

Streu- und Resonanzprobleme

Lothar Nannen

Sommersemester 2016

Version: 22. Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Helmholtz-Probleme auf beschränkten Gebieten	6
3	Finite Elemente Methode	11
4	Projektionsverfahren	15
5	Streuprobleme	21
5.1	Dirichlet-to-Neumann Operator (formal)	22
5.2	Eindimensionaler DtN Operator	23
5.3	(Sphärische) Bessel Gleichung	24
5.4	DtN Operator an Sphären	27
5.5	Integraldarstellung	31
5.6	Resonanzprobleme	34
6	PML-Methode	37
6.1	Eindimensionaler Fall	37
6.2	Radiale komplexe Skalierung	42
6.3	Kartesische komplexe Skalierung	45
7	Hardy-Raum Infinite Elemente	47
7.1	Eindimensionaler Fall	48

1 Einleitung

Diese Einleitung ist im Wesentlichen [Kre02] entnommen. Schallwellen können als kleine Störungen im Geschwindigkeitsfeld $v = v(x, t)$, dem Druck $p = p(x, t)$ und der Dichte $\rho = \rho(x, t)$ von Flüssigkeiten oder Gasen aufgefasst werden, wobei $x \in \mathbb{R}^3$ den Ort und t die Zeit bezeichnet. Seien $v_0 = 0$, $p_0 = \text{const}$ und $\rho_0 = \rho_0(x)$ der stationäre Zustand. Dann wird der Zusammenhang zwischen v , p und ρ beschrieben durch die linearisierte Eulergleichung

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad } p = 0, \quad (1.1)$$

die linearisierte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 v) = 0 \quad (1.2)$$

und die linearisierte Zustandsgleichung

$$p = c^2 \rho. \quad (1.3)$$

$c = c(x)$ bezeichnet die lokale Schallgeschwindigkeit und beschreibt das konkrete Material, z.B. ist für Luft bei 20°C $c \approx 343\text{m/s}$ oder für Wasser mit der Temperatur T , dem Salzgehalt S und der Tiefe h $c(T, S, h) \approx 1404.85 + 4.618T - 0.0523T^2 + 1.25S + 0.017h$ ($c(4^\circ\text{C}, 3.5\%, 100\text{m}) \approx 1424\text{m/s}$).

Einsetzen von (1.3) in (1.2) liefert

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 v) = 0. \quad (1.4)$$

Die Zeitableitung von (1.4) subtrahiert von der Divergenz von (1.1) führt mit $\text{div grad} = \Delta$ zur Wellengleichung für den Druck p :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p. \quad (1.5)$$

Für zeit-harmonische Wellen der Form

$$p(x, t) = \Re(u(x)e^{-i\omega t}) \quad (1.6)$$

mit der Kreisfrequenz $\omega > 0$ und der komplexen, ortsabhängigen Amplitude $u = u(x)$ folgt die reduzierte Wellengleichung

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0. \quad (1.7)$$

1 Einleitung

Im Falle eines homogenen Mediums, d.h. $c = \text{const}$, heisst $\kappa = \omega/c > 0$ die Wellenzahl und (1.7) wird zur Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0. \quad (1.8)$$

Zu beachten ist, dass die eigentliche physikalische Größe der Druck p und nicht die komplexe Amplitude u ist.

Typischerweise führen bei Wellenphänomenen lokale Störungen zu Änderungen an weit entfernt liegenden Gebieten. Bereits 1912 betrachtete Arnold Sommerfeld das Verhalten akustischer Wellen für große Distanzen und leitete eine sogenannte Ausstrahlungsbedingung für unendliche Gebiete her:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - i\kappa u_s \right) = 0. \quad (1.9)$$

Mit r wird der Abstand vom Ursprung in der euklidischen Norm bezeichnet, d.h. $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ für $x \in \mathbb{R}^3$. Der obige Grenzwert soll dabei gleichmäßig für alle Richtungen $x/|x|$ sein. Die sogenannte Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (1.9) ist aus mathematischer Sicht so gestaltet, dass sie Eindeutigkeit einer Lösung der Helmholtz-Gleichung gewährleisten kann. Betrachtet man z.B. die Kugelwellen

$$u^\pm(x) = \frac{e^{\pm i\kappa|x|}}{|x|}, \quad (1.10)$$

so sind beide Wellen Lösungen der Helmholtzgleichung für $x \neq 0$, aber nur u^+ erfüllt die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung. An den zugehörigen physikalischen Wellen

$$p^\pm(x, t) = \frac{\cos(\pm\kappa|x| - \omega t)}{|x|} \quad (1.11)$$

erkennt man, dass p^+ eine ausstrahlende oder herauslaufende und p^- eine einfallende Lösung ist, da

$$p^\pm(|x| \pm c, t + 1) = \frac{|x|}{|x| \pm c} p^\pm(|x|, t), \quad |x| > c. \quad (1.12)$$

p^+ hat im Ursprung eine Quelle, von der aus die Welle nach außen läuft und sich dabei um den Faktor $|x|/(|x| + c)$ abschwächt. Bei p^- kommt die Welle von außen und hat im Ursprung eine Senke.

Physikalisch ist diese Erklärung jedoch nicht ganz korrekt, da nicht die Welle selber, sondern der Energiefluss die relevante Größe ist. Die Summe aus (1.1) multipliziert mit v und (1.4) multipliziert mit p/ρ_0 führt für konstante Dichte ρ_0 auf

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 |v|^2 + \frac{1}{\rho_0 c^2} |p|^2 \right) + \text{div}(pv) = 0. \quad (1.13)$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_V \text{div}(pv) dV = \int_{\partial V} (pv) \cdot n dS \quad (1.14)$$

1 Einleitung

kann $J := pv$ als akustischer Energieflussvektor und $\frac{1}{2} \left(\rho_0 |v|^2 + \frac{1}{\rho_0 c^2} |p|^2 \right)$ als akustische Energiedichte bestehend aus kinetischer Energiedichte $\frac{1}{2} \rho_0 |v|^2$ und potentieller Energiedichte $\frac{1}{2} |p|^2 / (\rho_0 c^2)$ interpretiert werden. Für zeit-harmonische Wellen ist der Mittelwert des Energieflussvektors über eine Periode $2\pi/\omega$

$$J_{\text{av}}(x) := \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} J(x, t) dt \quad (1.15)$$

die entscheidene Größe.

Aus (1.1) folgt für zeit-harmonische Wellen für $v(x, t) = \Re(w(x)e^{-i\omega t})$

$$w = -\frac{i}{\rho_0 \omega} \text{grad } u \quad (1.16)$$

und somit für den Energieflussvektor

$$J(x, t) = \Re(u(x)e^{-i\omega t}) \Re\left(-\frac{i}{\rho_0 \omega} (\text{grad } u)(x)e^{-i\omega t}\right). \quad (1.17)$$

Elementare Umformungen ergeben für den gemittelten Flussvektor

$$J_{\text{av}} = -\frac{1}{2\rho_0 \omega} \Im(u \overline{\text{grad } u}) \quad (1.18)$$

und somit für den Fluss durch eine Sphäre $\partial B_r = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = r\}$ mit Radius r

$$J_{\text{av},r} = -\frac{1}{2\rho_0 \omega} \Im \int_{\partial B_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds. \quad (1.19)$$

Aus der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung (1.9) folgt nun

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B_r} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + \kappa^2 |u|^2 + 2\kappa \Im \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \right) ds = 0 \quad (1.20)$$

und daraus

$$\lim_{r \rightarrow \infty} J_{\text{av},r} \geq 0, \quad (1.21)$$

d.h. die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung garantiert einen nach außen gerichteten Energiefluss durch eine hinreichend große Sphäre.

Bei all diesen Überlegungen ist zu beachten, dass κ zwingend positiv sein muss. Dies ist bei Resonanzproblemen nicht der Fall. Wenn κ negativen Imaginärteil hat, d.h. auch $\Im \omega < 0$, so wird z.B. die Kugelwelle p^+ siehe (1.11) in der Zeit t exponentiell gedämpft, während sie im Ort $|x|$ exponentiell ansteigt. Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung an u^+ ist damit für $\Im(\kappa) < 0$ nicht erfüllt!

Zum besseren Verständniss von Resonanzproblemen betrachten wir zunächst folgendes Modellproblem:

$$-\Delta u - \lambda u = f \quad \text{auf } \Omega := (0, \pi)^2, \quad (1.22a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (1.22b)$$

1 Einleitung

Aus der Theorie selbstadjungierter Operatoren ist bekannt, dass der negative Laplace-Operator $-\Delta : \mathcal{D}(-\Delta) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ein reines Punktspektrum aus reellen Eigenwerten besitzt und die zugehörigen Eigenfunktionen eine Orthonormalbasis des $L^2(\Omega)$ bilden. In diesem Fall sind die Eigenwerte durch

$$\lambda_{\nu,\mu} = \nu^2 + \mu^2, \quad \nu, \mu = 0, 1, \dots \quad (1.23)$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen durch

$$u_{\nu,\mu} = \frac{2}{\pi} \cos(\nu x_1) \cos(\mu x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \nu, \mu = 0, 1, \dots \quad (1.24)$$

gegeben und (1.22) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn λ kein Eigenwert von $-\Delta$ ist. Die Lösung ist gegeben durch

$$u_\lambda = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{(f, u_{\nu,\mu})_{L^2(\Omega)}}{\lambda_{\nu,\mu} - \lambda} u_{\nu,\mu}. \quad (1.25)$$

Das Verhalten der Lösung in der Nähe eines isolierten Eigenwertes λ^* wird von der zugehörigen Eigenfunktion u_{λ^*} dominiert:

$$u_\lambda \approx \frac{(f, u_{\lambda^*})_{L^2(\Omega)}}{\lambda^* - \lambda} u_{\lambda^*}, \quad |\lambda^* - \lambda| \text{ hinreichend klein.} \quad (1.26)$$

Wir modifizieren nun das Modellproblem dahingehend, dass wir das Grundgebiet Ω „aufbohren“ (siehe Fig. 1.1) und eine geeignete Ausstrahlungsbedingung fordern:

$$-\Delta u - \kappa^2 u = f \quad \text{auf } \Omega \quad (1.27a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (1.27b)$$

$$u \quad \text{ausstrahlend.} \quad (1.27c)$$

Die Approximation (1.26) bleibt mit $\lambda = \kappa^2$ gültig, wobei λ^* nunmehr das Quadrat einer komplexen Resonanz κ mit $\Re(\kappa) > 0$ und $\Im(\kappa) < 0$ darstellt. In Fig. 1.1 sind zwei solche Resonanzen und deren zugehörige Resonanzfunktionen dargestellt. Sie sind aus dem zweifachen Eigenwert $\lambda_{2,0} = \lambda_{0,2} = 4$ des geschlossenen Quadrats entstanden. Der Realteil der Resonanz wird als Resonanzfrequenz des Systems bezeichnet, während der Imaginärteil ein Maß für die Dämpfung ist: Im geschlossenen Quadrat kann wegen der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ keine Energie das System verlassen (vgl. (1.19)). Eine einmal angeregte Eigenfunktion wird in der Zeit ungedämpft weiterschwingen. Im „aufgebohrten“ Quadrat kann Energie das System verlassen, die Resonanzfunktionen sind in der Zeit wegen des Ansatzes

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\Re(\kappa)t} e^{\Im(\kappa)t} \quad (1.28)$$

exponentiell gedämpft.

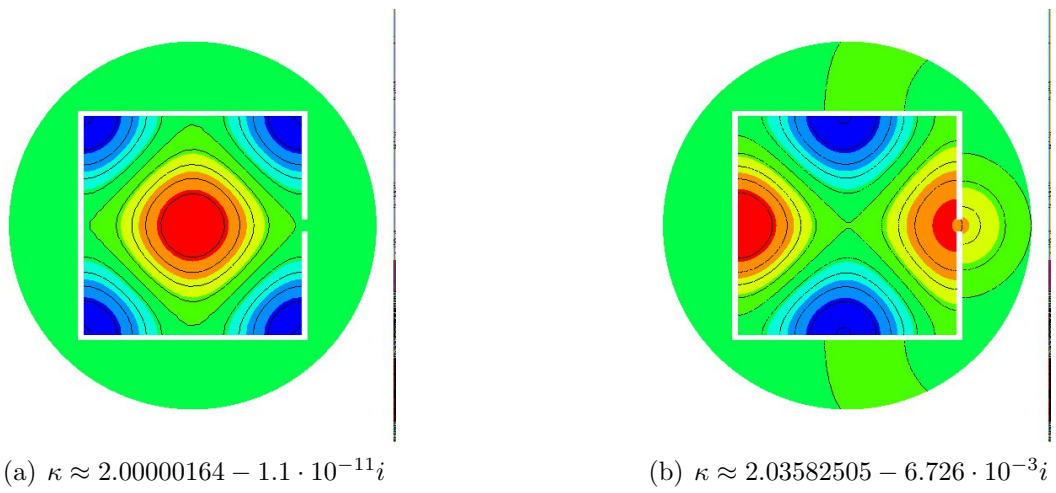


Abbildung 1.1: Resonanzfunktionen eines geöffneten Quadrates

2 Helmholtz-Probleme auf beschränkten Gebieten

Sei Ω eine offene, *beschränkte* Teilmenge des \mathbb{R}^d mit $d = 1, 2, 3$ mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega$ und äußerem Normalenvektor n . Wir betrachten zwei Sorten von Randwertproblemen:

Definition 2.1 (Helmholtz-Problem). *Sei $l \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ und $\kappa > 0$ gegeben. Dann besteht das Helmholtz-Problem (auch Quellproblem) darin, eine Lösung $u \in H^2(\Omega)$ von*

$$-\Delta u - \kappa^2 u = l \quad \text{auf } \Omega, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.1b)$$

zu finden.

In variationeller Form suchen wir nach einer Lösung $u \in H^1(\Omega)$ der Gleichung

$$a(u, v) - \kappa^2 b(u, v) = f(v), \quad v \in H^1(\Omega), \quad (2.2)$$

mit

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx, \quad (2.3a)$$

$$b(u, v) := \int_{\Omega} u \bar{v} \, dx, \quad (2.3b)$$

$$f(v) := \int_{\Omega} l \bar{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} g \bar{v} \, ds. \quad (2.3c)$$

$a(\bullet, \bullet)$ und $b(\bullet, \bullet)$ sind auf $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ symmetrische Sesquilinearformen (auch hermitesche Formen), d.h. sie sind

- linear im ersten Argument: $s(\alpha u_1 + u_2, v) = \alpha s(u_1, v) + s(u_2, v)$,
- antilinear im zweiten Argument: $s(u, \alpha v_1 + v_2) = \bar{\alpha} s(u, v_1) + s(u, v_2)$ und
- symmetrisch/ hermitesch: $s(u, v) = \overline{s(v, u)}$.

$a(\bullet, \bullet) + \epsilon b(\bullet, \bullet)$ mit beliebigem $\epsilon > 0$ ist zudem koerzitiv auf $H^1(\Omega)$, d.h. es existiert ein $C = \min\{1, \epsilon\} > 0$ mit

$$|a(v, v) + \epsilon b(v, v)| \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad v \in H^1(\Omega). \quad (2.4)$$

f ist ein antilineares, stetiges Funktional auf $H^1(\Omega)$.

Lemma 2.2 (Lax-Milgram). *Sei $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ ein Hilbert-Raum und s eine V -koerzitive Sesquilinearform. Dann existiert für alle antilinearen, stetigen Funktionale f eine eindeutige Lösung $u \in V$ des Variationsproblems*

$$s(u, v) = f(v), \quad v \in V,$$

und die Lösung hängt stetig von f ab.

