Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2021/22

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (FR, 19.11.2021) *(mit Lösung)*

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 12*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden Kästchen ***eingetragenen Antworten.***

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. Überlegen Sie zuerst bzw. machen Sie sich separate Notizen, bevor Sie Ihre Lösung samt Herleitung eintragen.

....

- **Aufgabe 1.**

a) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{2.\overline{21}}$ ***unter Verwendung einer geometrischen Summe*** in einen ***möglichst einfachen Bruch*** um. *a): 1.25 P.*

$$2.\overline{21} = 2 + \frac{21}{100} + \frac{21}{100^2} + \frac{21}{100^3} + \dots$$

$$= 2 + 21 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n = 2 + 21\,\frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \frac{21}{99} = 2 + \frac{7}{33} = \frac{73}{33}$$

b) Geben Sie für $\boxed{\sum_{k=1}^{n} n^{k-1} \binom{n}{k-1} \quad (n \in \mathbb{N})}$ einen ***möglichst einfachen Formelausdruck*** an. *b): 1.25 P.*

'Binomi':

$$\sum_{k=1}^{n} n^{k-1} \binom{n}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k\, 1^{n-k} - \binom{n}{n} n^n = (n+1)^n - n^n$$

c) ***Beweisen Sie,*** dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{\sum_{n=1}^{N} n^2 > \frac{N^3}{3}}$ *c): 1.5 P.*

Beweis mittels Induktion:

- Induktionsanfang ($N = 1$): $1 > \frac{1}{3}$ ✓
- Induktionsschluss $N \mapsto N+1$:

$$\sum_{n=1}^{N+1} n^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2 + (N+1)^2 \overset{\text{IND}}{>} \frac{N^3}{3} + (N+1)^2 = \frac{1}{3}\left(N^3 + 3\,(N+1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(N^3 + 3\,N^2 + 6\,N + 3\right)$$

$$> \frac{1}{3}\left(N^3 + 3\,N^2 + 3\,N + 1\right) = \frac{(N+1)^3}{3} \quad ✓$$

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$ mit $\boxed{a_n = \left(\frac{n+1}{k\,n}\right)^n}$ ($k \in \mathbb{N}$ beliebig, fest). *a): 1.5 P.*

Für welche Werte von k konvergiert diese Folge, und wie lautet ihr Grenzwert in Abhängigkeit von k?

- Für $k = 1$ gilt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

- Für $k > 1$ gilt

$$a_n = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k\,n}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{1}{k}\right)^n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \to 0$$

b) Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2} \quad \text{für } n > 1}$ *b): 1 P.*

Geben Sie für die Folgenelemente a_n einen expliziten Formelausdruck in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an. (Streng genommen beruht dies auf einem Induktionsargument; Sie sollen dies jedoch nur in informeller Weise durchführen.)

Es gilt

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2^2} = \frac{1}{2^2}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3^2} = \frac{1}{2^2\,3^2} = \frac{1}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4^2} = \frac{1}{2^2\,3^2\,4^2} = \frac{1}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2}$$

und allgemein:

$$a_n = \frac{1}{(n!)^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

c) Sei f eine Funktion, für die gilt $\boxed{|f(k)| \le C \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0}$ mit einer Konstante C, $0 < C < 1$.

Geben Sie eine Konstante $M > 0$ an (in Abhängigkeit von C), so dass gilt

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (f(k))^k \le M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0}$$

c): 1.5 P.

Abschätzung nach oben durch geometrische Summe:

$$\sum_{k=0}^{n} (f(k))^k \le \sum_{k=0}^{n} |(f(k))|^k \le \sum_{k=0}^{n} C^k = \frac{1 - C^{n+1}}{1 - C} \le \frac{1}{1 - C} = M$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (Beachte: $0 < C^n < 1$, und $\{C^n\}$ ist eine Nullfolge.)

- **Aufgabe 3.**

a) ***Entscheiden Sie***, ob die Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}}$ konvergiert. *[a): 1.5 P.]*

Quotientenkriterium (Grenzwertvariante) anwenden:

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\, n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} \to \frac{\frac{1}{e}}{1} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ konvergent

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene reelle Funktion.
Was muss für f gelten, damit die Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+\tfrac{1}{2}) - f(n-\tfrac{1}{2})\right)}$ ***konvergiert?***

Geben Sie für diesen Fall auch den Wert der Reihe an. *b): 1.25 P.*

Teleskopreihe:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+\tfrac{1}{2}) - f(n-\tfrac{1}{2})\right) \\
&= \left(f(1+\tfrac{1}{2}) - f(1-\tfrac{1}{2})\right) + \left(f(2+\tfrac{1}{2}) - f(2-\tfrac{1}{2})\right) + \left(f(3+\tfrac{1}{2}) - f(3-\tfrac{1}{2})\right) + \dots \\
&= \left(f(\tfrac{3}{2}) - f(\tfrac{1}{2})\right) + \left(f(\tfrac{5}{2}) - f(\tfrac{3}{2})\right) + \left(f(\tfrac{7}{2}) - f(\tfrac{5}{2})\right) + \dots
\end{aligned}$$

Damit die Reihe konvergiert, muss der Wert

$$f_\infty := \lim_{x\to\infty} f(x)$$

wohldefiniert und endlich sein.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+\tfrac{1}{2}) - f(n-\tfrac{1}{2})\right) = f_\infty - f(\tfrac{1}{2}).$$

c) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$, $\boxed{f(n) = n - \frac{1}{n}}$ ($\mathbb{Q}_+$ = Menge der rationalen Zahlen ≥ 0)

Untersuchen Sie diese Funktion *(Begründungen angeben)*:

(i) ***Ist f injektiv?*** *(ii)* ***Ist f surjektiv?*** *c): 1.25 P.*

$f(n) = n - \frac{1}{n}$ ist

(i) injektiv, weil 'strikt monoton wachsend': Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(n+1) = n+1 - \frac{1}{n+1} > n - \frac{1}{n} = f(n)$$

(ii) nicht surjektiv: Nicht jedes $y \in \mathbb{Q}_+$ wird als Funktionswert angenommen, z.B. $y = 1$.