Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Schriftlicher Test 1 (60 Minuten)
VL Computermathematik — Gruppe A

26.03.2009

Aufgabenstellung:

- Schreiben Sie unter Verwendung eigener Makros und Umgebungen den Text auf der Rückseite in LaTeX, wobei Sie weitestgehend der Vorlage folgen.
- Verwenden Sie Schriftgröße 12 und Papiergröße DIN A4.
- Überprüfen Sie nach jeder abgesetzten Formel, ob Ihr Code kompiliert werden kann.
- Die Abgabe erfolgt in Form von `A_nachname.tex` und `A_nachname.pdf`
- **Erlaubt:** Vorlesungsfolien, `http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:TeX`

Spezifikationen:

- Alle Referenzen sind mittels `\label` und (beispielsweise) `\ref` zu realisieren!
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathbb{R}$.
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathcal{O}$.
- Schreiben Sie ein Makro mit 2 Parametern für eine Norm $\| \cdot \|_X$
- Schreiben Sie ein Makro mit 3 Parametern für eine Menge $\big\{x \,:\, y\big\}$, wobei die Größe der Klammern optional übergeben werde.
- Schreiben Sie Umgebungen für *Beispiel*, *Definition* und *Bemerkung*, die fortlaufend (gemeinsam) numeriert werden. Der Umgebung *Beispiel* soll optional eine Bezeichnung übergeben werden können.

Hinweise:

- Die Schrift ***fett-kursiv*** erhalten Sie durch `\textbf{\textit{fett-kursiv}}`.
- Die Symbole `\square` $\square$ und `\blacksquare` $\blacksquare$ sind im `amssymb`-Paket.
- Standardsymbole `\eta` η, `\zeta` ζ, `\le` $\le$

Beispiel 1 (Numerische Differentiation). Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{R}$. Um $\Phi := f'(x)$ zu approximieren, berechnen wir für festes $h > 0$ den *einseitigen Differenzenquotienten*

$$\Phi_h := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1}$$

Nach Definition der Ableitung gilt

$$|\Phi - \Phi_h| = \left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \to 0 \quad \text{für } h \to 0.$$

Für $f \in C^2(\mathbb{R})$ folgt mit dem Mittelwertsatz die Existenz von η, ζ mit $x \le \eta \le \zeta \le x + h$ mit

$$|\Phi - \Phi_h| = |f'(x) - f'(\zeta)| = |f''(\eta)||x - \zeta| \le h \, \|f''\|_{\infty,[x,x+h]} = \mathcal{O}(h)$$

für $h \to 0$. ■

Definition 2. Für eine Diskretisierung Φ_h von Φ nennt man

$$|\Phi - \Phi_h| = \mathcal{O}(h^\alpha) \tag{2}$$

a priori Fehlerabschätzung für den Diskretisierungsfehler. Die Zahl $\alpha > 0$ bezeichnet man als **Konvergenzordnung**. □

Bemerkung 3. In der Praxis treten nicht nur ganzzahlige Konvergenzordnungen $\alpha > 0$ auf. Für ein offenes Intervall Ω und $0 \le \alpha \le 1$ betrachten wir eine **Hölder-stetige Funktion**

$$f \in C^{m,\alpha}(\Omega) := \left\{ f \in C^m(\Omega) \;:\; \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}. \tag{3}$$

mit $m = 1$. Für den einseitigen Differenzenquotienten aus (1) folgt dann

$$|\Phi - \Phi_h| = |f'(x) - f'(\zeta)| = \mathcal{O}(h^\alpha)$$

für $h \to 0$. □

Bemerkung 4. Ein Ziel der Numerik ist die Verbesserung bekannter Algorithmen. Der zentrale Differenzenquotient

$$\Phi_h := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \tag{4}$$

erfüllt besipielsweise $|\Phi - \Phi_h| = \mathcal{O}(h^2)$ für $f \in C^3(\mathbb{R})$. □

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Schriftlicher Test 1 (60 Minuten)
VL Computermathematik — Gruppe B