Beweis. Siehe z.B. [Alt99]. □

Definition 2.3 (Eigenwertproblem). $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times H^2(\Omega) \setminus \{0\}$ heisst ein Eigenpaar, wenn es eine Lösung des Eigenwertproblems

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{auf } \Omega, \tag{2.5a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{2.5b}$$

ist.

In variationeller Form suchen wir Lösungen $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ von

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad v \in H^1(\Omega), \tag{2.6}$$

mit den Definitionen aus (2.3).

(2.1) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn κ^2 kein Eigenwert von (2.5) ist. Dazu hier einige Grundlagen, welche [DL90, Chapt. VIII] entnommen sind.

Definition 2.4 (Spektrum). *Seien $(V, (\bullet, \bullet))$ ein komplexer Hilbert-Raum, $A : V \supset \mathcal{D}(A) \rightarrow V$ ein linearer Operator und id die Identität in V . Dann heisst $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ die Resolventenmenge von A und für jedes $\lambda \in \rho(A)$*

$$R_\lambda(A) := (A - \lambda \text{id})^{-1} : (A - \lambda \text{id})(\mathcal{D}(A)) \rightarrow \mathcal{D}(A)$$

die Resolvente von A , wenn

1. das Bild $(A - \lambda \text{id})(\mathcal{D}(A))$ dicht ist in V ,
2. die Inverse $R_\lambda(A)$ existiert und
3. $R_\lambda(A)$ ist stetig.

Das Spektrum $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ von A wird unterteilt in ein Punktspektrum

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \sigma(A) \mid A - \lambda \text{id} \text{ ist nicht invertierbar}\},$$

ein kontinuierliches Spektrum

$$\sigma_c(A) := \{\lambda \in \sigma(A) \mid R_\lambda(A) \text{ ist unstetig und } \overline{(A - \lambda \text{id})(\mathcal{D}(A))} = V\}$$

und in das Residualspektrum

$$\sigma_r(A) := \{\lambda \in \sigma(A) \mid A - \lambda \text{id} \text{ ist invertierbar, aber } \overline{(A - \lambda \text{id})(\mathcal{D}(A))} \neq V\}.$$

Wenn keine Unklarheiten zu befürchten sind, schreiben wir R_λ an Stelle von $R_\lambda(A)$.

Satz 2.5. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen aus Def. 2.4 sei A abgeschlossen. Dann ist*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid R_\lambda \in L(V)\},$$

wobei $L(V)$ den Raum der linearen, stetigen Abbildungen auf V bezeichnet.

Beweis. $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid R_\lambda \in L(V)\} \subset \rho(A)$ ist trivial. Sei also $\lambda \in \rho(A)$. Zu zeigen ist $(A - \lambda \text{id})(\mathcal{D}(A)) = V$. Da $(A - \lambda \text{id})(\mathcal{D}(A))$ dicht in V ist, existiert zu jedem $y \in V$ eine Urbildfolge $x_n \in \mathcal{D}(A)$, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda \text{id})(x_n) = y \quad \text{in } V.$$

Aus der Stetigkeit von R_λ folgt

$$\|x_n - x_m\|_X \leq C \|(A - \lambda \text{id})(x_n - x_m)\|$$

und daraus die Konvergenz $x_n \rightarrow x \in V$. Da $A - \lambda \text{id}$ ebenso wie A abgeschlossen ist, folgt $x \in \mathcal{D}(A - \lambda \text{id})$ und $y = (A - \lambda \text{id})(x) \in (A - \lambda \text{id})(\mathcal{D}(A))$. \square

Satz 2.6. *Sei $(V, (\bullet, \bullet))$ ein unendlich-dimensionaler, komplexer Hilbert-Raum und $A \in L(V)$ ein kompakter, hermitescher Operator. Dann besteht $\sigma(A) \setminus \{0\}$ aus abzählbar vielen reellen Eigenwerten mit endlicher Vielfachheit, die eine Nullfolge bilden. Die Eigenräume $\ker(A - \lambda \text{id})$ zu den Eigenwerten $\lambda \in \sigma_p$ sind paarweise orthogonal und bilden eine Basis des Raumes V .*

Beweis. Siehe z.B. [DL90, Chapt. VIII, Theorem 3] oder [Kre99, Theorem 3.11]. \square

Satz 2.7 (Fredholmsche Alternative). *Sei $(V, (\bullet, \bullet))$ ein komplexer Hilbert-Raum, $A \in L(V)$ ein kompakter, hermitescher Operator, $f \in V$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\mu \neq 0$. Weiters seien (λ_j, v_j) , $j = 0, 1, \dots$ die orthonormalisierte Eigenpaare von A , wobei jeder Eigenwert seiner Vielfachheit nach aufgeführt wird. Dann gibt es zur Lösbarkeit von*

$$(A - \mu \text{id})(u) = f. \tag{2.7}$$

zwei Alternativen:

1. $\mu \notin \sigma(A)$: Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in V$ von (2.7), welche gegeben ist durch

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(f, v_j)}{\lambda_j - \mu} v_j. \tag{2.8}$$

2. $\mu \in \sigma(A)$: (2.7) ist genau dann lösbar, wenn $f \in \ker(A - \mu \text{id})^\perp$. In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen der Form

$$u = \sum_{\substack{j=0 \\ \lambda_j \neq \mu}}^{\infty} \frac{(f, v_j)}{\lambda_j - \mu} v_j + u_\mu, \quad u_\mu \in \ker(A - \mu \text{id}). \tag{2.9}$$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 2.6. □

Satz 2.8. Sei $s(\bullet, \bullet)$ eine koerzitive, stetige, hermitesche Form auf dem Hilbertraum $(V, (\bullet, \bullet)_V)$, und V dicht und kompakt eingebettet in den Hilbert-Raum $(H, (\bullet, \bullet)_H)$. Dann ist der Operator $S : H \supset \mathcal{D}(S) \rightarrow H$ mit

$$\begin{aligned} s(u, v) &= (Su, v)_H, \quad u \in \mathcal{D}(S), \quad v \in V, \\ \mathcal{D}(S) &:= \{u \in V \mid Su \in H\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

selbstadjungiert und $\mathcal{D}(S)$ dicht in H . Weiterhin ist $\mathcal{D}(S)$ versehen mit der Graphennorm $\|u\|_{\mathcal{D}(S)} := \sqrt{(u, u)_H + (Su, Su)_H}$ ein Hilbert-Raum und die Einbettung von $\mathcal{D}(S)$ nach V ist stetig und nach H kompakt.

Beweis.

- Dichtheit: Sei $f \in H$ mit $(u, f)_H = 0$ für alle $u \in \mathcal{D}(S)$. Dann existiert nach dem Lax-Milgram Lemma ein $u_f \in V$ sodass $a(u, u_f) = (u, f)_H$ für alle $u \in \mathcal{D}(S)$. Somit folgt die Behauptung aus

$$0 = a(u, u_f) = (Su, u_f)_H = (y, u_f)_H, \quad y = Su \in S(\mathcal{D}(S)) = H.$$

- Selbstadjungiert: $\mathcal{D}(S)$ ist maximal und

$$(Su, v)_H = s(u, v) = \overline{s(v, u)} = \overline{(Sv, u)_H} = (u, Sv)_H, \quad u, v \in \mathcal{D}(S).$$

- Abgeschlossenheit in der Graphennorm: Adjungierte Operatoren sind abgeschlossen und somit folgt die Behauptung aus $S^* = S$.
- Die stetige Einbettung in V folgt mit der Koerzitivität und der stetigen Einbettung von V in H :

$$\|v\|_V^2 \leq Cs(v, v) = C(Sv, v)_H \leq C\|Sv\|_H\|v\|_H \leq \tilde{C}\|Sv\|_H\|v\|_V.$$

□

Satz 2.9. Sei $(V, (\bullet, \bullet))$ ein unendlich-dimensionaler komplexer Hilbert-Raum, der kompakt in den Hilbert-Raum $(H, (\bullet, \bullet)_H)$ eingebettet ist und $s(\bullet, \bullet)$ eine stetige, koerzitive (mit Konstante $\alpha > 0$), hermitesche Form auf $V \times V$. $S : H \supset \mathcal{D}(S) \rightarrow H$ sei der in (2.10) definierte Operator. Dann hat S ein reines Punktspektrum aus Eigenwerten λ_k , $k = 0, \dots$ mit endlicher Vielfachheit, die sich nur im Unendlichen häufen, d.h.

$$\sigma(S) = \sigma_p(S) = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \quad \text{mit } 0 < \alpha \leq \lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

Die gemäß der Vielfachheit der Eigenwerte aufgeführten Eigenvektoren $v_k \in V$, $k = 0, \dots$, können als Orthonormalbasis von V oder auch von H gewählt werden.

Beweis. Aus der Koerzitivität folgt mit dem Lemma von Lax-Milgram die Existenz einer stetigen Inversen $S^{-1} : H \rightarrow \mathcal{D}(S)$, welche wegen des vorigen Satzes kompakt von H nach H ist. Somit sind die Voraussetzungen von Satz 2.6 und der Fredholmschen Alternative Satz 2.7 erfüllt, da

$$(S^{-1}u, v) = (S^{-1}u, S(S^{-1}v)) = (S(S^{-1}u), S^{-1}v) = (u, S^{-1}v).$$

Sei nun $\lambda^{-1} \notin \sigma_p(S^{-1})$, $f \in H$ und $g = S^{-1}f \in \mathcal{D}(S)$. Dann ist wegen der Fredholmschen Alternative Satz 2.7

$$\left(\frac{1}{\lambda} \text{id} - S^{-1}\right) u = \frac{1}{\lambda} g$$

eindeutig lösbar. Aus $S^{-1}u, \lambda^{-1}g \in \mathcal{D}(S)$ schließen wir $u \in \mathcal{D}(S)$ und damit ist u auch die eindeutige Lösung der Gleichung

$$(S - \lambda \text{id})u = f.$$

Somit folgt die Behauptung aus Satz 2.6.

Einzig zu zeigen ist noch, dass die Eigenvektoren dicht in V liegen. Dazu sei $\tilde{S} : V \rightarrow V$ der mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes eindeutig definierte Isomorphismus mit $s(u, v) = (\tilde{S}u, v)_V$, für $u, v \in V$. Sei nun $f \in V$ orthogonal zu allen Eigenfunktionen, d.h. $(v_k, f)_V = 0$, $k = 0, \dots$, und $g = \tilde{S}^{-1}f \in V$. Dann folgt

$$0 = (f, v_k)_V = (\tilde{S}g, v_k)_V = s(g, v_k) = \overline{s(v_k, g)} = \overline{(Sv_k, k)_H} = \overline{\lambda_k(v_k, g)_H}$$

und daraus wegen $\overline{\lambda_k} \neq 0$, dass g in H orthogonal auf allen Eigenfunktionen steht. Wiederum mit Satz 2.6 ist $g = 0$ und daraus $f = \tilde{S}g = 0$. \square

Korollar 2.10. *Das Helmholtz-Problem 2.1 ist genau dann eindeutig lösbar, wenn κ^2 kein Eigenwert des Eigenwertproblems 2.3 ist. Alle Eigenwerte von (2.5) sind nicht negativ und haben eine endliche Vielfachheit.*

Beweis. Folgt direkt aus (2.4) und dem vorigen Satz mit $V := H^1(\Omega)$, $H := L^2(\Omega)$, $s(\bullet, \bullet) := a(\bullet, \bullet) + \epsilon b(\bullet, \bullet)$ aus (2.3) mit $\epsilon > 0$. \square

Allgemeiner gilt: Sei $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ein Gelfand-Triple und $s(\bullet, \bullet) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige, hermitesche Sesquilinearform, welche die Gårding-Ungleichung

$$|s(u, u) + \gamma(u, u)_H| \geq \alpha(u, u)_V, \quad u \in V, \quad (2.11)$$

mit $\alpha, \gamma > 0$ erfüllt. Dann gelten die Aussagen aus Satz 2.9 mit dem Spektralverschiebung

$$\sigma(S) = \sigma_p(S) = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \quad \text{mit } \alpha - \gamma \leq \lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

3 Finite Elemente Methode

Die Grundlage konformer Finite Elemente Methoden (FEM) bildet die Lösung des Variationsproblems

$$\text{Suche } u \in V : \quad s(u, v) = f(v), \quad v \in V, \quad (3.1)$$

auf endlich-dimensionalen Unterräumen $V_h \subset V$ des Hilbertraumes $(V, (\bullet, \bullet)_V)$:

$$\text{Suche } u_h \in V_h : \quad s(u_h, v_h) = f(v_h), \quad v_h \in V_h. \quad (3.2)$$

Zur Konstruktion geeigneter Unterräume sei hier auf [BS08] verwiesen. Typischerweise wird nach Ciarlet ein einzelnes Finite Element als Triple aus einem hinreichend glatt berandeten Gebiet T mit nicht-leerem Inneren, einem Funktionenraum P und einer Basis des Dualraums P' bezeichnet (siehe [BS08, Def. 3.1.1]). Dies ermöglicht die Definition eines lokalen Interpolationsoperators für jedes Finite Element und unter gewissen Voraussetzungen auch die Abschätzung des lokalen Interpolationsfehlers (siehe [BS08, Def. 4.4.4]). Weiters wird das Rechengebiet Ω so in finite Elemente zerlegt, dass jedes Element affin interpolations-äquivalent zu einem gegebenen Referenzelement ist. Dann kann man unter weiteren Voraussetzungen folgende Abschätzung für den Interpolationsfehler herleiten (siehe [BS08, (4.4.28)])

$$\|v - \mathcal{I}_h v\|_{H^s(\Omega)} \leq Ch^{m-s}|v|_{H^m(\Omega)}, \quad v \in H^m(\Omega). \quad (3.3)$$

$|\bullet|_{H^m(\Omega)}$ bezeichnet dabei die m -te Sobolev Halbnorm. Die Konstante $C > 0$ hängt nicht vom maximalen Durchmesser h der Finiten Elemente ab. Eine wesentliche Voraussetzung ist jedoch, dass der verwendete Funktionenraum die Polynome bis zum Grade $m - 1$ enthält, d.h. $\Pi_{m-1} \subset P$. Da $\mathcal{I}_h : V \rightarrow V_h$, kann der Bestapproximationsfehler in $V := H^1(\Omega)$ bei Verwendung von lokalen Polynomräumen des Grades p abgeschätzt werden durch

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V \leq Ch^p|v|_{H^{p+1}(\Omega)}, \quad v \in H^{p+1}(\Omega). \quad (3.4)$$

Da $H^2(\Omega)$ für beschränkte Gebiete Ω dicht in $H^1(\Omega)$ ist, folgt insbesondere für eine Familie von V_h mit $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0, \quad v \in H^1(\Omega). \quad (3.5)$$

Für V -koerzive Sesquilinearformen folgt daraus bereits die Konvergenz von u_h gegen u aus dem Céa-Lemma:

Lemma 3.1 (Céa). Sei a eine koerzitive ($|s(u, u)| \geq \alpha(u, u)_V$ mit $\alpha > 0$) und stetige $|s(u, v)| \leq C\|u\|_V\|v\|_V$ mit $C > 0$ Sesquilinearform. Dann gilt für die Lösungen $u \in V$ und $u_h \in V_h$ von (3.1) bzw. (3.2)

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (3.6)$$

Beweis. Es gilt die Galerkin-Orthogonalität für konforme ($V_h \subset V$) Galerkin-Verfahren, d.h.

$$s(u - u_h, v_h) = f(v_h) - f(v_h) = 0, \quad v_h \in V_h, \quad (3.7)$$

und daraus mit $v_h - u_h \in V_h$ für beliebiges $v_h \in V_h$

$$\alpha\|u - u_h\|_V^2 \leq |s(u - u_h, u - u_h)| \leq |s(u - u_h, u - v_h)| \leq C\|u - u_h\|_V\|u - v_h\|_V.$$

□

Wir bereits gesehen, ist bei Helmholtz-Problemen die Sequilinearform $s(\bullet, \bullet) := a(\bullet, \bullet) - \kappa^2 b(\bullet, \bullet)$ aus (2.2) jedoch nicht koerzitiv. Aber es existiert eine Konstante $K > 0$, sodass die Gårding Ungleichung

$$|s(u, u) + K(u, u)_{L^2(\Omega)}| \geq \alpha\|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad u \in H^1(\Omega) \quad (3.8)$$

für ein $\alpha > 0$ erfüllt ist.

