Winfried Auzinger
Klaus Felsenstein
Dirk Praetorius

Sommersemester 09
12. März 2009

Übungen zur Vorlesung Computermathematik

Serie 2

Die Aufgaben mit Stern (*) sind bis zur Übung in der kommenden Woche vorzubereiten. Die übrigen Aufgaben dienen nur Ihrer Übung. Kopieren Sie bitte die Source-Codes auf Ihren Account auf der `lva.student.tuwien.ac.at` *und überprüfen Sie vor der Übung, ob diese mittels* `latex` *übersetzt werden können.*

Aufgabe 2.1*. Schreiben Sie ein LaTeX-File mit dem Algorithmus der Gauss-Elimination, wobei bei einer allfälligen Implementierung der obere Index (k) an den Koeffizienten entfallen kann. Speichern Sie die Datei unter `gauss.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Input: Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit LU-Zerlegung, rechte Seite $b \in \mathbb{K}^n$

`for` $k = 1, \dots, n-1$
  `for` $i = k+1, \dots, n$
    $\ell_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$
    $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \ell_{ik} b_k^{(k)}$
    `for` $j = k+1, \dots, n$
      $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \ell_{ik} a_{kj}^{(k)}$
    `end`
  `end`
`end`

Output: nicht-triviale Einträge der Matrizen $L, U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $u_{ij} := a_{ij}^{(i)}$, sowie modifizierte rechte Seite $y \in \mathbb{K}^n$ mit $y_i := b_i^{(i)}$.

Aufgabe 2.2*. Schreiben Sie ein LaTeX-File, in dem Sie den folgenden Satz von Brezzi formulieren. Definieren Sie geeignete Makros für die Normen sowie die Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ und $b(\cdot,\cdot)$. Speichern Sie die Datei unter `brezzi.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Theorem (Brezzi 1974). Let X be a Hilbert space and Y be a reflexive Banach space. Let $a : X \times X \to \mathbb{R}$ and $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ be continuous bilinear forms. We define $X_0 := \big\{x \in X \,:\, b(x,\cdot) = 0 \in Y^*\big\}$ and assume

- $\alpha := \inf\limits_{v \in X_0\setminus\{0\}} \dfrac{a(v,v)}{\|v\|_X^2} > 0$, i.e. $a(\cdot,\cdot)$ is elliptic on X_0,
- $\beta := \inf\limits_{y\in Y\setminus\{0\}} \sup\limits_{x \in X\setminus\{0\}} \dfrac{b(x,y)}{\|x\|_X \|y\|_Y} > 0$.

Then, for any $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$, there is a unique solution $(x,y) \in X \times Y$ of

$$\begin{array}{lcll} a(x,\widetilde{x}) + b(\widetilde{x},y) & = & x^*(\widetilde{x}) & \text{for all } \widetilde{x} \in X, \\ b(x,\widetilde{y}) & = & y^*(\widetilde{y}) & \text{for all } \widetilde{y} \in Y. \end{array} \tag{1}$$

Aufgabe 2.3*. Schreiben Sie eine `satz`-Umgebung, sodass Aufruf mittels

```
\begin{satz} ... \end{satz}
```

auf fortlaufende Numerierung der Form **Satz 1.1.2.** führt, wohingegen

```
\begin{satz}[Bolzano-Weierstraß] ... \end{satz}
```

Satz von Bolzano-Weierstraß ergibt, ohne dass der Zähler weitergezählt wird. Der Zähler soll von Kapitel und Abschnitt abhängen. Verwenden Sie diese Umgebung in einem Dokument mit mindestens einem Kapitel (`chapter`), und zwei Abschnitten (`section`). Schreiben Sie pro Abschnitt jeweils zwei beliebige Sätze aus Ihrer Analysis-Vorlesung ab. Speichern Sie die Datei unter `satz.tex` ins Verzeichnis `serie02`.