26.03.2009

Aufgabenstellung:

- Schreiben Sie unter Verwendung eigener Makros und Umgebungen den Text auf der Rückseite in LaTeX, wobei Sie weitestgehend der Vorlage folgen.
- Verwenden Sie Schriftgröße 12 und Papiergröße DIN A4.
- Überprüfen Sie nach jeder abgesetzten Formel, ob Ihr Code kompiliert werden kann.
- Die Abgabe erfolgt in Form von `B_nachname.tex` und `B_nachname.pdf`
- **Erlaubt:** Vorlesungsfolien, `http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:TeX`

Spezifikationen:

- Alle Referenzen sind mittels `\label` und (beispielsweise) `\ref` zu realisieren!
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathbb{N}$.
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathbb{K}$.
- Schreiben Sie Umgebungen für *Bemerkung* und *Satz*, die fortlaufend (gemeinsam) numeriert werden.

Hinweise:

- Die Schrift ***fett-kursiv*** erhalten Sie durch `\textbf{\textit{fett-kursiv}}`.
- Die Symbole `\square` $\square$ und `\blacksquare` $\blacksquare$ sind im `amssymb`-Paket.
- Standardsymbole `\to` $\to$, `\infty` ∞, `\neq` $\neq$, `\Delta` Δ, `\in` $\in$

Bemerkung 1. Beim Δ^2-Verfahren von Aitken handelt es sich um ein Verfahren zur **Konvergenzbeschleunigung von Folgen**. Es sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{K}$ mit Grenzwert $x \in \mathbb{K}$. Ziel ist die Konstruktion einer Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, sodass gilt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{y_j - x}{x_j - x} = 0, \tag{1}$$

d.h. die Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert schneller gegen x als $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$. $\square$

Satz 2. *Die Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ erfülle $x_j \neq x$ und $x_{j+1} - x = (k + \delta_j)(x_j - x)$ mit einer Nullfolge $(\delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und einem Skalar $k \in \mathbb{K}$ mit $|k| < 1$. Dann existiert ein Index $j_0 \in \mathbb{N}$, sodass*

$$y_j := x_j - \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{x_{j+2} - 2x_{j+1} + x_j} \quad \textit{für } j \geq j_0 \tag{2}$$

wohldefiniert ist, und es gilt $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{y_j - x}{x_j - x} = 0 = \lim\limits_{j\to\infty}(x_j - x)$.

Beweis. Es sei $q \in (|k|, 1)$. Wegen $\delta_j \to 0$ existiert ein Index $j_1 \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$|\delta_j| < q - |k| \quad \text{für alle } j \geq j_1,$$

insbesondere $|k + \delta_j| \leq q < 1$. O.B.d.A. gilt $j_1 = 1$. Induktiv erhalten wir $|x_{j+1} - x| \leq q^j\,|x_1 - x|$ und deshalb $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x$.

Mit $e_j := x_j - x$ gilt $e_{j+1} = (k + \delta_j)e_j$. Für den Nenner in (2) folgt

$$\begin{aligned} x_{j+2} - 2x_{j+1} + x_j &= e_{j+2} - 2e_{j+1} + e_j \\ &= e_j\big((k-1)^2 + (\delta_j\delta_{j+1} + k(\delta_j + \delta_{j+1}) - 2\delta_j)\big) \end{aligned}$$

Wegen $e_j \neq 0$, $(k-1)^2 \neq 0$ und $\mu_j := \delta_j\delta_{j+1} + k(\delta_j + \delta_{j+1}) - 2\delta_j \to 0$ existiert also ein Index $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass y_j für $j \geq j_0$ wohldefiniert ist. Für den Zähler in (2) gilt

$$x_{j+1} - x_j = e_{j+1} - e_j = e_j((k + \delta_j) - 1).$$

Insgesamt ergibt sich

$$y_j - x = e_j - \frac{e_j^2(k - 1 + \delta_j)^2}{e_j((k-1)^2 + \mu_j)} = e_j\left(1 - \frac{(k - 1 + \delta_j)^2}{(k-1)^2 + \mu_j}\right).$$