Satz 3.2. Sei $s : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Sesquilinearform mit folgenden Eigenschaften:

- $|s(u, v)| \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$,
- $|s(u, u) + K(u, u)_{L^2(\Omega)}| \geq \alpha\|u\|_{H^1(\Omega)}^2$,
- die Lösungen u des adjungierten Variationsproblems $s(v, u) = (v, \tilde{f})_{L^2(\Omega)}$, $v \in H^1(\Omega)$, mit $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ sind eindeutig und es gilt $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C_R\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)}$.

Weiters seien $V_h \subset V := H^1(\Omega)$ für $h > 0$ endlich-dimensionale Ansatzräume, sodass (3.4) erfüllt ist mit $p = 1$.

Wenn das Variationsproblem (3.1) eindeutig lösbar ist, dann existiert ein $h_0 > 0$ sodass für alle $h \leq h_0$ das diskrete Problem (3.2) eindeutig lösbar ist und es gilt

$$\|u - u_h\|_V \leq \tilde{C} \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \quad (3.9)$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$ unabhängig von h .

Beweis. Wir nehmen zunächst an, u_h seine eine Lösung zu (3.2) (die Existenz ist noch nicht sichergestellt). Mit Hilfe der Galerkin-Orthogonalität (3.7) und den Voraussetzungen an s folgt daraus wie beim Céa-Lemma

$$\begin{aligned} \alpha\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq |s(u - u_h, u - u_h) + K(u - u_h, u - u_h)_{L^2(\Omega)}| \\ &\leq C\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + K\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

für beliebige $v_h \in V_h$.

Wir verwenden nun Dualitätstechniken zum Abschätzen des zweiten Terms. Sei dazu $w \in V$ die eindeutige Lösung des adjungierten Problems $s(v, w) = (v, u - u_h)_{L^2(\Omega)}$, $v \in V$, mit $|w|_{H^2(\Omega)} \leq C_R \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$. Dann folgt für beliebiges $w_h \in V_h$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = s(u - u_h, w) = s(u - u_h, w - w_h) \leq C \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|w - w_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Wegen (3.4) für $p = 1$ folgt daraus für geeignetes w_h

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C C_R C_a h \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)},$$

d.h. $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C C_R C_a h \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$. Einsetzen in (3.10) liefert

$$(\alpha - K C^2 C_R^2 C_a^2 h^2) \|u - u_h\|_V \leq C \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Da K , C , C_R und C_a unabhängig von h sind, folgt daraus die Existenz eines $h_0 > 0$, sodass für alle $h \leq h_0$ (3.9) mit einer Konstanten \tilde{C} unabhängig von h erfüllt ist.

Bleibt zu zeigen, dass eine Lösung u_h von (3.2) in diesem Fall existiert. Da (3.2) ein lineares Problem auf einem endlich-dimensionalen Raum V_h ist, reicht es, die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei also u_h eine Lösung von (3.2) mit $f = 0$. Da (3.1) eindeutig lösbar ist, folgt daraus $u = 0$ und damit wegen $0 \in V_h$ und (3.9) $u_h = 0$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Die Voraussetzungen an das adjungierte Problem lassen sich mit einer ausgefeilteren Beweistechnik vermeiden. Dazu werden wir uns im nächsten Abschnitt allgemein mit Projektionsverfahren für kompakte Störungen eines koerzitativen Operators beschäftigen.

Sei der lineare Operator $S : V \rightarrow V$ durch $s(u, v) = (Su, v)_V$, $u, v \in V$, definiert. Weiters ordnen wir dem linearen Funktional f mit dem Riesz'schen Darstellungssatz ein Element $f \in V$ durch $f(v) = (f, v)_V$, $v \in V$, zu. Dann ist (3.1) äquivalent zu

$$Su = f. \tag{3.11}$$

Sei H ein weiterer Hilbert-Raum mit $V \subset H$ und kompakter Einbettung $E : V \rightarrow H$. Wenn s für $c, \alpha > 0$ die Gårding Ungleichung

$$|s(u, u) + c(u, u)_H| \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad u \in V,$$

erfüllt, so ist $S = (S + cE^*E) - cE^*E$ die Differenz eines koerzitativen Operators $S + cE^*E$ und eines kompakten Operators cE^*E .

Zur Erinnerung: Sei $(V, (\bullet, \bullet)_V)$ ein Hilbert-Raum und $X \subset V$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum. Dann ist die orthogonale Projektion $P_X : V \rightarrow X$ für ein $u \in V$ eindeutig bestimmt als Minimierer des Funktionals $\min_{u_X \in X} \|u - u_X\|_V$, d.h. $P_X u := u_X$. Alternativ ist $u_X \in X$ genau dann die orthogonale Projektion von $u \in V$, wenn $(u - u_X, v)_V = 0$ für alle $v \in X$. Sei nun $P_h : V \rightarrow V_h$ die orthogonale Projektion auf

den endlich-dimensionalen Unterraum V_h (wegen (3.5)) konvergiert diese punktweise gegen die Identität). Dann ist (3.2) äquivalent zu

$$P_h S u_h = P_h f. \quad (3.12)$$

Den Zusammenhang zwischen Quell- und Eigenwertproblemen haben wir bereits im letzten Abschnitt gesehen. Daher macht es Sinn, Eigenwertprobleme der Form (2.6) ebenfalls zu behandeln. Zur Vorbereitung von Resonanzproblemen auf unbeschränkten Gebieten, machen wir hier den Schritt zu nichtlinearen Eigenwertproblemen.

Definition 3.3. Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ offen und sei $S(\lambda) : V \rightarrow V$ für $\lambda \in \Lambda$ eine holomorphe Familie von Operatoren, d.h. für alle $\lambda_0 \in \Lambda$ existiert die Ableitung

$$S'(\lambda_0) := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} (S(\lambda) - S(\lambda_0)) \quad (3.13)$$

im Sinne von Normkonvergenz in $L(V)$. Dann ist $(\lambda, u) \in \Lambda \times V \setminus \{0\}$ ein Eigenpaar von S genau dann wenn

$$S(\lambda)u = 0. \quad (3.14)$$

(2.6) fällt unter diese Definition, wenn wir zu den Sequilinearformen a und b die Operatoren $A, B : V \rightarrow V$ assoziieren und $S(\lambda) := A - \lambda B$ setzen. Die diskreten Eigenwertprobleme

$$\text{Suche } (\lambda_h, u_h) \in \mathbb{C} \times V_h \setminus \{0\} : a(u_h, v) = \lambda_h b(u_h, v), \quad v \in V_h, \quad (3.15)$$

sind analog zu den Quellproblemen äquivalent zu den projezierten Problemen

$$\text{Suche } (\lambda_h, u_h) \in \mathbb{C} \times V_h \setminus \{0\} : P_h S(\lambda_h)u_h = 0. \quad (3.16)$$

4 Projektionsverfahren

Sei $(V, (\bullet, \bullet))$ ein Hilbert-Raum, $V_h \subset V$ für $h > 0$ eine Familie abgeschlossener Unterräume und $P_h : V \rightarrow V_h$ die orthogonale Projektion. Wir werden im folgenden Probleme der Form

$$\text{suche } u \in V : (A + K)u = f \quad (4.1)$$

bzw.

$$\text{suche } u_h \in V_h : P_h(A + K)u_h = P_h f \quad (4.2)$$

für beliebige $f \in V$ betrachten. $K : V \rightarrow V$ ist dabei ein kompakter, linearer Operator und $A : V \rightarrow V$ ein stetiger, linearer Operator, für den das Projektionsverfahren konvergiert (d.h. die Lösung $u_h \in V_h$ von $P_h A u_h = P_h f$ konvergiert für $h \rightarrow 0$ gegen die Lösung $u \in V$ von $Au = f$.)

Wir benötigen einige Grundlagen aus der Funktionalanalysis. Die Darstellung folgt zum Teil [Kre99].

Lemma 4.1 (Neumannsche Reihe). *Sei $A : V \rightarrow V$ ein beschränkter linearer Operator eines Banach-Raums V nach V mit der Eigenschaft $\|A\| < 1$. Dann besitzt $\text{id} - A$ eine beschränkte Inverse auf V . Diese ist gegeben durch die Neumannsche Reihe*

$$(\text{id} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad (4.3)$$

und erfüllt

$$\|(\text{id} - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}. \quad (4.4)$$

Die iterierten Operatoren A^k sind erklärt durch $A^0 := \text{id}$ und $A^k := AA^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es gilt $\|A^k\| \leq \|A\|^k$. Da $\|A\| < 1$, haben wir absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

in dem Banach-Raum $L(V, V)$. Damit ist mit der Dreiecksungleichung

$$\left\| \sum_{k=n}^m A^k \right\| \leq \sum_{k=n}^m \|A\|^k$$

die Partialsummenfolge der Neumannschen Reihe eine Cauchy-Folge, welche im Banachraum $L(V, V)$ konvergiert. Somit konvergiert die Neumannsche Reihe und definiert einen beschränkten linearen Operator

$$S := \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

mit $\|S\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$. S ist die Inverse von $\text{id} - A$:

$$(\text{id} - A)S = (\text{id} - A) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{id} - A) \sum_{k=0}^n A^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{id} - A^{n+1}) = \text{id},$$

da $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Analog folgt $S(\text{id} - A) = \text{id}$. \square

Korollar 4.2. Sei $A(\lambda) : V \rightarrow V$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Familie beschränkter linearer Operatoren und sei $\lambda \mapsto A(\lambda)$ stetig (holomorph). Ist $A(\lambda_0)$ für ein λ_0 stetig invertierbar, so existiert die Inverse $A(\lambda)^{-1}$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von λ_0 und $\lambda \mapsto A(\lambda)^{-1}$ ist dort stetig (holomorph).

Beweis. Übungsaufgabe. \square

Satz 4.3. Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ offen, $\hat{\Lambda} \subset \Lambda$ kompakt und sei $A(\lambda) : V \rightarrow V$ für $\lambda \in \Lambda$ eine Familie beschränkter linearer Operatoren, sodass die Abbildung $\lambda \mapsto A(\lambda)$ stetig ist. Weiter sei der Operator $K : V \rightarrow V$ kompakt und für alle $\lambda \in \hat{\Lambda}$ gelte $|(A(\lambda)v, v)| \geq \alpha \|v\|^2$, $v \in V$, mit einer Konstanten $\alpha > 0$.

Sei weiter $V_h \subset V$ für $h > 0$ eine Familie abgeschlossene Unterräume von V , sodass die orthogonale Projektion $P_h : V \rightarrow V_h$ für $h \rightarrow 0$ punktweise gegen die Identität $\text{id} : V \rightarrow V$ konvergiert.

Ist $S(\lambda) := A(\lambda) + K$ für alle $\lambda \in \hat{\Lambda}$ invertierbar, dann existiert ein $h_0 > 0$, sodass $S_h := P_h A : V_h \rightarrow V_h$ für alle $h \leq h_0$ invertierbar ist und

$$\sup_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \|S_h(\lambda)^{-1}\| \leq C \tag{4.5}$$

mit einer Konstanten $C > 0$ unabhängig von h .

Beweis. Für $\hat{\Lambda} := \{\lambda_0\}$ folgt der Beweis aus [Kre99, Theorem 13.7]. Wir zeigen hier den etwas allgemeineren Fall.

Sei dazu $\lambda \in \hat{\Lambda}$. $A_h(\lambda) := P_h A(\lambda) : V_h \rightarrow V_h$ und $A(\lambda) : V \rightarrow V$ sind nach dem Satz von Lax-Milgram stetig invertierbar und wegen Cor. 4.2 sind die Abbildungen $\lambda \mapsto \|A(\lambda)^{-1}\| \leq 1/\alpha$ und $\lambda \mapsto \|A_h(\lambda)^{-1}\| \leq 1/\alpha$ stetig. Daher existiert ein $\alpha > 0$ sodass $\sup_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \|A(\lambda)^{-1}\| \leq 1/\alpha$ und $\sup_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \|A_h(\lambda)^{-1}\| \leq 1/\alpha$ gilt. Analog existiert ein $C_1 > 0$ mit $\sup_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \|A(\lambda)\| \leq C_1$.

4 Projektionsverfahren

Wie im Beweis des Céa-Lemmas 3.1 folgt für alle $\lambda \in \hat{\Lambda}$ aus der Galerkin-Orthogonalität

$$\|A_h(\lambda)^{-1}P_h f - A(\lambda)^{-1}f\| \leq \frac{C_1}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|A(\lambda)^{-1}f - v_h\|, \quad f \in V,$$

und aus der punktweisen Konvergenz von $P_h - \text{id}$

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \|A_h(\lambda)^{-1}P_h f - A(\lambda)^{-1}f\| = 0, \quad f \in V. \quad (4.6)$$

Wir zeigen, dass daraus

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \|A_h(\lambda)^{-1}P_h K - A(\lambda)^{-1}K\|_{L(V)} = 0 \quad (4.7)$$

folgt und verwenden dazu, dass eine punktweise Konvergenz gleichmäßig ist auf kompakten Teilmengen des Raumes.

