \mathcal{O}(h^\alpha)$. Mit dem weiteren Ansatz $\delta_h = Ch^\alpha$ erhält man für h und $h/2$ zwei Gleichungen, aus denen man die **experimentelle Konvergenzordnung** α und die zugehörige Konstante C berechnen kann:

$$\alpha = \log(\delta_h/\delta_{h/2})/\log(2) \quad \text{sowie} \quad C = \delta_h/h^\alpha.$$

Formulieren Sie diesen Aufgabentext in eigenen Worten und mit allen rechnerischen Zwischenschritten in LaTeX.

Aufgabe 3.6. Konstruieren Sie eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R})\backslash C^2(\mathbb{R})$, sodass der einseitige Differenzenquotient auf ein Konvergenzverhalten $\delta_h = \mathcal{O}(h^\alpha)$ mit $0 < \alpha < 1$ führt. Plotten Sie die Konvergenz von δ_h analog zu Aufgabe 3.4 und binden Sie dieses Bild in ein LaTeX-Dokument ein, in dem Sie auch die Funktion f spezifizieren.

Aufgabe 3.7. Sei $\Phi(h)$ der Differenzenquotient aus Aufgabe 3.3. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
fprimex = diff(f,x,h0,tau,filename)
```

die mit $h_n := 2^{-n}h_0$ die Folge $\Phi(h_n)$ berechnet, bis

$$|\Phi(h_n) - \Phi(h_{n+1})| \le \tau \cdot \max\{|\Phi(h_n)|, |\Phi(h_{n+1})|\}$$

gilt. In diesem Fall werde `fprimex` $:= \Phi(h_{n+1})$ als Approximation von $f'(x)$ zurückgegeben. Wird als *optionaler* Parameter `filename` übergeben (siehe `help varargin` bzw. `help nargin`), so soll eine Tabelle (`tabular`-Umgebung) in ein ASCII-File geschrieben werden (mittels `fopen`, `fprintf`, `fclose`), das später mit Hilfe von `\input{filename}` in ein LaTeX-Dokument eingebunden werden kann. Die Tabelle habe folgende Form:

n	h_n	$\Phi(h_n)$	$\lvert\Phi(h_n) - \Phi(h_{n-1})\rvert$	C	α
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Für $n = 0$ bleiben die Spalten 4–6 leer. Die experimentelle Konvergenzrate α sowie die zugehörige Konstante C sollen basierend auf (h_{n-2}, h_{n-1}, h_n) berechnet werden. Für $n = 1$ bleiben daher die letzten beiden Spalten leer. Für n verwende man Dezimaldarstellung, für α Fixpunktdarstellung mit 2 Nachkommastellen (z.B. 1.23) und für $\Phi(h_n)$ Exponentialdarstellung mit 12 Nachkommastellen. Die übrigen Daten sollen in Exponentialdarstellung mit 3 Nachkommastellen ausgegeben werden (z.B. $1.378e-3$). Schreiben Sie sich dazu eine MATLAB-Funktion `output = latex2fprintf(input)`, die eine korrekte LaTeX-Zeile `input` (gegeben als String) in einen String `output` konvertiert, sodass `fprintf(output)` gerade `input` ist. Dazu hilft ein Blick in die Übersicht zu den String-Funktionen (siehe `help strfun` in MATLAB).

Aufgabe 3.8. Binden Sie die Tabellen aus Aufgabe 3.7 für $f(x) = \exp(x)$ sowie für die Funktion aus Aufgabe 3.6 in ein LaTeX-Dokument ein.

Aufgabe 3.9. Plotten Sie das Potential $f(x,y) = x \cdot \exp(-x^2 - y^2)$ sowohl als Graph in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ als auch als farbige Projektion auf die Ebene, wobei Sie sich auf $[-5,5]^2 \subset \mathbb{R}^2$ beschränken. Geben Sie unter die Plots eine horizontale `colorbar`. Binden Sie die Grafiken in ein LaTeX-Dokument ein. Verwenden Sie dazu eine `figure`-Umgebung mit Legende, wobei die Bilder nebeneinander angeordnet werden.

Aufgabe 3.10. Schreiben Sie einen beliebigen Text mit Überschrift und mindestens 400 Worten in LaTeX. Als Schriftgröße wählen Sie 12pt. Gliedern Sie den Text in mindestens 2 Sections. Tragen Sie alle Eigennamen in einen Index ein, der am Ende des Dokuments ausgegeben wird.