Division durch e_j und $j \to \infty$ zeigt die Behauptung. $\blacksquare$

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Schriftlicher Test 1 (60 Minuten)
VL Computermathematik — Gruppe C

27.03.2009

Aufgabenstellung:

- Schreiben Sie unter Verwendung eigener Makros und Umgebungen den Text auf der Rückseite in LaTeX, wobei Sie weitestgehend der Vorlage folgen.
- Verwenden Sie Schriftgröße 12 und Papiergröße DIN A4.
- Überprüfen Sie nach jeder abgesetzten Formel, ob Ihr Code kompiliert werden kann.
- Die Abgabe erfolgt in Form von `C_nachname.tex` und `C_nachname.pdf`
- **Erlaubt:** Vorlesungsfolien, `http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:TeX`

Spezifikationen:

- Alle Referenzen sind mittels `\label` und (beispielsweise) `\ref` zu realisieren!
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathbb{N}$.
- Schreiben Sie ein Makro `\dist` mit 2 Parametern für die Metrik $d(x, y)$.
- Schreiben Sie Umgebungen für *Bemerkung* und *Satz*, die fortlaufend (gemeinsam) numeriert werden.
- Schreiben Sie eine Umgebung für *Beweis*.

Hinweise:

- Die Schrift ***fett-kursiv*** erhalten Sie durch `\textbf{\textit{fett-kursiv}}`.
- Die Symbole `\square` $\square$ und `\blacksquare` $\blacksquare$ sind im `amssymb`-Paket.
- Standardsymbole `\to` $\to$, `\infty` ∞, `\le` $\le$, `\varepsilon` ε

Satz 1 (Banach'scher Fixpunktsatz). *Es sei X ein vollständiger metrischer Raum und $\Phi : X \to X$ eine Kontraktion, d.h. es gibt eine Konstante $0 \leq L < 1$ mit*

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq L\, d(x, y) \quad \textit{für alle } x, y \in X. \tag{1}$$

Dann existiert ein eindeutiges $x^* \in X$ mit $\Phi(x^*) = x^*$, und unabhängig vom Startwert $x_0 \in X$ konvergiert die Iteriertenfolge $x_k := \Phi(x_{k-1})$ gegen x^*. Ferner gelten die beiden Fehlerabschätzungen

$$d(x_k, x^*) \leq \frac{L}{1-L}\, d(x_k, x_{k-1}) \leq \frac{L^k}{1-L}\, d(x_1, x_0). \tag{2}$$

Beweis. Φ hat höchstens einen Fixpunkt, denn aus

$$d(x^*, y^*) = d(\Phi(x^*), \Phi(y^*)) \leq L\, d(x^*, y^*)$$

folgt notwendig $x^* = y^*$. Falls $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so folgt mittels Stetigkeit

$$x := \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_{k-1}) = \Phi(x).$$

Deshalb ist nur zu zeigen, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Induktiv ergibt sich

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq L^k d(x_0, x_1).$$

Für $m \leq n$ folgt

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{k=m}^{n-1} L^k \leq d(x_0, x_1)\, \frac{L^m}{1-L},$$

und die rechte Seite verschwindet für $m, n \to \infty$.

Um die Fehlerabschätzung (2) zu erhalten, nutzen wir

$$d(x_k, x^*) = d(\Phi(x_{k-1}), \Phi(x^*)) \leq L\, d(x_{k-1}, x^*) \leq L\, d(x_{k-1}, x_k) + L\, d(x_k, x^*)$$

und erhalten die erste Abschätzung in (2) durch Umordnen. Die zweite Abschätzung folgt aus $d(x_{k-1}, x_k) \leq L^{k-1} d(x_0, x_1)$. ■