Genauer sei $\epsilon > 0$. Dann kann die relativ kompakte Menge $U := \{Kf : f \in V, \|f\| \leq 1\}$ durch eine endliche Anzahl von Kugeln $B_r(f_m)$, $m = 1, \dots, M(\epsilon)$ mit Radius $r := \alpha\epsilon/3$ überdeckt werden. Wegen (4.6) existiert ein $h_1 > 0$, sodass $\sup_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \|A_h(\lambda)^{-1}P_h f_m - A(\lambda)^{-1}f_m\| \leq \epsilon/3$ für alle $h \leq h_1$ und alle $m = 1, \dots, M$. Da alle $f \in U$ in einem der Bälle $B_r(f_m)$ enthalten sind, folgt

$$\begin{aligned} & \|A_h(\lambda)^{-1}P_h f - A(\lambda)^{-1}f\| \\ & \leq \|A_h(\lambda)^{-1}P_h(f - f_m)\| + \|A_h(\lambda)^{-1}P_h f_m - A(\lambda)^{-1}f_m\| + \|A(\lambda)^{-1}(f - f_m)\| \\ & \leq \frac{1}{\alpha}r + \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{\alpha}r = \epsilon \end{aligned}$$

und daraus (4.7). Nun zerlegen wir S_h in

$$\begin{aligned} S_h(\lambda) &= A_h(\lambda) + P_h K = A_h(\lambda) (\text{id} + A_h(\lambda)^{-1}P_h K) \\ &= A_h(\lambda) (\text{id} + A(\lambda)^{-1}K + (A_h(\lambda)^{-1}P_h - A(\lambda)^{-1})K) \\ &= A_h(\lambda)A(\lambda)^{-1} (A(\lambda) + K + A(\lambda) (A_h(\lambda)^{-1}P_h - A(\lambda)^{-1})K) \\ &= A_h(\lambda)A(\lambda)^{-1} \underbrace{S(\lambda) (\text{id} + S(\lambda)^{-1}A(\lambda) (A_h(\lambda)^{-1}P_h - A(\lambda)^{-1})K)}_{=: B_h(\lambda)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

$S(\lambda)$ ist für $\lambda \in \hat{\Lambda}$ invertierbar und nach der Riesz-Theorie ist die Inverse $S(\lambda)^{-1}$ beschränkt. Wegen Kor. 4.2 folgt die Stetigkeit von $\lambda \mapsto S(\lambda)^{-1}$ und daraus $\sup_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \|S(\lambda)^{-1}\| \leq C_2$ mit einem $C_2 > 0$. Wegen (4.7) existiert daher ein $h_0 \leq h_1$ sodass $\sup_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \|B_h(\lambda)\| \leq C_3 < 1$ für alle $h \leq h_0$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.1 mit

$$\sup_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \|S_h(\lambda)^{-1}\| \leq \sup_{\lambda \in \hat{\Lambda}} \frac{\|S(\lambda)^{-1}A(\lambda)A_h(\lambda)^{-1}\|}{1 - \|B_h(\lambda)\|} \leq \frac{C_1 C_2 \alpha^{-1}}{1 - C_3}. \quad (4.9)$$

□

Satz 4.4 (Céa Lemma). *Es gelten die Voraussetzungen des vorigen Satzes für ein einzelnes $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\hat{\Lambda} := \{\lambda\}$). Insbesondere sei $S := A + K$ stetig invertierbar und*

4 Projektionsverfahren

$u \in V$ die eindeutige Lösung von (4.1). Dann existiert ein $h_0 > 0$ sodass (4.2) für alle $h \leq h_0$ eindeutig lösbar ist und es existiert eine Konstante $C > 0$ unabhängig von h sodass

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|v_h - u\|. \quad (4.10)$$

Beweis. Wegen des vorigen Satzes existiert ein $h_0 > 0$ sodass für alle $h \leq h_0$ der diskrete Operator $S_h := P_h S$ invertierbar ist mit $\|S_h^{-1}\| \leq C_1$ und $C_1 > 0$ unabhängig von h . Somit ist $u_h := S_h^{-1} P_h f$ eindeutig für $h \leq h_0$. Mit $f = Su$ folgt die Darstellung $u - u_h = (\text{id} - S_h^{-1} P_h S) u$ und wegen $S_h^{-1} S_h v_h = v_h$ für alle $v_h \in V_h$ gilt

$$u - u_h = (\text{id} - S_h^{-1} P_h S) (u - v_h)$$

und daraus (4.10). □

Dieser Satz lässt sich auch direkt für ein koerzitives S anwenden, da dann $\|S_h^{-1}\| \leq 1/\alpha$ durch das Lax-Milgram Lemma gesichert ist. Im Gegensatz zur Abschätzung (3.6) aus dem "echten" Céa-Lemma bekommen wir mit diesem Beweis jedoch eine Konstante $1 + C/\alpha$ und nicht C/α .

Bleibt noch den Fall zu untersuchen, wenn $S(\lambda) = A(\lambda) + K$ nicht invertierbar ist. Dazu schauen wir uns die Lösungen des Eigenwertproblems (3.14) bzw. der diskreten Probleme (3.16) an.

Sind die Voraussetzungen von Satz 2.9 erfüllt (siehe z.B. Cor 2.10), so können wir Folgendes annehmen: Es existiert ein diskretes $\Sigma \subset \Lambda$ ohne Häufungspunkt in Λ , sodass $S(\lambda) = A(\lambda) + K$ für alle $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$ stetig invertierbar ist. $\lambda \mapsto A(\lambda)$ ist stetig, $A(\lambda)$ koerzitiv und K kompakt. Da $S(\lambda)$ Fredholm Operatoren sind, sind alle $\lambda \in \Sigma$ Eigenwerte endlicher Vielfachheit von (3.14).

Weiterhin seien $V_h \subset V$ abgeschlossene Unterräume von V , für die die orthogonalen Projektionen punktweise gegen die Identität konvergieren.

Satz 4.5. *Sei $(\lambda_h, u_h) \in \Lambda \times V_h \setminus \{0\}$ eine Folge von Eigenpaaren des diskreten Eigenwertproblems (3.16) und λ_h konvergiere für $h \rightarrow 0$ gegen ein $\lambda_0 \in \Lambda$. Dann ist $\lambda_0 \in \Sigma$, d.h. der Grenzwert einer Folge von diskreten Eigenwerten ist immer ein Eigenwert des kontinuierlichen Problems (es gibt keine Fehlkonzgenz).*

Beweis. Sei $\lambda_0 \in \Lambda \setminus \Sigma$, d.h. $S(\lambda_0)$ ist stetig invertierbar. Dann existiert ein hinreichend kleines kompaktes $\hat{\Lambda} \in \Lambda$, sodass $S(\lambda)$ für alle $\lambda \in \hat{\Lambda}$ stetig invertierbar ist. Mit Hilfe von Satz 4.3 folgt daraus, dass für alle hinreichend kleinen h die Operatoren S_h stetig invertierbar sind. Damit ist die eindeutige Lösung u_h von (3.16) für hinreichend kleine h gleich 0 im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $u_h \in V_h \setminus \{0\}$. □

Satz 4.6. *Für alle $\lambda_0 \in \Lambda \setminus \Sigma$ existieren Konstanten $h_0, \epsilon > 0$, sodass für alle $h \leq h_0$ die Menge $\{\lambda \in \Lambda : |\lambda - \lambda_0| < \epsilon\}$ keine Eigenwerte des diskreten Eigenwertproblems (3.16) enthält.*

Beweis. Folgt direkt aus dem vorigen Satz. \square

Für die folgenden Sätze benötigen wir Aussagen aus der analytischen Fredholm-Theorie. Nehmen wir dazu erstmal an, $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion, D sei einfach zusammenhängend und $\Gamma \subset D$ eine geschlossene glatte Kurve in D . Dann gilt der Integralsatz von Cauchy

$$\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda = 0. \quad (4.11a)$$

Daraus erhält man für alle z im Innengebiet der Kurve Γ die Integralformel von Cauchy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^{n+1}} d\lambda, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.11b)$$

Insbesondere folgt für $n = 1$ und $\Gamma = \partial B_R(\lambda_0)$ das Maximumsprinzip

$$|f(z)| \leq \max_{\lambda \in \Gamma} |f(\lambda)| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|\lambda - z|} d\lambda = \max_{\lambda \in \Gamma} |f(\lambda)|, \quad z \in B_R(\lambda_0). \quad (4.12)$$

Die Aussagen für skalare Funktionen f gelten auch für holomorphe Fredholm-Operatoren $\lambda \mapsto S(\lambda) \in L(V)$ (siehe z.B. [GGK90]).

Satz 4.7. *Sei zusätzlich zu den bisherigen Voraussetzungen die Abbildung $\lambda \mapsto A(\lambda)$ holomorph. Dann existiert für jedes $\lambda_0 \in \Sigma$ eine Folge von diskreten Eigenwerten λ_h zu (3.16), welche gegen λ_0 konvergiert.*

Beweis. Da Σ diskret ist, existiert ein $\epsilon > 0$ sodass $S(\lambda)$ stetig invertierbar ist für alle $\lambda \in \overline{B_\epsilon(\lambda_0)} \setminus \{\lambda_0\}$. Da die Voraussetzungen des Satzes 4.3 für $\hat{\Lambda} := \partial B_\epsilon(\lambda_0)$ erfüllt sind, existiert ein $h_0 > 0$ und eine Konstante $C > 0$ sodass für alle $h \leq h_0$

$$\max_{\lambda \in \partial B_\epsilon(\lambda_0)} \|S_h(\lambda)^{-1}\| \leq C. \quad (4.13)$$

Sei nun $u_0 \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zu λ_0 , d.h. $S(\lambda_0)u_0 = 0$. Insbesondere ist auch $S_h(\lambda_0)u_0 = P_h S(\lambda_0)u_0 = 0$. Es gilt $P_h u_0 \rightarrow u_0$ für $h \rightarrow 0$, d.h. wir können annehmen, dass $P_h u_0 \neq 0$ für alle $h \leq h_0$. Für alle $h \leq h_0$ mit $S_h(\lambda_0)P_h u_0 = 0$ ist $(\lambda_0, P_h u_0) \in \Sigma \times V_h \setminus \{0\}$ bereits ein Eigenpaar von (3.16) und die Behauptung für diese h gezeigt. Sei also $v := S_h(\lambda_0)(P_h u_0 - u_0) = S_h(\lambda_0)P_h u_0 \in V_h \setminus \{0\}$. Dann folgt

$$\|S_h(\lambda_0)^{-1}\| = \sup_{v \in V_h \setminus \{0\}} \frac{\|S_h(\lambda_0)^{-1}v\|}{\|v\|} \geq \frac{\|P_h u_0\|}{\|S_h(\lambda_0)(P_h u_0 - u_0)\|} \geq \frac{\|P_h u_0\|}{\|S(\lambda_0)\| \|P_h u_0 - u_0\|}. \quad (4.14)$$

Daher gilt für alle hinreichend kleinen $h \leq h_0$

$$\|S_h(\lambda_0)^{-1}\| > C \geq \max_{\lambda \in \partial B_\epsilon(\lambda_0)} \|S_h(\lambda)^{-1}\|. \quad (4.15)$$

Im Widerspruch zur Behauptung existiere nun kein Eigenwert von S_h in $\overline{B_\epsilon(\lambda_0)}$. Da S_h ein Fredholm-Operator und die Abbildung $\lambda \mapsto S_h(\lambda)$ holomorph ist, ist $S_h(\lambda)$ stetig

4 Projektionsverfahren

invertierbar und mit Cor. 4.2 ist die Abbildung $\lambda \mapsto S_h(\lambda)^{-1}$ holomorph. Wegen des Maximumsprinzips folgt daraus

$$\|S_h(\lambda_0)^{-1}\| \leq \max_{\lambda \in \partial B_\epsilon(\lambda_0)} \|S_h(\lambda)^{-1}\| \leq C$$

im Widerspruch zu (4.15). □

Korollar 4.8. *Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes existiere für alle $h \leq h_0$ genau ein Eigenwert λ_h mit Vielfachheit $\kappa \in \mathbb{N}$ in der Kugel $B_\epsilon(\lambda_0)$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ mit*

$$|\lambda_h - \lambda_0| \leq C \|P_h u_0 - u_0\|^{1/\kappa} \quad (4.16)$$

für alle nichttrivialen Eigenvektoren u_0 zum Eigenwert λ_0 .

Beweis. Die Abbildungen $\lambda \mapsto (\lambda - \lambda_h)^\kappa S_h(\lambda)^{-1}$ sind in $\overline{B_\epsilon(\lambda_0)}$ holomorph. Mit Hilfe des Maximumsprinzips folgt für $\lambda = \lambda_0$

$$|\lambda_0 - \lambda_h|^\kappa \|S_h(\lambda_0)^{-1}\| \leq \epsilon \sup_{\lambda \in \partial B_\epsilon(\lambda_0)} \|S_h(\lambda)^{-1}\| \quad (4.17)$$

und mit (4.13) und (4.14) die Behauptung. □

Mit deutlich mehr Aufwand lässt sich zeigen, dass für einen Eigenwert λ_0 mit Vielfachheit κ genau κ diskrete Eigenwerte (ihrer Vielfachheit nach gezählt) in einer hinreichend kleinen Kugel um λ_0 für hinreichend kleines h liegen. Weiter ist die Fehlerabschätzung (4.16) nicht optimal. In (4.16) wird der Fehler in den Eigenwerten durch die Bestapproximation eines beliebigen Eigenvektors abgeschätzt. Ist dieser in $H^{p+1}(\Omega)$, so wäre mit Verfahren hoher Ordnung ein Fehler der Ordnung h^p zu erwarten. Mit mehr Aufwand lässt sich zumindest für die Eigenwerte des Laplace-Operators zeigen, dass bei hinreichender Regularität der Eigenfunktionen ein Fehler der Ordnung h^{2p} zu erreichen ist. Dabei muss bei Eigenwerten höherer Vielfachheit über die diskreten Eigenwerte gemittelt werden.

5 Streuprobleme

Wellenphänomene sind typischerweise nicht-lokal, d.h. lokal begrenzte Störungen können sich mit der Zeit ausbreiten und damit Störungen in der Welle weit entfernt von der ursprünglichen Quelle verursachen. Dazu kommt, dass in vielen Anwendungen das Ausbreitungsgebiet der Welle unbeschränkt oder zumindest sehr groß ist. In beiden Fällen ist es unrealistisch, das Problem auf dem ganzen Ausbreitungsgebiet mit Hilfe von "normalen" Finiten Elementen zu lösen. Wenn man das Gebiet jedoch einfach nur abschneidet und künstliche Randbedingungen an dem künstlichen Abschneiderand stellt, so muss man darauf achten, dass die durch diese Randbedingung verursachten Störungen klein bleiben. Ansonsten könnten sie sich wegen der Nicht-Lokalität ins gesamte Gebiet fortsetzen und die Lösung unbrauchbar machen.

Ziel dieses Abschnittes ist es, sogenannte exakte transparente Randbedingungen zu entwickeln, welche keine Störungen an einem künstlichen Abschneiderand hervorrufen. Die Terminologie ist dabei uneinheitlich. Manchmal spricht man auch von nicht-reflektierenden oder absorbierenden Randbedingungen.

Sei ab jetzt Ω ein offenes, unbeschränktes Gebiet aus \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, 3$, mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega$ und äußerem Normalenvektor ν . Wir nehmen weiter an, dass ein beschränktes, offenes, sternförmiges Lipschitz-Gebiet $D \subset \mathbb{R}^d$ existiert mit $\partial\Omega \subset D$. Dann können wir Ω zerlegen in ein beschränktes Innengebiet $\Omega_{\text{int}} := \Omega \cap D$ mit $\partial\Omega \subset \partial\Omega_{\text{int}}$, ein unbeschränktes Aussengebiet $\Omega_{\text{ext}} = \mathbb{R}^d \setminus \overline{D} = \Omega \setminus \overline{D}$ und das Interface $\Gamma := \overline{\Omega_{\text{int}}} \cap \overline{\Omega_{\text{ext}}} = \partial D$.

Definition 5.1. $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ bezeichnet den Raum aller Funktionen f , deren Einschränkungen $f|_{\hat{\Omega}}$ für beliebige kompakte Mengen $\hat{\Omega} \subset \Omega$ zum Raum $H^1(\hat{\Omega})$ gehören. Der Raum $H_{\text{comp}}^1(\Omega)$ bezeichnet den Raum aller Funktionen $f \in H^1(\Omega)$, deren Träger $\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ kompakt in Ω ist.

Sei nun also $p \in L^\infty(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$ mit $\text{supp } p, \text{supp } g \in D$, $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$, $g_{bd} \in L^2(\partial\Omega)$ und $\omega > 0$ gegeben. Dann suchen wir Lösungen $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ von

$$-\Delta u(x) - \omega^2(1 + p(x))u(x) = g(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \alpha(x)u(x) = g_{bd}(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (5.1b)$$

$$u \text{ ist ausstrahlend für } |x| := \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^2\right)^{1/2} \rightarrow \infty. \quad (5.1c)$$

Wir werden uns im folgenden noch etwas genauer mit der abstrakten Ausstrahlungsbedingung (5.1c) beschäftigen. Grob gesprochen soll sie zwei Dinge gewährleisten:

Zum einen soll sie die eindeutige Lösbarkeit von (5.1) gewährleisten. Zum zweiten soll sie sicherstellen, dass die Lösung physikalisch sinnvoll ist.