Aufgabe 2.4*. Schreiben Sie folgenden Text in eine Datei `gleitkommazahl.tex` ins Verzeichnis `serie02`: Die Definition der Gleitkommazahlen erfordert den folgenden Satz aus der Grundvorlesung zur Analysis, siehe z.B. Kapitel 5 in *Analysis I* von O. FORSTER:

Satz 1.1. Zu fixierter **Basis** $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und gegebenem $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existieren ein **Vorzeichen** $\sigma \in \{\pm 1\}$, **Ziffern** $a_j \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und ein **Exponent** $e \in \mathbb{Z}$ mit

$$x = \Big(\sigma \sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}\Big) b^e \quad \text{und} \quad a_1 \neq 0.$$

Man bezeichnet diese Darstellung als **normalisierte Gleitkommadarstellung** oder ***b*-adische Darstellung** von x.

Aufgabe 2.5. Schreiben Sie folgenden Text, das Symbol $\pm$ wird dabei mit `\pm` erzeugt: Mit Hilfe von Satz 1.1 lassen sich die Gleitkommazahlen wie folgt definieren: Zu gegebener **Basis** $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, **Mantissenlänge** $t \in \mathbb{N}$ und **Exponentialschranken** $e_{\min} < 0 < e_{\max}$ definieren wir die Menge der **normalisierten Gleitkommazahlen** $\mathbb{F} := \mathbb{F}(b, t, e_{\min}, e_{\max}) \subset \mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{F} = \{0\} \cup \Big\{ \Big(\sigma \sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}\Big) b^e \,\Big|\, \sigma \in \{\pm 1\}, a_j \in \{0, \ldots, b-1\}, a_1 \neq 0, e \in \mathbb{Z}, e_{\min} \leq e \leq e_{\max} \Big\}.$$

Die endliche Summe $a = \sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}$ bezeichnet man als **(normalisierte) Mantisse** einer Gleitkommazahl.

Aufgabe 2.6. Schreiben Sie in eine `enumerate`-Umgebung die 24 Groß- und Kleinbuchstaben des Griechischen Alphabets, z.B.

(1). A, α
(2). B, β
(3). Γ, γ etc.

Aufgabe 2.7. Definieren Sie über den Befehl `\newtheorem` Umgebungen für Satz, Lemma und Folgerung. Dabei soll nur ein Zähler für alle drei Umgebungen verwendet werden. Die Zählung erfolge kapitelweise in der Form 2.1, 2.2, etc. Schreiben Sie einen beliebigen Satz inklusive seiner Folgerung(en) aus der Vorlesung zur Linearen Algebra ab.

Aufgabe 2.8. Schreiben Sie folgende Definition: Für $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \lambda \leq 1$ und eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ist der Raum $C^{k,\lambda}(\Omega)$ der hölderstetigen Funktionen durch

$$C^{k,\lambda}(\Omega) := \big\{ f \in C^k(\Omega) \,\big|\, \|f\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)} < \infty \big\}$$

definiert. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)}$ die entsprechende Höldernorm

$$\|f\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)} := \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| \leq k}} \|\partial^\alpha f\|_{\infty,\Omega} + \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| = k}} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

Offensichtlich ist $C^{0,1}(\Omega)$ gerade der Raum aller Lipschitz-stetigen Funktionen. Man kann zeigen, dass $C^{k,\lambda}(\Omega)$ mit der entsprechenden Norm ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 2.9. Ein zentraler Satz der Funktionalanalysis ist der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach. Schreiben Sie diesen Satz in einer entsprechenden Umgebung.

Theorem 1.1 (Hahn-Banach). Let $p : X \to \mathbb{R}$ be a sublinear functional on a linear space X over $\mathbb{R}$, i.e. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ and $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ for all $x, y \in X$ and $\lambda \geq 0$. If Y is a subspace of X and $f : Y \to \mathbb{R}$ is a linear functional with $f \leq p$ on Y, there is a linear extension $F : X \to \mathbb{R}$ with $F|_Y = f$ and $F \leq p$ on X.

Aufgabe 2.10. Schreiben Sie folgende Formel in LaTeX: Die Matrix L sei eine untere Dreiecksmatrix und liege in Blockform

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

vor. Dann läßt sich die Inverse von L offensichtlich in Blockform

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & 0 \\ -L_{22}^{-1} L_{21} L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

schreiben.