Bemerkung 2. Die zweite Abschätzung $d(x_k, x^*) \leq \frac{L^k}{1-L}\, d(x_1, x_0)$ in (2) bezeichnet man als **a priori Fehlerabschätzung**, da man zu gegebener Toleranz $\varepsilon > 0$ im Voraus eine Höchstanzahl $k \in \mathbb{N}$ angeben kann, sodass $d(x_k, x^*) \leq \varepsilon$ gilt. □

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Schriftlicher Test 1 (60 Minuten)
VL Computermathematik — Gruppe D

27.03.2009

Aufgabenstellung:

- Schreiben Sie unter Verwendung eigener Makros und Umgebungen den Text auf der Rückseite in LaTeX, wobei Sie weitestgehend der Vorlage folgen.
- Verwenden Sie Schriftgröße 12 und Papiergröße DIN A4.
- Überprüfen Sie nach jeder abgesetzten Formel, ob Ihr Code kompiliert werden kann.
- Die Abgabe erfolgt in Form von `D_nachname.tex` und `D_nachname.pdf`
- **Erlaubt:** Vorlesungsfolien, `http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:TeX`

Spezifikationen:

- Alle Referenzen sind mittels `\label` und (beispielsweise) `\ref` zu realisieren!
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathbb{K}$.
- Schreiben Sie Umgebungen für *Definition*, *Satz* und *Beispiel*, die fortlaufend numeriert werden.
- Schreiben Sie eine Umgebung *Beweis*.

Hinweise:

- Die Schrift ***fett-kursiv*** erhalten Sie durch `\textbf{\textit{fett-kursiv}}`.
- Die Symbole `\square` $\square$ und `\blacksquare` $\blacksquare$ sind im `amssymb`-Paket.
- Standardsymbole `\in` $\in$, `\ell` ℓ, `\times` $\times$

Definition 1. Eine Faktorisierung $A = LU$ mit $L \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unterer Dreiecksmatrix und $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ oberer Dreiecksmatrix heißt **LU-Zerlegung** von A. $\square$

Satz 2. *Für die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(i) *Alle* **Untermatrizen** $A_k := (a_{ij})_{i,j=1}^k \in \mathbb{K}^{k\times k}$ *sind regulär.*
(ii) *Es existiert eine LU-Zerlegung von A. In diesem Fall hat A eine eindeutige LU-Zerlegung $A = LU$ mit $\ell_{jj} = 1$ für alle $j = 1, \ldots, n$.*

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Da A regulär ist, sind L und U regulär und insbesondere auch L_k und U_k. Aus $A = LU$ folgt insbesondere

$$A_k = L_k U_k$$

für die entsprechenden Untermatrizen, also ist auch A_k regulär. $\square$

(i) $\Rightarrow$ (ii) wird durch Induktion nach n bewiesen. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar. Im Induktionsschritt existieren eindeutige L_{n-1}, U_{n-1} mit

$$A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1} \quad \text{und} \quad \ell_{jj} = 1 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n-1.$$

Mit dem Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ c^T & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für geeignete $b, c \in \mathbb{K}^{n-1}$ und $a_{nn} \in \mathbb{K}$ ist zu zeigen, dass eindeutige $\ell, u \in \mathbb{K}^{n-1}$ und $\rho \in \mathbb{K}$ existieren, sodass gilt

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ c^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ \ell^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} & u \\ 0 & \rho \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Mit der Induktionsvoraussetzung ist (1) äquivalent zu

$$b = L_{n-1}u, \quad c = U_{n-1}^T \ell \quad \text{und} \quad a_{nn} = \ell^T u + \rho. \tag{2}$$

Da L_{n-1} und U_{n-1} regulär sind, existieren eindeutige Vektoren $\ell, u \in \mathbb{K}^{n-1}$ als Lösungen der ersten beiden Gleichungen von (2), und auch die eindeutige Existenz von ρ folgt. $\blacksquare$

Beispiel 3. Die reguläre Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat keine LU-Zerlegung. $\blacksquare$

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Schriftlicher Test 1 (60 Minuten)
VL Computermathematik — Gruppe E