Wir haben in der Einleitung in (1.18) gesehen, dass der gemittelte, nach aussen gerichtete Energiefluss durch Γ im Wesentlichen gegeben ist durch

$$J_\Gamma(u) = -\frac{1}{2\omega} \Im \int_\Gamma u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds. \quad (5.2)$$

Da die Quellen nur im Inneren von D liegen, sollte die Ausstrahlungsbedingung sicherstellen, dass für beliebige Quellen dieser Energiefluss zumindest für hinreichend große D nicht-negativ ist. Mit anderen Worten die durch die Quelle erzeugte Energie soll nach außen transportiert werden und es soll keine Energie von außen ins Gebiet D hereinkommen. Wir könnten (5.1c) also so formulieren, dass für die Lösung $u_{\alpha,g}$ von (5.1) für beliebige α, g gelten soll $J_\Gamma(u_{\alpha,g}) \geq 0$. Wir werden im Folgenden noch etwas praktikablere Ausstrahlungsbedingungen kennenlernen. Zudem ist an der Stelle natürlich noch nicht klar, ob mit dieser Bedingung das Problem überhaupt eindeutig lösbar wird.

5.1 Dirichlet-to-Neumann Operator (formal)

Wir zerlegen das Problem (5.1) in zwei Teilprobleme: Ein möglichst einfaches Problem für den unbeschränkten Aussenraum und ein Problem für den beschränkten Innenraum. Sei für gegebenes u_0 die Funktion $u_{\text{ext}} \in H_{\text{loc}}^2(\Omega_{\text{ext}})$ Lösung des Aussenraumproblems

$$-\Delta u - \omega^2 u = 0, \quad x \in \Omega_{\text{ext}}, \quad (5.3a)$$

$$u = u_0, \quad x \in \Gamma, \quad (5.3b)$$

$$u \text{ ist ausstrahlend für } |x| \rightarrow \infty. \quad (5.3c)$$

Wir nehmen zunächst an, dass (5.3) lösbar ist. Sei weiter $K \subset \Omega_{\text{ext}}$ kompakt. Wegen $-\Delta u = \omega^2 u$ in K und $\Delta^{-1} : H^p(K) \rightarrow \mathcal{D}(\Delta) \subset H^{p+1}(K)$ für beliebiges $p \in \mathbb{N}_0$ folgt $u \in H_{\text{loc}}^p(\Omega_{\text{ext}})$. D.h. die Lösungen der homogenen Helmholtz Gleichung sind beliebig glatt im Inneren von Ω_{ext} . Die Glattheit am Rand hängt natürlich von u_0 und Γ ab.

Sofern die Lösung eindeutig ist, können wir einen eindeutigen Dirichlet-to-Neumann Operator $\text{DtN} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ definieren durch

$$\text{DtN } u_0 := \frac{\partial u_{\text{ext}}}{\partial \nu}. \quad (5.4)$$

Der Normalenvektor ν soll dabei ins Innere von Ω_{ext} zeigen. Für Resonanzprobleme wird später wichtig werden, dass dieser Operator von dem gegebenen $\omega > 0$ abhängt. Wo nötig werden wir also $\text{DtN}(\omega)$ schreiben.

Mit diesem Operator können wir folgende schwache Formulierung des Innenraumproblems zeigen: Sei $u_{\text{int}} \in H^1(\Omega_{\text{int}})$ Lösung des Variationsproblems

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\text{int}}} (\nabla u_{\text{int}} \cdot \nabla v - \omega^2(1+p)u_{\text{int}}v) dx + \int_{\partial\Omega} \alpha u_{\text{int}}v dx - \int_{\Gamma} (\text{DtN}(\omega)u_{\text{int}}|_{\Gamma})v ds \\ = \int_{\Omega_{\text{int}}} gv dx + \int_{\partial\Omega} g_{bd}v ds, \quad v \in H^1(\Omega_{\text{int}}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die zu (5.5) assoziierte Bilinearform ist offenbar stetig in $H^1(\Omega_{\text{int}})$. Weitere Aussagen auch bezüglich möglicher Implementierungen sind ohne genaue Kenntnisse des Dirichlet-to-Neumann Operators nicht möglich.

5.2 Eindimensionaler DtN Operator

In einer Dimension ist die Lösung des Aussenraumproblems relativ einfach. Offene, beschränkte und sternförmige Gebiete in \mathbb{R} sind genau die Intervalle (a, b) mit $a < b$. (5.3) zerfällt damit in zwei Probleme in den Halbräumen $(-\infty, a)$ und (b, ∞) . Wir betrachten hier nur den rechten Halbraum. Eine allgemeine Lösung von (5.3a) ist für $\omega \neq 0$ gegeben durch

$$u_{\text{ext}}(x) = C_1 \exp(i\omega(x-b)) + C_2 \exp(-i\omega(x-b)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \quad x \geq b, \quad (5.6)$$

Es folgen die bisher formulierten Bedingungen $J_b(u_{\text{ext}}) = 1/2(|C_1|^2 - |C_2|^2) \geq 0$ und $C_1 + C_2 = u_b$. Aus diesen alleine wird keine eindeutige Lösbarkeit folgen können. Die bisherige Bedingung an den Energiefluss ist eine an eine Energiebilanz, d.h. es muss mehr Energie herausfließen als hineinkommt.

Wenn wir jedoch die beiden Lösungen getrennt anschauen, dann ist klar die zweite für einen negativen Energiefluss zuständig ist. Daher fordern wir $C_2 = 0$ und erreichen damit die eindeutige Lösung $u_{\text{ext}}(x) = u_b \exp(i\omega(x-b))$. Somit ergibt sich der Dirichlet-to-Neumann Operator für den rechten Halbraum zu $\text{DtN } u_b = i\omega u_b$, $u_b \in \mathbb{C}$.

Für den linken Halbraum müssen wir das Vorzeichen im Energiefluss umdrehen (der Normalenvektor ν zeigt ins Innere von Ω_{ext}) und erhalten somit $u_{\text{ext}}(x) = u_a \exp(-i\omega(x-a))$ für $x \leq a$ und daraus ebenfalls $\text{DtN } u_a = i\omega u_a$ (das entspricht $u'(a) = -i\omega u(a)$). Für $\Omega = \mathbb{R}$ wird (5.5) wird damit zu

$$\int_a^b (u'_{\text{int}}v' - \omega^2(1+p)u_{\text{int}}v) dx - i\omega (u_{\text{int}}(b)v(b) + u_{\text{int}}(a)v(a)) = \int_a^b gv dx \quad (5.7)$$

für alle $v \in H^1((a, b))$.

5.3 (Sphärische) Bessel Gleichung

Sei nun $d = 2, 3$ und D eine Kugel um den Ursprung mit Radius $R > 0$, d.h. $\Gamma = \partial B_R(0)$. Es bietet sich wegen $\Omega_{\text{ext}} = \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R(0)}$ an, Polar- bzw. Kugelkoordinaten zur Lösung des Aussenraumproblems (5.3) zu verwenden. Die Helmholtz Gleichung (5.3a) wird für $x = r\hat{x}$ mit $r := |x| > R$ und $\hat{x} := 1/rx \in \partial B_1(0)$ zu (siehe Übungsaufgabe)

$$-\partial_r^2 u(r\hat{x}) - \frac{d-1}{r} \partial_r u(r\hat{x}) - \frac{1}{r^2} \Delta_{\hat{x}} u(r\hat{x}) - \omega^2 u(r\hat{x}) = 0, \quad r > R, \hat{x} \in \partial B_1(0). \quad (5.8)$$

$-\Delta_{\hat{x}}$ ist der negative Laplace-Beltrami Operator. Für $d = 2$ und die Parametrisierung $\hat{x}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)^\top$ gilt $-\Delta_{\hat{x}(\varphi)} = -\partial_\varphi^2$. Für $d = 3$ und $\hat{x}(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)^\top$ gilt

$$-\Delta_{\hat{x}(\varphi, \theta)} = -\frac{\partial_\varphi^2}{(\sin \theta)^2} - \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta).$$

Die zu $-\Delta_{\hat{x}}$ gehörende Sesquilinearform erfüllt auf $L^2(\partial B_1(0))$ alle Voraussetzungen des Satzes 2.9. Von daher hat $-\Delta_{\hat{x}}$ ein reines Punktspektrum aus reellen, nicht-negativen Eigenwerten und die zugehörigen Eigenfunktionen können als Orthogonalbasis gewählt werden.

Diese sind die sogenannten sphärischen, harmonischen Funktionen $Y_n^{(m)}$ (siehe Übungsaufgabe). Für $d = 2$ sind offensichtlich alle Eigenfunktionen durch $\varphi \mapsto \exp(\pm in\varphi)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. D.h. die Eigenwerte $\lambda_n := n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$, haben für $n \in \mathbb{N}$ die Vielfachheit $M_n = 2$ und $M_0 = 1$. Für $d = 3$ haben wir in der Übung nachgewiesen, dass die Eigenwerte von $-\Delta_{\hat{x}}$ zu $Y_n^{(m)}$ gegeben sind durch $\lambda_n = n(n+1)$ mit Vielfachheiten $M_n = (2n+1)$. In [CK98, Sec. 2.3] wird mit Hilfe einer Darstellung von $Y_n^{(m)}$ über Legendre Polynome nachgewiesen, dass $Y_n^{(m)}$ tatsächlich dicht in $L^2(\partial B_1(0))$ liegen. Daher kann es keine weiteren Eigenfunktionen geben.

Wir können also annehmen, dass $Y_n^{(m)}$, $m = 1, \dots, M_n$, für $d = 2, 3$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\partial B_1(0))$ bilden. Jedes $u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega_{\text{ext}})$ können wir dann darstellen durch

$$u(r\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_n} u_{n,m}(r) Y_n^{(m)}(\hat{x}), \quad r > R, \hat{x} \in \partial B_1(0) \quad (5.9)$$

mit

$$u_{n,m}(r) := \int_{\partial B_1(0)} u(r\hat{x}) \overline{Y_n^{(m)}(\hat{x})} d\hat{x}. \quad (5.10)$$

Die Reihe konvergiert für jedes fixe $r > R$ in $L^2(\partial B_1(0))$. Sei nun u eine Lösung von (5.3a) und somit beliebig glatt für $r \geq \tilde{R} > R$. Dann können wir in (5.10) unter dem Integral differenzieren und $u_{n,m}$ sind Lösungen von

$$-u_n''(r) - \frac{d-1}{r} u_n'(r) + \left(\frac{\lambda_n}{r^2} - \omega^2 \right) u_n(r) = 0, \quad r \geq \tilde{R}. \quad (5.11)$$

5 Streuprobleme

Solche Lösungen ergeben sich durch Substitution $r \mapsto \omega r$ aus Lösungen der (sphärischen) Bessel Gleichung

$$-u_n''(r) - \frac{d-1}{r}u_n'(r) + \left(\frac{\lambda_n}{r^2} - 1\right)u_n(r) = 0, \quad r \geq \tilde{R}, \quad (5.12)$$

welche durch die (sphärischen) Besselfunktionen 1. und 2.Art dargestellt werden können. Deren Linearkombinationen wiederum sind die (sphärische) Hankelfunktionen 1. und 2.Art. Eine geschlossene Darstellung ist aufwendig und findet sich z.B. in [CK98, Sec. 2.4 und 3.4]. Durch einfaches Nachrechnen lässt sich zeigen: Wenn f_n und f_{n-1} für ein $n \in \mathbb{N}_0$ eine Lösungen von (5.12) zum Index n bzw. $n-1$ sind, so ist

$$f_{n+1}(r) = -r^n \partial_r (r^{-n} f_n(r)) = \frac{n}{r} f_n(r) - f_n'(r) \quad \text{bzw.} \quad (5.13a)$$

$$f_{n+1}(r) = \frac{2n + (d-2)}{r} f_n(r) - f_{n-1}(r) \quad (5.13b)$$

eine Lösung von (5.12) zum Index $n+1$.

Für $d=3$ lässt sich ebenfalls nachrechnen, dass die sphärischen Hankelfunktionen 0.Ordnung und 1. bzw. 2.Art

$$h_0^{(1,2)}(r) := \frac{\exp(\pm ir)}{\pm ir}, \quad r \neq 0, \quad (5.14)$$

linear unabhängige Lösungen von (5.12) für $n=0$ und $\omega=1$ sind. Aus diesen lassen sich mit (5.13) somit für beliebige $n \in \mathbb{N}$ linear unabhängige Lösungen von (5.12) konstruieren. Aus (5.13a) ergibt sich per Induktion

$$h_n^{(1)}(r) = (-i)^n \frac{\exp(ir)}{ir} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{c_{k,n}}{r^k}\right), \quad h_n^{(2)}(r) = i^n \frac{\exp(-ir)}{-ir} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{\overline{c_{k,n}}}{r^k}\right) \quad (5.15)$$

und daraus das asymptotische Verhalten der sphärischen Hankelfunktionen

$$h_n^{(1,2)}(r) = \exp\left(\mp \frac{i\pi}{2}(1+n)\right) \frac{\exp(\pm ir)}{r} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (5.16a)$$

$$h_n^{(1,2)'}(r) = \pm i \exp\left(\mp \frac{i\pi}{2}(1+n)\right) \frac{\exp(\pm ir)}{r} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.16b)$$

Für $d=2$ ist keine „einfache“ Form der Hankelfunktionen 0.Ordnung bekannt. Es existieren jedoch jeweils zwei lineare unabhängige Hankelfunktionen n -ter Ordnung mit folgendem asymptotischen Verhalten

$$H_n^{(1,2)}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\mp \frac{i\pi}{4}(1+2n)\right) \frac{\exp(\pm ir)}{\sqrt{r}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (5.17a)$$

$$H_n^{(1,2)'}(r) = \pm i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\mp \frac{i\pi}{4}(1+2n)\right) \frac{\exp(\pm ir)}{\sqrt{r}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.17b)$$

Zudem gilt für die Hankelfunktionen 0.Ordnung

$$H_0^{(1,2)}(r) = \frac{\pm 2i}{\pi} \ln r + \mathcal{O}(1), \quad r \rightarrow 0, \quad (5.18a)$$

$$H_0^{(1,2)'}(r) = \frac{\pm 2i}{\pi r} + \mathcal{O}(\ln r), \quad r \rightarrow 0. \quad (5.18b)$$

Lemma 5.2. Für die Hankelfunktionen $H_n^{(1)}$ bzw. die sphärischen Hankelfunktionen $h_n^{(1)}$ gilt

$$H_n^{(1,2)}(r) = \frac{2^n(n-1)!}{\pm i\pi r^n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty$$

$$h_n^{(1,2)}(r) = \frac{(2n)!}{\pm i2^n n! r^{n+1}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty$$

gleichmäßig für alle r in kompakten Teilmengen von $(0, \infty)$.

Beweis. Der Beweis findet sich in [CK98, Sec. 2.4 und 3.4]. Für $d = 3$ lässt sich z.B. eine Darstellung der sphärischen Besselfunktionen 1. und 2.Art der Form

$$j_n(r) = \frac{2^n n! r^n}{(2n+1)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p r^{2p}}{2^p p! \prod_{j=1}^p (2n+2j+1)}, \quad (5.19a)$$

$$y_n(r) = -\frac{(2n)!}{2^n n! r^{n+1}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p r^{2p}}{2^p p! \prod_{j=0}^{p-1} (-2n+2j+1)} \quad (5.19b)$$

finden. Aus $h_n^{(1,2)} = j_n(r) \pm iy_n(r)$ folgt dann die Behauptung. \square

Lemma 5.3. Seien $\mathcal{H}_n^{(1,2)}$ die (sphärischen) Hankelfunktionen, $Y_n^{(m)}$ für $m = 1, \dots, M_n$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die sphärischen harmonischen Funktionen und $\omega > 0$. Dann lösen die Funktionen $u_{n,m}^{(1,2)}(r\hat{x}) := \mathcal{H}_n^{(1,2)}(\omega r) Y_n^{(m)}(\hat{x})$ die Helmholtz Gleichung (5.3a) und es gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r u_{n,m}^{(1)}(r\hat{x}) - i\omega u_{n,m}^{(1)}(r\hat{x})) = 0 \quad (5.20)$$

bzw.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r u_{n,m}^{(2)}(r\hat{x}) + i\omega u_{n,m}^{(2)}(r\hat{x})) = 0 \quad (5.21)$$

gleichmäßig für alle $\hat{x} \in \partial B_1(0)$.

Zudem gilt für den nach aussen gerichteten Energiefluss (5.2) durch $\Gamma = \partial B_R(0)$

$$J_\Gamma(u_{n,m}^{(1,2)}) = \pm \begin{cases} \frac{1}{\pi\omega}, & d = 2 \\ \frac{1}{2\omega^2}, & d = 3 \end{cases}. \quad (5.22)$$

Beweis. Die ersten Aussagen folgen direkt aus der Konstruktion von $u_{n,m}^{(1,2)}$ und dem asymptotischen Verhalten der (sphärischen) Hankelfunktionen ((5.17) bzw. (5.16)).

Für die zweite Aussage sei $\tilde{R} > R$. Dann gilt für $u = u_{n,m}^{(1,2)}$

$$\int_{\partial B_{\tilde{R}}(0)} (|\partial_r u|^2 + \omega^2 |u|^2 \pm 2\omega \Im(u \overline{\partial_r u})) ds = \int_{\partial B_{\tilde{R}}(0)} |\partial_r u \mp i\omega u|^2 ds$$

und daraus

$$J_{\partial B_{\tilde{R}}}(u) = \frac{1}{4\omega^2} \left(\mp \int_{\partial B_{\tilde{R}}(0)} |\partial_r u \mp i\omega u|^2 ds \pm \int_{\partial B_{\tilde{R}}(0)} (|\partial_r u|^2 + \omega^2 |u|^2) ds \right). \quad (5.23)$$

Das Integral auf der linken Seite können wir mit Hilfe der 1. Greenschen Identität angewandt auf dem Gebiet $D := B_{\tilde{R}}(0) \setminus \overline{B_R(0)}$ auf die Funktionen u und \bar{u} wegen $\overline{\Delta u} = -\omega^2 \bar{u}$ umformen

$$\begin{aligned} \int_D (-\omega^2 |u|^2 + |\nabla u|^2) dx &= \int_D (u \overline{\Delta u} + \nabla u \cdot \overline{\nabla u}) dx = \int_{\partial D} u \overline{\partial_\nu u} ds \\ &= \int_{\partial B_{\tilde{R}}(0)} u \overline{\partial_r u} ds - \int_{\partial B_R(0)} u \overline{\partial_r u} ds. \end{aligned}$$

Da die linke Seite der vorigen Gleichung reell ist, folgt $J_{\partial B_{\tilde{R}}}(u) = J_{\partial B_R}(u)$. Mit Hilfe der bereits bewiesenen ersten Aussage folgt damit aus (5.23)

$$\begin{aligned} J_\Gamma(u) &= \pm \frac{1}{4\omega^2} \lim_{\tilde{R} \rightarrow \infty} \int_{\partial B_{\tilde{R}}} (|\partial_r u|^2 + \omega^2 |u|^2) ds \\ &= \pm \frac{1}{4} \lim_{\tilde{R} \rightarrow \infty} \tilde{R}^{d-1} \left(\left| \mathcal{H}_n^{(1,2)'}(\omega \tilde{R}) \right|^2 + \left| \mathcal{H}_n^{(1,2)}(\omega \tilde{R}) \right|^2 \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Das asymptotischen Verhalten der (sphärischen) Hankelfunktionen liefert dann (5.22). \square

(5.20) ist als Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung bekannt. Es lässt sich zeigen, dass diese Bedingung eine eindeutige Lösbarkeit des Aussenraumproblems garantiert. Physikalisch relevanter ist die Aussage über den Energiefluss. Er ist für Hankelfunktionen 1. Art immer nach aussen gerichtet und für Hankelfunktionen 2. Art immer nach innen gerichtet. Zudem ist er konstant über beliebige Ränder Γ , welche $\partial B_R(0)$ komplett umschließen.

5.4 DtN Operator an Sphären

Seien $\mathcal{H}_n^{(1,2)}$ die (sphärischen) Hankelfunktionen. Dann ist eine Lösung der Helmholtz Gleichung (5.3a) wegen (5.9) gegeben durch

$$u(r\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_n} (c_{n,m} \mathcal{H}_n^{(1)}(\omega r) + d_{n,m} \mathcal{H}_n^{(2)}(\omega r)) Y_n^{(m)}(\hat{x}), \quad r > R, \quad \hat{x} \in \partial B_1(0).$$

Wie im eindimensionalen Fall wählen wir die Hankelfunktionen 1. Art um Funktionen zu erhalten, deren Energiefluss ausschließlich nach außen gerichtet ist, d.h. $d_{n,m} = 0$.

Definition 5.4 (Ausstrahlungsbedingung). Sei $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\omega) > 0$. Eine Funktion $u : \Omega_{\text{ext}} \rightarrow \mathbb{C}$ sei ausstrahlend oder auslaufend, wenn sie eine Darstellung der Form

$$u(r\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_n} c_{n,m} \mathcal{H}_n^{(1)}(\omega r) Y_n^{(m)}(\hat{x}), \quad r > R, \quad \hat{x} \in \partial B_1(0) \quad (5.25)$$

mit $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_n} |c_{n,m} \mathcal{H}_n^{(1)}(\omega r)|^2 < \infty$ besitzt.

Die vorige Definition ist für $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\omega) > 0$ wohldefiniert, da die sphärischen Hankelfunktionen holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die Hankelfunktionen holomorph in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ sind.

Die Reihe konvergiert zunächst nur für fixes $r > R$ im $L^2(\partial B_1(0))$ Sinne. Wenn wir das Streuproblem (5.1) in ein Innenraum- und ein Aussenraumproblem mit $\Gamma = \partial B_{R-\epsilon}(0)$ mit kleinem $\epsilon > 0$ aufteilen, so folgt aus der Randbedingung (5.3b) des Aussenraumproblems die Darstellung

$$u_{\text{ext}}(r\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_n} \left(\frac{\int_{\partial B_1} u_0(R\hat{x}) \overline{Y_n^{(m)}(\hat{x})} d\hat{x}}{\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R)} \right) \mathcal{H}_n^{(1)}(\omega r) Y_n^{(m)}(\hat{x}), \quad r \geq R, \quad \hat{x} \in \partial B_1(0), \quad (5.26)$$

sofern $\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Lemma 5.5. Für $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\omega) > 0$ existieren endlich viele Nullstellen von $\mathcal{H}_n^{(1)}$ bzw. $\mathcal{H}_n^{(1)'}$, welche alle negativen Imaginärteil haben.

Beweis. Siehe [AS64, S.373 und S.441]. Vergleiche auch Abbildung 5.1. \square

Für $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\omega) > 0$ und $\Im(\omega) \geq 0$ gilt somit immer $\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

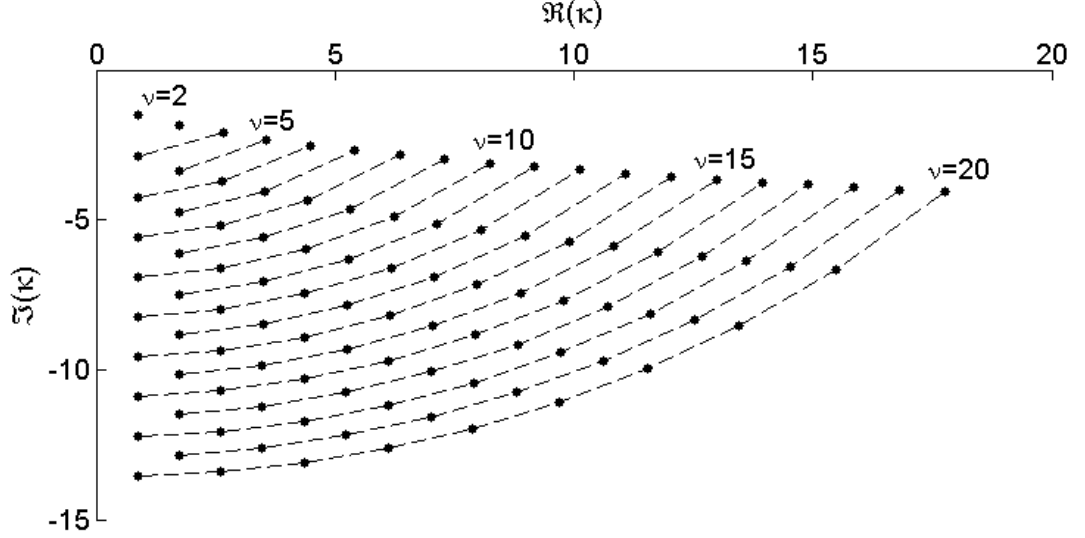
Satz 5.6. Für $u_0 \in L^2(\Gamma)$ konvergiert die Reihe (5.26) sowie die gliedweise differenzierte Reihe absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω_{ext} . u_{ext} ist die eindeutige Lösung des Aussenraumproblems (5.3) mit der Ausstrahlungsbedingung Def. 5.4.

Beweis. Sei $c_{n,m} := \frac{\int_{\partial B_1} u_0(R\hat{x}) \overline{Y_n^{(m)}(\hat{x})} d\hat{x}}{\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R)}$. Wegen $u_0 \in L^2(\Gamma)$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_n} |c_{n,m}|^2 |\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R)|^2 \leq C < \infty.$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt für alle $r \geq R$

$$\left| \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^{M_n} |c_{n,m} \mathcal{H}_n^{(1)}(\omega r) Y_n^{(m)}(\hat{x})| \right|^2 \leq C \sum_{n=0}^N \left| \frac{\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega r)}{\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R)} \right|^2 \sum_{m=1}^{M_n} |Y_n^{(m)}(\hat{x})|^2.$$


 Abbildung 5.1: Nullstellen der sphärischen Hankel-Funktionen für $n = 2, \dots, 20$

Für $d = 2$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{m=1}^{M_n} \left| Y_n^{(m)}(\hat{x}) \right|^2 = |\exp(in\varphi)|^2 + |\exp(-in\varphi)|^2 \leq 2 = M_n$.

Für $d = 3$ wird in [CK98, Theorem 2.8] gezeigt, dass $\sum_{m=1}^{M_n} \left| Y_n^{(m)}(\hat{x}) \right|^2 \leq 2n+1 = M_n$.

Aus Lemma 5.2 folgt

$$\left| \frac{\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega r)}{\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R)} \right|^2 \leq \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} \quad (5.27)$$

und es existiert eine Konstante $\tilde{C} > 0$ mit

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^{M_n} |c_{n,m} \mathcal{H}_n^{(1)}(\omega r) Y_n^{(m)}(\hat{x})| \leq \tilde{C} \sqrt{\sum_{n=0}^N M_n \left(\frac{R}{r} \right)^{2n}}.$$

Für $x = r\hat{x}$ aus einer kompakten Teilmenge des Ω_{ext} folgt wegen $r > R$ die absolute und gleichmäßige Konvergenz von (5.26).

Wegen (5.13a) können Quotienten der Form $\mathcal{H}_n^{(1)(k)}(\omega r)/\mathcal{H}_n^{(1)(k)}(\omega R)$ auf Abschätzungen der Form (5.27) zurückgeführt werden. Daher konvergieren auch die gliedweise nach r differenzierten Reihen absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω_{ext} . Wegen $\Delta_{\hat{x}} Y_n^{(m)} = -\lambda_n Y_n^{(m)}$ mit $\lambda_n = \mathcal{O}(n^2)$ gilt selbiges für den gliedweise angewandten Laplace-Beltrami Operator $\Delta_{\hat{x}}$.

Damit kann für $(\Delta + \omega^2 \text{id})u_{\text{ext}}$ der Operator in die Summe gezogen werden und die Behauptung folgt aus dem letzten Abschnitt. \square

Satz 5.7. Sei $\Gamma = \partial B_R(0)$ und $O_R := \{\omega \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } \mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R) = 0\}$. Dann ist für alle $\omega \in \mathbb{C} \setminus O_R$ mit $\Re(\omega) > 0$ der Dirichlet-to-Neumann Operator DtN aus

(5.4) gegeben durch

$$(\text{DtN}(\omega)u_0)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_n} \left(\int_{\partial B_1} u_0(R\hat{x}) \overline{Y_n^{(m)}(\hat{x})} d\hat{x} \right) \frac{\omega \mathcal{H}_n^{(1)'(\omega R)} Y_n^{(m)}(x/R)}{\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R)}, \quad x \in \Gamma. \quad (5.28)$$

Weiterhin gelten folgende Aussagen:

1. $\text{DtN}(\omega) : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ ist ein linearer, stetiger Operator.
2. Es existiert ein linearer, kompakter Operator $L(\omega) : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$, so dass $\int_{\Gamma} \bar{u}_0(\text{DtN}(\omega) - L(\omega))u_0 ds \leq 0$ für alle $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$.
3. Für $\omega > 0$ gilt $\Im \left(\int_{\Gamma} \bar{u}_0 \text{DtN}(\omega)u_0 ds \right) > 0$ für alle $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma) \setminus \{0\}$.

Beweis. Die Darstellung (5.28) folgt direkt aus dem vorigen Satz, die letzte Aussage aus (5.22).

Zur Vereinfachung sei $c_{n,m} := \int_{\partial B_1} u_0(R\hat{x}) \overline{Y_n^{(m)}(\hat{x})} d\hat{x}$. Wegen $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_n} (1 + \lambda_n) |c_{n,m}|^2 \sim \|u_0\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 < \infty.$$

Aus (5.13) folgt

$$\alpha_n := \frac{\omega \mathcal{H}_n^{(1)'(\omega R)}}{\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R)} = -\frac{n+d-2}{R} + \frac{\omega \mathcal{H}_{n-1}^{(1)}(\omega R)}{\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R)} \quad (5.29)$$

und aus Lemma 5.2 $\frac{\mathcal{H}_{n-1}^{(1)}(\omega R)}{\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ für $n \rightarrow \infty$. Wegen

$$\|\text{DtN}(\omega)u_0\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_n} (1 + \lambda_n)^{-1} |\alpha_n c_{n,m}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_n} \left| \frac{\alpha_n}{1 + \lambda_n} \right|^2 (1 + \lambda_n) |c_{n,m}|^2$$

folgt die erste Behauptung mit $\lambda_n = \mathcal{O}(n^2)$. Die zweite Behauptung folgt ebenfalls aus (5.29) mit dem stetigen Operator $L : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ gegeben durch

$$(L(\omega)u_0)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_n} \left(\int_{\partial B_1} u_0(R\hat{x}) \overline{Y_n^{(m)}(\hat{x})} d\hat{x} \right) \frac{\omega \mathcal{H}_{n-1}^{(1)}(\omega R)}{\mathcal{H}_n^{(1)}(\omega R)} Y_n^{(m)}(x/R), \quad x \in \Gamma, \quad (5.30)$$

da die Einbettung $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ kompakt ist. \square

Damit können wir zumindest theoretisch auf das Innenraumproblem (5.5) die kompakte Störungstheorie aus Sec. 4 anwenden. Sei für $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\omega) > 0$

$$C_1(\omega) := 1 + \Re(\omega)^2(1 + \|p\|_{L^\infty(\Omega_{\text{int}})}), \quad C_2 := \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

und der kompakte Operator $K(\omega) : H^1(\Omega_{\text{int}}) \rightarrow H^1(\Omega_{\text{int}})$ definiert durch

$$K(\omega) := C_1(\omega)E^*E + C_2 \text{Tr}_{\partial\Omega}^* \text{Tr}_{\partial\Omega} + \text{Tr}_{\Gamma}^* L(\omega) \text{Tr}_{\Gamma}, \quad (5.31)$$

wobei $E : H^1(\Omega_{\text{int}}) \hookrightarrow L^2(\Omega_{\text{int}})$ die kompakte Einbettung und $\text{Tr} : H^1(\Omega_{\text{int}}) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega_{\text{int}}) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega_{\text{int}})$ der kompakte Spuroperator sind. Dann gilt für die Bilinearform s aus (5.5) die Gårding Ungleichung

$$\left| s_{\omega}(v_{\text{int}}, \overline{v_{\text{int}}}) + (K(\omega)v_{\text{int}}, v_{\text{int}})_{H^1(\Omega_{\text{int}})} \right| \geq \|v_{\text{int}}\|_{H^1(\Omega_{\text{int}})}^2, \quad v_{\text{int}} \in H^1(\Omega_{\text{int}}). \quad (5.32)$$

Ein „normales“ Projektionsverfahren basierend auf Finiten Elementen wird jedoch nicht zu implementieren sein, da der Dirichlet-to-Neumann Operator über eine unendliche Reihe gegeben ist. Eine Implementierung wäre zumindest theoretisch möglich, wenn die Ansatzräume $V_h \subset V$ so konstruiert werden, dass die Spur auf dem Rand Γ jeweils orthogonal auf allen sphärischen harmonischen Funktionen $Y_n^{(m)}$ ab einem gewissen $n \in \mathbb{N}$ steht. Dann nämlich würde die Reihe zu einer endlichen Summe werden.