27.03.2009

Aufgabenstellung:

- Schreiben Sie unter Verwendung eigener Makros und Umgebungen den Text auf der Rückseite in LaTeX, wobei Sie weitestgehend der Vorlage folgen.
- Verwenden Sie Schriftgröße 12 und Papiergröße DIN A4.
- Überprüfen Sie nach jeder abgesetzten Formel, ob Ihr Code kompiliert werden kann.
- Die Abgabe erfolgt in Form von `E_nachname.tex` und `E_nachname.pdf`
- **Erlaubt:** Vorlesungsfolien, `http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:TeX`

Spezifikationen:

- Alle Referenzen sind mittels `\label` und (beispielsweise) `\ref` zu realisieren!
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathbb{C}$.
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathbb{R}$.
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathrm{cond}_2(\cdot)$.
- Schreiben Sie Umgebungen für *Satz* und *Bemerkung*, die fortlaufend (gemeinsam) numeriert werden. Optional soll eine Bezeichnung übergeben werden können.
- Schreiben Sie eine Umgebung für *Beweis*.
- Standardsymbole `\in` $\in$, `\ell` ℓ, `\times` $\times$, `\lambda` λ
- mathematische Funktionen `\det` $\det$, `\sqrt` $\sqrt{\cdot}$

Hinweise:

- Die Schrift ***fett-kursiv*** erhalten Sie durch `\textbf{\textit{fett-kursiv}}`.
- Die Symbole `\square` $\square$ und `\blacksquare` $\blacksquare$ sind im `amssymb`-Paket.

Satz 1 (Cholesky-Zerlegung). *Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix, so existiert eine eindeutige untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit*

$$A = LL^T \quad \textit{und} \quad \ell_{kk} > 0 \quad \textit{für alle } k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Für die Konditionszahlen gilt $\operatorname{cond}_2(L) = \operatorname{cond}_2(L^T) = \sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}$.

Beweis. Für $n = 1$ gilt $0 < ax \cdot x = a|x|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Es folgt $a > 0$, und deshalb beweist $\ell = \sqrt{a}$ den Induktionsanfang.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Untermatrix $A_{n-1} := (a_{jk})_{j,k=1}^{n-1}$

$$A_{n-1} = L_{n-1}(L_{n-1})^T \quad \text{und} \quad \ell_{kk} > 0 \quad \text{für alle } k \in \{1, \ldots, n-1\}$$

erfüllt. Mit dem Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ b^T & a_{nn} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ c^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (L_{n-1})^T & c \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = LL^T \tag{2}$$

ist zu zeigen, dass eindeutige $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\alpha > 0$ existieren, sodass (2) gilt. Nach Induktionsvoraussetzung ist (2) äquivalent zu

$$\begin{aligned} L_{n-1}c &= b \\ c^T c + \alpha^2 &= a_{nn}. \end{aligned}$$

Die Regularität von L_{n-1} zeigt die eindeutige Existenz von c. Insbesondere existiert (mindestens) ein $\alpha \in \mathbb{C}$, sodass (2) gilt, und es folgt

$$\det(A) = \det(L)\det(L^T) = \alpha^2 \Big(\prod_{j=1}^{n-1} \ell_{jj} \Big)^2.$$

Alle Eigenwerte λ_j einer SPD-Matrix A sind reell und positiv, und es gilt stets (über $\mathbb{C}$)

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Deshalb folgt zunächst $\det(A) > 0$. Wegen $\ell_{jj} > 0$ ist $\alpha^2 > 0$, und damit existiert ein eindeutiges $\alpha > 0$, das (2) erfüllt.