Dies würde jedoch bedeuten, dass sehr spezielle Finite Elemente konstruiert werden müssten. Zudem ist der Dirichlet-to-Neumann Operator nichtlokal auf Γ , d.h. in einer Diskretisierungsmatrix würde alle Freiheitsgrade auf Γ miteinander in direkter Verbindung stehen. Wir werden daher den Dirichlet-to-Neumann Operator nur für theoretische Überlegungen verwenden. Zur Diskretisierung gibt es einfachere Verfahren.

5.5 Integraldarstellung

Mit Hilfe der (sphärischen) Hankelfunktionen ist es möglich, Lösungen der homogenen Helmholtz-Gleichung über die Randdaten darzustellen. Dazu verwendet man die sogenannte Fundamentallösung der Helmholtz Gleichung

$$\Phi(x, y) := \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\omega|x-y|), & d = 2 \\ \frac{i\omega}{4\pi} h_0^{(1)}(\omega(|x-y|)) = \frac{\exp(i\omega|x-y|)}{4\pi|x-y|}, & d = 3 \end{cases}, \quad x \neq y. \quad (5.33)$$

Wegen Lemma 5.3 gilt $\Delta_x \Phi(x, y) + \omega^2 \Phi(x, y) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{y\}$.

Satz 5.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes, hinreichend glattes Gebiet und ν der nach außen gerichtete Normalenvektor an $\partial\Omega$. Weiter sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung $\Delta u + \omega^2 u = 0$ auf Ω . Dann gilt*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y), \quad x \in \Omega. \quad (5.34)$$

Beweis. Der Fall $d = 3$ wurde bereits in der Übungsaufgabe behandelt. Sei also $d = 2$

und $D := \Omega \setminus B_\epsilon(x)$. Mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) &= \int_D (\Phi(x, y) \Delta_y u(y) - u(y) \Delta_y \Phi(x, y)) dy \\ &= \int_D (\Delta u(y) + \omega^2 u(y)) \Phi(x, y) dy = 0 \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) \\ &= - \int_{\partial B_\epsilon(x)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) \\ &= \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \epsilon \left(\partial_r u(\epsilon \hat{x}(\varphi)) H_0^{(1)}(\omega \epsilon) - \omega u(\epsilon \hat{x}(\varphi)) H_0^{(1)'}(\omega \epsilon) \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des asymptotischen Verhaltens der Hankelfunktion für kleine Argumente und der Stetigkeit von u folgt daraus die Behauptung mit $\epsilon \rightarrow 0$. \square

Für Streuprobleme ist besonders die folgende Variante für unbeschränkte Gebiete relevant.

Satz 5.9. *Sei $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \overline{D}$ das Komplement einer offenen, beschränkten Menge D und ν der nach innen gerichtete Normalenvektor an $\partial \Omega$ (d.h. nach aussen gerichtet an ∂D). Weiter sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung $\Delta u + \omega^2 u = 0$ auf Ω mit $\omega > 0$, welche die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (5.20) erfüllt. Dann gilt*

$$u(x) = \int_{\partial \Omega} \left(u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) \right) ds(y), \quad x \in \Omega. \quad (5.35)$$

Zu beachten ist das unterschiedliche Vorzeichen im Vergleich zu (5.34).

Beweis. Wir wenden den vorigen Satz auf Gebiete der Form $\Omega_R := \Omega \cap B_R(0)$ mit hinreichend großen $R > 0$ an und erhalten so

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial \Omega} \left(u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) \right) ds(y) \\ &\quad + \int_{\partial B_1(0)} R^{d-1} \left(\frac{\partial u}{\partial r}(R\hat{y}) \Phi(x, R\hat{y}) - u(R\hat{y}) \frac{\partial \Phi(x, R\hat{y})}{\partial r} \right) d\hat{y}. \end{aligned}$$

Da u und für fixes x auch $\Phi(x, \bullet)$ die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllen, folgt aus (5.24) $\int_{\partial B_R(0)} |u(y)|^2 dy \leq C < \infty$ und $\int_{\partial B_R(0)} |\Phi(x, y)|^2 dy \leq C < \infty$ für alle hinreichend großen R . Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung verschwindet für $R \rightarrow \infty$ das Integral $\int_{\partial B_1(0)} (\dots) d\hat{y}$, da

$$\begin{aligned} R^{d-1} \left(\frac{\partial u}{\partial r}(R\hat{y}) \Phi(x, R\hat{y}) - u(R\hat{y}) \frac{\partial \Phi(x, R\hat{y})}{\partial r} \right) &= R^{d-1} \left(\frac{\partial u}{\partial r}(R\hat{y}) - i\omega u(R\hat{y}) \right) \Phi(x, R\hat{y}) \\ &\quad + R^{d-1} \left(i\omega \Phi(x, R\hat{y}) - \frac{\partial \Phi(x, R\hat{y})}{\partial r}(R\hat{y}) \right) u(R\hat{y}). \end{aligned}$$

□

Korollar 5.10. (5.35) bleibt gültig, wenn u statt der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung die Ausstrahlungsbedingung Def. 5.4 erfüllt.

Beweis. (5.35) gilt für die Funktionen $u_{n,m}(r\hat{x}) := \mathcal{H}_n^{(1)}(\omega r)Y_n^{(m)}(\hat{x})$, da diese wegen Lemma 5.3 die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllen. Aus der absoluten Konvergenz der Reihe (5.25) (Satz 5.6) folgt dann die Behauptung. □

Aus dem letzten Korollar folgt, dass eine Lösung der Helmholtz Gleichung, welche die Ausstrahlungsbedingung Def. 5.4 erfüllt, auch die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Die Umkehrung gilt auch, wobei wir dies nicht bewiesen haben. Dazu müsste man nachweisen, dass die Fundamentallösung die Ausstrahlungsbedingung Def. 5.4 erfüllt (siehe [CK98, Theorem 2.10]).

Bemerkung 5.11. Die Abbildungen $\omega \in \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 0\} \rightarrow u_\omega$ mit u_ω definiert durch (5.26) bzw. durch (5.35) sind holomorph, sofern (5.26) wohldefiniert ist. Sie stimmen überein für $\omega > 0$. Mit Hilfe des Identitätssatzes für holomorphe Abbildungen sind sie damit innerhalb des Holomorphiegebietes identisch. Eine Lösung der Helmholtz Gleichung (5.3a), welche die Ausstrahlungsbedingung Def. 5.4 erfüllt, ist damit auch durch (5.35) gegeben. Wegen

$$|\Phi(x, y)|, \|\nabla_y \Phi(x, y)\| \approx \exp(-i\Im(\omega)|x - y|), \quad |x - y| \rightarrow \infty,$$

ist u exponentiell ansteigend für $\Im(\omega) < 0$ und exponentiell fallend für $\Im(\omega) > 0$. u erfüllt also für ω mit $\Im(\omega) < 0$ nicht die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung!

(5.35) bzw. (5.34) ist die Basis von sogenannten Randelementmethoden. Für geeignete Funktionen φ bezeichnet

$$(\text{SL}\varphi)(x) := \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\Phi(x, y)ds(y), \quad (\text{DL}\varphi)(x) := \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(y)}ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega \quad (5.36)$$

das sogenannte Einfachschichtpotential (*single layer potential*) bzw. Doppelschichtpotential (*double layer potential*). Mit den Spuroperatoren $\gamma_D : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Omega)$ bzw. $\gamma_N : H^1(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Omega)$ auf die Dirichlet- bzw. Neumann-Werte auf dem Rand, können wir (5.35) reformulieren

$$u = \text{DL}\gamma_D u - \text{SL}\gamma_N u. \quad (5.37)$$

Komplizierter ist es, das Einfachschicht- bzw. Doppelschichtpotential auf $\partial\Omega$ auszuwerten. Mit einigem Aufwand lässt sich zeigen, dass

$$\gamma_D \text{SL} = V, \quad \gamma_D \text{DL} = \frac{1}{2} \text{id} + K, \quad \gamma_N \text{SL} = \frac{1}{2} \text{id} - K', \quad \gamma_N \text{DL} = D \quad (5.38)$$

mit Operatoren

$$(V\varphi)(x) := \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad (K\varphi)(x) := \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)}ds(y),$$

$$(K'\varphi)(x) := \frac{\partial}{\partial\nu(x)} \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad (D\varphi)(x) := \frac{\partial}{\partial\nu(x)} \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)}ds(y).$$

Achtung, in diesem Fall gilt $x \in \partial\Omega$, d.h. die Integrale haben singuläre Kerne. (5.37) kombiniert mit (5.38) liefert

$$\gamma_D u = \left(\frac{1}{2} \text{id} + K\right) \gamma_D u - V \gamma_N u, \quad (5.39a)$$

$$\gamma_N u = D \gamma_D u - \left(\frac{1}{2} \text{id} - K'\right) \gamma_N u. \quad (5.39b)$$

Ist einer der Randwerte $\gamma_D u$ bzw. $\gamma_N u$ bekannt, so kann aus diesen Gleichungen der jeweils andere berechnet werden. Die Lösung u ergibt sich dann aus (5.37).

Vorteil dieser Randelementemethoden ist, dass nur noch Probleme über den $(d-1)$ -dimensionalen Rand des Gebietes gelöst werden müssen. Zudem können Streuprobleme ganz natürlich mitbehandelt werden. Nachteil ist jedoch, dass die entstehenden Diskretisierungsmatrizen dicht besetzt sind und dass die Methode nur auf Gebieten funktioniert, in denen die Fundamentallösung bekannt ist. Insbesondere muss p stückweise konstant sein.

5.6 Resonanzprobleme

Bei der Definition des Dirichlet-to-Neumann Operators in (5.28) haben wir gesehen, dass wir Nullstellen der Hankelfunktionen ausschließen müssen. Diese sind genau die Wurzeln der Eigenwerte eines Streuproblems an einer Sphäre.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ wie zu Beginn des Abschnittes ein unbeschränktes Gebiet, $p \in L^\infty(\Omega)$ mit kompaktem Träger und $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$. Dann suchen wir Lösungen $(\omega, u) \in \mathbb{C} \times H_{\text{loc}}^1(\Omega) \setminus \{0\}$ mit $\Re(\omega) > 0$ sodass

$$-\Delta u(x) = \omega^2(1 + p(x))u(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.40a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) + \alpha(x)u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (5.40b)$$

$$u \text{ erfüllt Def. 5.4 für hinreichend großes } R. \quad (5.40c)$$

ω wird als Resonanz des Streuproblems (5.1) bezeichnet.

Satz 5.12. *Seien zusätzlich p, α reellwertig und $\omega > 0$. Dann ist (5.1) für alle rechten Seiten $g \in L^2(\Omega)$ mit kompaktem Träger und alle $g_{\text{bd}} \in L^2(\partial\Omega)$ eindeutig lösbar und die Lösung hängt stetig von g, g_{bd} ab.*

Beweis. Der Dirichlet-to-Neumann Operator $\text{DtN } u_0 = i\omega u_0$ für $d = 1$ bzw. (5.28) für $d = 2, 3$ ist für $\omega > 0$ wohldefiniert. Daher ist u genau dann Lösung von (5.1),

wenn $u|_{\Omega_{\text{int}}}$ Lösung von (5.5) ist. Wegen der Gårding-Ungleichung (5.32) (für $d = 2, 3$) bzw. der Übungsaufgabe ist die Riesz-Fredholm Theorie anwendbar und es reicht die Eindeutigkeit einer Lösung von (5.5) zu zeigen.

Sei also $g \equiv 0$ und $g_{\text{bd}} \equiv 0$. Wählen wir $v = \bar{u}$ in (5.5), so erhalten wir

$$\int_{\Omega_{\text{int}}} (\|\nabla u_{\text{int}}\|^2 - \omega^2(1+p)|u_{\text{int}}|^2) dx + \int_{\partial\Omega} \alpha|u_{\text{int}}|^2 dx - \int_{\Gamma} (\text{DtN}(\omega)u_{\text{int}}|_{\Gamma}) \overline{u_{\text{int}}|_{\Gamma}} ds = 0. \quad (5.41)$$

Mit $u_0 := u_{\text{int}}|_{\Gamma}$ folgt aufgrund der Voraussetzungen $\Im \int_{\Gamma} (\text{DtN}(\omega)u_0) \bar{u}_0 ds = 0$. Wegen Satz 5.7 folgt somit $u_0 = 0$ und daraus wegen (5.26) $u(x) = 0$ für alle $x \in \Omega_{\text{ext}} \cup \Gamma$.

Wegen (5.35) und dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen würde damit für $p \equiv 0$ bereits $u(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$ folgen, da u in diesem Fall holomorph ist. Für nicht-konstantes p folgt die Aussage aus dem sogenannten *unique continuation principle* (für stetige p siehe z.B. [CK98, Sec. 8.3]). \square

Satz 5.13. Sei $p(x) \geq \beta > -1$ für alle $x \in \Omega$ und $\alpha(x) \geq 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. Dann ist (5.1) für alle $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\omega) > 0$ und $\Im(\omega) > 0$ eindeutig lösbar.