Der Beweis für die Konditionszahlen folgt durch elementare Betrachtungen des Spektralradius. ■

Bemerkung 2. Man beachte, dass die positive Definitheit von A im Beweis von Satz 1 wesentlich eingeht. □

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Schriftlicher Test 1 (60 Minuten)
VL Computermathematik — Gruppe F

27.03.2009

Aufgabenstellung:

- Schreiben Sie unter Verwendung eigener Makros und Umgebungen den Text auf der Rückseite in LaTeX, wobei Sie weitestgehend der Vorlage folgen.
- Verwenden Sie Schriftgröße 12 und Papiergröße DIN A4.
- Überprüfen Sie nach jeder abgesetzten Formel, ob Ihr Code kompiliert werden kann.
- Die Abgabe erfolgt in Form von `F_nachname.tex` und `F_nachname.pdf`
- **Erlaubt:** Vorlesungsfolien, `http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:TeX`

Spezifikationen:

- Alle Referenzen sind mittels `\label` und (beispielsweise) `\ref` zu realisieren!
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathbb{K}$.
- Schreiben Sie ein Makro für eine Norm $\|\cdot\|$.
- Schreiben Sie ein Makro mit 2 Parametern für eine Menge $\{x : y\}$.
- Schreiben Sie eine Umgebung für *Lemma*, die fortlaufend (gemeinsam) numeriert wird. Optional soll eine Bezeichnung übergeben werden können.
- Schreiben Sie eine Umgebung für *Beweis*.

Hinweise:

- Die Schrift ***fett-kursiv*** erhalten Sie durch `\textbf{\textit{fett-kursiv}}`.
- Das Symbol `\blacksquare` $\blacksquare$ ist im `amssymb`-Paket.
- Standardsymbole `\in` $\in$, `\backslash` $\backslash$
- mathematische Funktionen `\inf` $\inf$, `\sup` $\sup$

Lemma 1 (Operatornorm). *Zu fixierten Normen $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ definiert man*

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad \text{für } A \in \mathbb{K}^{m\times n}. \tag{1}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:
(i) *Die Operatornorm $\|\cdot\|$ definiert eine Norm auf $\mathbb{K}^{m\times n}$,*
(ii) *Es gelten folgende Charakterisierungen*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \inf\big\{C > 0 \,:\, \forall x \in \mathbb{K}^n \quad \|Ax\| \le C\,\|x\|\big\}, \tag{2}$$

(iii) *im Fall $A \neq 0$ folgt für $x \in \mathbb{K}^m$ mit $\|x\| \le 1$ und $\|Ax\| = \|A\|$ bereits $\|x\| = 1$,*
(iv) *aufgrund der endlichen Dimension werden alle Infima und Suprema angenommen.*

Beweis. (ii) Mit $\|Ax\|/\|x\| = \|A(x/\|x\|)\|$ folgt die Ungleichung

$$\|A\| \le \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Die Gleichheit

$$\|A\| = \inf\big\{C > 0 \,:\, \forall x \in \mathbb{K}^n \quad \|Ax\| \le C\,\|x\|\big\}$$

ist klar. Aussage (i) folgt sofort aus der ersten Gleichheit in (2). (iii) Es gilt $\|A\| = \|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$, also $\|x\| \ge 1$. (iv) ergibt sich aus Stetigkeitsgründen. ■

Im Folgenden sei eine Norm auf $\mathbb{K}^n$ fixiert sei, und $\|\cdot\|$ sei die induzierte Operatornorm.

Lemma 2. (i) *Die Identität $\mathbf{I} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ erfüllt $\|\mathbf{I}\| = 1$.*
(ii) *Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, so gilt*

$$\|A^{-1}\| = \Big(\inf_{\|x\|=1} \|Ax\|\Big)^{-1}. \tag{3}$$

Beweis. (i) ist offensichtlich. (ii) Aufgrund der Bijektivität von A gilt

$$\|A^{-1}\| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \sup_{y\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|y\|}{\|Ay\|} = \sup_{y\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \Big(\frac{\|Ay\|}{\|y\|}\Big)^{-1} = \Big(\inf_{y\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}\Big)^{-1}.$$

Mit der Linearität von A folgt schließlich die letzte Behauptung. ■

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Schriftlicher Test 1 (60 Minuten)
VL Computermathematik — Gruppe G

27.03.2009

Aufgabenstellung:

- Schreiben Sie unter Verwendung eigener Makros und Umgebungen den Text auf der Rückseite in LaTeX, wobei Sie weitestgehend der Vorlage folgen.
- Verwenden Sie Schriftgröße 12 und Papiergröße DIN A4.
- Überprüfen Sie nach jeder abgesetzten Formel, ob Ihr Code kompiliert werden kann.
- Die Abgabe erfolgt in Form von `G_nachname.tex` und `G_nachname.pdf`
- **Erlaubt:** Vorlesungsfolien, `http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:TeX`

Spezifikationen:

- Alle Referenzen sind mittels `\label` und (beispielsweise) `\ref` zu realisieren!
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathbb{C}$.
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathbb{R}$.
- Schreiben Sie ein Makro für das Symbol $\mathrm{cond}_2(\cdot)$.
- Schreiben Sie Umgebungen für *Satz* und *Bemerkung*, die fortlaufend (gemeinsam) numeriert werden. Optional soll eine Bezeichnung übergeben werden können.
- Schreiben Sie eine Umgebung für *Beweis*.
- Standardsymbole `\in` $\in$, `\ell` ℓ, `\times` $\times$, `\lambda` λ
- mathematische Funktionen `\det` $\det$, `\sqrt` $\sqrt{\cdot}$

Hinweise:

- Die Schrift ***fett-kursiv*** erhalten Sie durch `\textbf{\textit{fett-kursiv}}`.
- Die Symbole `\square` $\square$ und `\blacksquare` $\blacksquare$ sind im `amssymb`-Paket.

Satz 1 (Cholesky-Zerlegung). *Ist* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ *eine symmetrische und positiv definite Matrix, so existiert eine eindeutige untere Dreiecksmatrix* $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit*

$$A = LL^T \quad \textit{und} \quad \ell_{kk} > 0 \quad \textit{für alle } k \in \{1, \dots, n\}. \tag{1}$$

Für die Konditionszahlen gilt $\operatorname{cond}_2(L) = \operatorname{cond}_2(L^T) = \sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}$.

Beweis. Für $n = 1$ gilt $0 < ax \cdot x = a|x|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Es folgt $a > 0$, und deshalb beweist $\ell = \sqrt{a}$ den Induktionsanfang.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Untermatrix $A_{n-1} := (a_{jk})_{j,k=1}^{n-1}$

$$A_{n-1} = L_{n-1}(L_{n-1})^T \quad \text{und} \quad \ell_{kk} > 0 \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, n-1\}$$

erfüllt. Mit dem Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ b^T & a_{nn} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ c^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (L_{n-1})^T & c \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = LL^T \tag{2}$$

ist zu zeigen, dass eindeutige $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\alpha > 0$ existieren, sodass (2) gilt. Nach Induktionsvoraussetzung ist (2) äquivalent zu

$$\begin{aligned} L_{n-1}c &= b \\ c^T c + \alpha^2 &= a_{nn}. \end{aligned}$$

Die Regularität von L_{n-1} zeigt die eindeutige Existenz von c. Insbesondere existiert (mindestens) ein $\alpha \in \mathbb{C}$, sodass (2) gilt, und es folgt

$$\det(A) = \det(L)\det(L^T) = \alpha^2 \Big(\prod_{j=1}^{n-1} \ell_{jj}\Big)^2.$$

Alle Eigenwerte λ_j einer SPD-Matrix A sind reell und positiv, und es gilt stets (über $\mathbb{C}$)

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Deshalb folgt zunächst $\det(A) > 0$. Wegen $\ell_{jj} > 0$ ist $\alpha^2 > 0$, und damit existiert ein eindeutiges $\alpha > 0$, das (2) erfüllt.

Der Beweis für die Konditionszahlen folgt durch elementare Betrachtungen des Spektralradius. ■

Bemerkung 2. Man beachte, dass die positive Definitheit von A im Beweis von Satz 1 wesentlich eingeht. □