Beweis. Wegen Bem. 5.11 ist eine Lösung $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ von (5.1) exponentiell fallend für $|x| \rightarrow \infty$. Insbesondere gilt daher $u \in H^1(\Omega)$. Multiplikation von (5.1a) mit Testfunktionen mit kompakten Träger führt zum äquivalenten Variationsproblem: Suche $u \in H^1(\Omega)$ sodass

$$s(u, v) = \int_{\Omega} g\bar{v} dx + \int_{\partial\Omega} g_{\text{bd}}\bar{v} ds, \quad v \in H^1(\Omega) \quad (5.42)$$

mit der Sesuqilinearform

$$s(u, v) := \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} - \omega^2(1+p)u\bar{v}) dx + \int_{\partial\Omega} \alpha u\bar{v} dx. \quad (5.43)$$

Wenn $\text{Re}(\omega^2) < 0$, so gilt

$$|s(u, u)| \geq \Re(s(u, u)) \geq C\|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

mit $C := \min\{1, -\Re(\omega)^2(1+\beta)\} > 0$. Andernfalls existiert wegen $\Im(\omega^2) > 0$ und $\Re(\omega^2) \geq 0$ ein $\varphi \in (0, \pi/2]$ mit

$$\Re(\omega^2(1+p(x))) = (1+p(x))\Re(\omega^2) \leq (1+\|p\|_{\infty})\Re(\omega^2) =: \cos(\varphi) \geq 0, \quad (5.44a)$$

$$\Im(\omega^2(1+p(x))) = (1+p(x))\Im(\omega^2) \geq (1+\beta)\Im(\omega^2) =: \sin(\varphi) > 0 \quad (5.44b)$$

für alle $x \in \Omega$. Sei nun $\theta := -\varphi/2 \in (-\pi/4, 0)$. Dann ist $\Im(\exp(i\theta)) < 0$ und

$$\begin{aligned} \Im(\exp(i\theta)(-\omega^2(1+p(x)))) &= -\sin\theta\Re(\omega^2(1+p(x))) - \cos\theta\Im(\omega^2(1+p(x))) \\ &\leq -\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi \\ &= -\sin(\theta+\varphi) = -\sin\frac{\varphi}{2} < 0. \end{aligned}$$

Daher gilt für die rotierte Sesquilinearform $\tilde{s}(\bullet, \bullet) := \exp(i\theta)s(\bullet, \bullet)$

$$|\tilde{s}(u, u)| \geq -\Im(\tilde{s}(u, u)) \geq C\|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

mit $C := \sin \varphi/2 > 0$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Zusammenfassend haben wir in den letzten beiden Sätzen gezeigt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen alle Resonanzen von (5.40) negativen Imaginärteil haben müssen. Mit deutlich mehr Aufwand (analytischer Fredholm Theorie) lässt sich zeigen, dass es nur diskret viele Resonanzen gibt. Nochmals anspruchsvoller ist die Verteilung der Resonanzen in der komplexen Ebene. In [SZ99] wird für Resonanzen von (5.40) mit $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus D$ mit konvexem D und $p \equiv 0$ und $\alpha \equiv 0$ eine Weylsche Asymptotik gezeigt. Grob gesprochen sind die Resonanzen in diesem Fall so ähnlich verteilt wie in Fig. 5.1.

6 PML-Methode

Wir wollen im Folgenden praktikable Möglichkeiten zur numerischen Berechnung von Lösungen der Streuprobleme (5.1) bzw. der zugehörigen Resonanzprobleme (5.40) vorstellen und untersuchen. Hierbei starten wir zunächst mit der Ausstrahlungsbedingung Def. 5.4 und werden eine für gewisse ω äquivalente Ausstrahlungsbedingung herleiten. Diese bildet dann die Basis der sogenannten Methode der *komplexen Skalierung*, welche auch unter den Namen Aguilar-Balsev-Combes-Simon Theorie (siehe [HS96]) bzw. häufiger noch als *perfectly matched layer* (PML-) Methode (siehe u.a. [Ber94, KP09]) bekannt ist.

Dazu starten wir vom Aussenraumproblem (5.3), multiplizieren es mit Testfunktionen $v_{\text{ext}} \in H^1(\Omega_{\text{ext}})$ mit kompakten Träger in $\Omega_{\text{ext}} \cup \Gamma$ und erhalten nach partieller Integration

$$\int_{\Omega_{\text{ext}}} (\nabla u_{\text{ext}} \cdot \nabla v_{\text{ext}} - \omega^2 u_{\text{ext}} v_{\text{ext}}) dx = - \int_{\Gamma} v_{\text{ext}} \text{DtN}(\omega) u_0 ds. \quad (6.1)$$

Der Term auf der rechten Seite findet sich auch in der Innenraumformulierung (5.5). Die linke Seite werden wir nun so manipulieren, dass sowohl die Lösung exponentiell für $|x| \rightarrow \infty$ abfällt. Dann können wir das unbeschränkte Gebiet Ω_{ext} auf der linken Seite ersetzen durch ein hinreichend großes beschränktes Gebiet, auf welchem wir “normale” Finite Elemente Methoden verwenden können.

6.1 Eindimensionaler Fall

Starten wir wie im Abschnitt 5.2 mit $d = 1$, d.h. mit dem Problem (5.7)

$$\int_a^b (u'_{\text{int}} v'_{\text{int}} - \omega^2 (1+p) u_{\text{int}} v_{\text{int}}) dx - v_{\text{int}}(b) \text{DtN}(u_{\text{int}}(b)) - v_{\text{int}}(a) \text{DtN}(u_{\text{int}}(a)) = \int_a^b g v_{\text{int}} dx$$

mit $\text{DtN } c := i\omega c$ für $c \in \mathbb{C}$. (6.1) wird für den rechten Halbraum (b, ∞) zu

$$\int_b^\infty (u'_{\text{ext}} v'_{\text{ext}} - \omega^2 u_{\text{ext}} v_{\text{ext}}) dx = -v(b) \text{DtN}(u_{\text{ext}}(b)) \quad (6.2)$$

unter den Stetigkeitsbedingungen $u_{\text{ext}}(b) = u_{\text{int}}(b)$ und $v_{\text{ext}}(b) = v_{\text{int}}(b)$. Alternativ könnten wir die Teilung in Innen- und Aussenraumproblem auch überspringen und direkt die Variationsformulierung

$$\int_{\mathbb{R}} (u'v' - \omega^2(1+p)uv) dx = \int_{\mathbb{R}} gv dx \quad (6.3)$$

für die Lösung $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ und Testfunktionen $v \in H_{\text{comp}}^1(\mathbb{R})$ verwenden. O.b.d.A. sei nun $\text{supp } p, \text{supp } g \subset (-R, R)$. Dann ist u gegeben durch

$$u(x) = \begin{cases} u_{\text{int}}(x), & x \in (-R, R) \\ u_{\text{int}}(R) \exp(i\omega(x - R)), & x \in [R, \infty) \\ u_{\text{int}}(-R) \exp(-i\omega(x + R)), & x \in (-\infty, -R] \end{cases}, \quad (6.4)$$

wobei $u_{\text{int}} \in H^1((-R, R)) \cap C([-R, R])$ Lösung des Innenraumproblems (5.7) ist.

Sei nun $\tau : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $\tau(0) = 0$. Dann definieren wir für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $R > 0$ die Skalierungsfunktion $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\gamma_{\tau, \alpha, R}(r) := \begin{cases} r, & r \in [0, R] \\ r + \alpha i \tau(r - R), & r \geq R \end{cases}. \quad (6.5)$$

Diese ist stetig und mindestens zweimal stetig differenzierbar für alle $r \neq R$. Falls $\tau(r) = r^k$, so ist $\gamma_{\tau, \alpha, R}$ genau $k - 1$ mal stetig differenzierbar an der Stelle $r = R$ und unendlich oft stetig invertierbar für $r \neq R$.

Nun definieren wir für $d = 1$ die komplex skalierte Variable

$$x_\gamma(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|} \gamma_{\tau, \alpha, R}(|x|), & x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}. \quad (6.6)$$

Es gilt $x_\gamma(x) = x$ für alle $x \in [-R, R]$. Die Regularität von γ überträgt sich direkt auf die Regularität von x_γ . Als letztes definieren wir die komplex skalierte Funktion

$$u_\gamma := u \circ x_\gamma. \quad (6.7)$$

Bemerkung 6.1. $u|_{\Omega_{\text{ext}}}$ mit $\Omega_{\text{ext}} := (-\infty, R) \cup (R, \infty)$ ist zunächst einmal als Lösung der Helmholtz Gleichung nur für reelle Argumente definiert. Da $u|_{\Omega_{\text{ext}}}$ jedoch holomorph fortsetzbar ist und aufgrund des Identitätssatzes diese holomorphe Fortsetzung eindeutig ist, ist auch u_γ wohldefiniert. Da $\gamma_{\tau, \alpha, R}$ mit Ausnahme von $r \neq R$ stetig differenzierbar und für $r = R$ stetig ist, gilt zudem $u_\gamma \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$.

Es folgt mit der Lösungsdarstellung (6.4) die für $x \geq R$ die Darstellung

$$u_\gamma(x) = \underbrace{u_{\text{int}}(R) \exp(-i\omega R)}_{=: u_0 \in \mathbb{C}} \exp(i\omega \gamma_{\tau, \alpha, R}(x)) \quad (6.8)$$

und daraus

$$|u_\gamma(x)| = |u_0| \exp(-\{\Re(\omega)\alpha\tau(x - R) + \Im(\omega)\}x) \quad (6.9)$$

Im einfachsten Fall $\tau(r) = r$ ist $|u_\gamma(x)|$ für $\Re(\omega) > 0$ und $x \rightarrow \infty$ genau dann exponentiell fallend (steigend), wenn $\alpha > -\Im(\omega)/\Re(\omega)$ ($\alpha < -\Im(\omega)/\Re(\omega)$) gilt. Für $\alpha = -\Im(\omega)/\Re(\omega)$ bleibt $|u_\gamma(x)|$ konstant. Da wie bereits gesehen Resonanzen typischerweise negativen Imaginärteil haben, muss α damit hinreichend groß sein, damit $|u_\gamma(x)|$ exponentiell fallend ist. Falls $\tau(r) = r^k$ mit $k > 1$, so ist $|u_\gamma(x)|$ exponentiell fallend (steigend) genau dann, wenn $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$). Für $x \rightarrow -\infty$ gelten die gleichen Aussagen.

Satz 6.2. Seien $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\omega) > 0$, $R > 0$ und $\text{supp } p, \text{supp } g \subset (-R, R)$. Weiter gelte für $\tau(r) = r$ die Bedingung $\alpha > -\Im(\omega)/\Re(\omega)$ bzw. für $\tau(r) = r^k$, $k \in \mathbb{N}$, die Bedingung $\alpha > 0$.

Dann ist $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ aus (6.4) genau dann eine ausstrahlende Lösung von (6.3), wenn $u_\gamma := u \circ x_\gamma \in H^1(\mathbb{R})$ das Variationsproblem

$$a(u_\gamma, v) - \omega^2 b(u_\gamma, v) = \int_{\mathbb{R}} gv \, dx, \quad v \in H^1(\mathbb{R}) \quad (6.10)$$

mit den auf $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ definierten Bilinearformen

$$a(u, v) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x'_\gamma(x)} u'(x) v'(x) \, dx, \quad (6.11a)$$

$$b(u, v) := \int_{\mathbb{R}} (1 + p(x)) x'_\gamma(x) u(x) v(x) \, dx \quad (6.11b)$$

löst.

Beweis. Sei $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ eine ausstrahlende Lösung von (6.3) für alle Testfunktionen $v \in H_{\text{comp}}^1(\mathbb{R})$ und $u_\gamma := u \circ x_\gamma$. Dann gilt z.B. für den rechten Halbraum (R, ∞) mit Hilfe partieller Integration (vergleiche (6.2))

$$\int_R^\infty (u'v' - \omega^2 uv) \, dx = -v(R) \text{DtN } u(R) = \int_R^\infty \left(\frac{1}{x'_\gamma} u'_\gamma \tilde{v}' - \omega^2 x'_\gamma u_\gamma \tilde{v} \right) dx$$

für alle $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R})$ mit $\tilde{v}(R) = v(R)$. Daraus folgt der erste Teil der Behauptung.

Umgekehrt sei $u_\gamma \in H^1(\mathbb{R})$ eine Lösung von (6.10). Wenn wir speziell Testfunktionen v mit kompaktem Träger in (R, ∞) wählen (d.h. insbesondere $v(R) = 0$), so gilt für diese Testfunktionen

$$\int_R^\infty \left(\frac{1}{x'_\gamma} u'_\gamma \tilde{v}' - \omega^2 x'_\gamma u_\gamma \tilde{v} \right) dx = 0.$$

Elliptische Regularitätsresultate garantieren $\tilde{u} := u_\gamma|_{(R, \infty)} \in H^2((R, \infty))$ und mit partielle Integration folgt, dass \tilde{u} einer Lösung der Differentialgleichung

$$\partial_x \left(\frac{\tilde{u}'}{x'_\gamma} \right) - \omega^2 x'_\gamma \tilde{u} = 0, \quad x > R,$$

ist. Somit gilt (vergleiche mit (6.8))

$$\tilde{u}(x) = C_1 \exp(i\omega x_\gamma(x)) + C_2 \exp(-i\omega x_\gamma(x)), \quad x > R, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Wegen der Voraussetzungen an α und $\tilde{u} \in H^2((R, \infty))$ folgt $C_2 = 0$ und wir erhalten $\tilde{u}'(R) = i\omega x'_\gamma(R+) \tilde{u}(R)$.

Wenn wir nun Testfunktionen v mit kompaktem Träger in $[R, \infty)$ wählen (d.h. $v(R)$ ist nicht notwendig 0), so erhalten wir nach partieller Integration

$$\int_R^\infty \left(\frac{1}{x'_\gamma} u'_\gamma \tilde{v}' - \omega^2 x'_\gamma u_\gamma \tilde{v} \right) dx = -i\omega u_\gamma(R) v(R) = -v(R) \text{DtN } u_\gamma(R).$$

Analoge Überlegungen im linken Halbraum $(-\infty, R)$ führen wegen $x_\gamma(x) = x$ für $x \in [-R, R]$ auf (5.7). Daraus wiederum folgt die Behauptung. \square

Insbesondere folgt aus dem letzten Satz, dass eine Lösung $u_\gamma \in H^1(\mathbb{R})$ von (6.10) auf $[-R, R]$ unabhängig von der künstlich gewählten Dämpfungsfunktion γ ist.

Lemma 6.3. *Seien $\omega > 0$, $R > 0$ und $\text{supp } p, \text{supp } g \subset (-R, R)$, $\tau(r) = r$ und $\alpha > 0$. Weiter sei die Sesquilinearform s definiert durch*

$$s(u, v) := a(u, \bar{v}) - \omega^2 b(u, \bar{v}), \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}).$$

Dann existieren Konstanten $C_1, C_2, C_3 > 0$ mit

$$|s(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H^1(\mathbb{R})} \|v\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}), \quad (6.12a)$$

$$|s(u, u) + C_2(u, u)_{L^2([-R, R])}| \geq C_3 \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, \quad u \in H^1(\mathbb{R}). \quad (6.12b)$$

Beweis. Wegen $\tau(r) = r$ gilt $x'_\gamma(x) = \text{sign}(x)\sigma$ mit $\sigma := 1 + \alpha i$ für $|x| > R$ und natürlich $x'_\gamma(x) = 1$ für $|x| \leq R$. Die Stetigkeit der Sequilinearform folgt dann mit $C_1 := \max\{1, \omega^2(1 + \|p\|_\infty), 1/|\sigma|, \omega^2|\sigma|\}$.

Für die Gårding Ungleichung betrachten wir zunächst nur den rechten Halbraum $x > R$. Die Koeffizienten von s für $x > R$ lauten $1/\sigma = \bar{\sigma}/|\sigma|^2$ und $-\omega^2\sigma$. Beide haben negativen Imaginärteil und sind von der reellen Achse weg beschränkt. Daher existiert ein $\theta \in (0, \pi/2)$ und ein $C_3 > 0$ mit

$$\Re \left(\exp(i\theta) \int_R^\infty \left(\frac{1}{\sigma} |u'|^2 + \sigma |u|^2 \right) dx \right) \geq C_3 \int_R^\infty (|u'|^2 + |u|^2) dx, \quad u \in H^1((R, \infty)).$$

Gleiches gilt für den linken Halbraum $(-\infty, -R)$. Wegen $\Re(\exp(i\theta)) > 0$ folgt daher (6.12b). C_2 muss dabei hinreichend groß gewählt werden, sodass

$$C_2 + \Re(-\exp(i\theta)\omega^2(1 + p(x))) \geq C_3$$

für alle $x \in [-R, R]$. \square

Damit können wir folgendes, abstraktes Konvergenzresultat mit Hilfe von Sec. 4 und dort insbesondere das verallgemeinerte Céa-Lemma 4.4 herleiten:

Satz 6.4. *Seien $\omega > 0$, $R > 0$ und $\text{supp } p, \text{supp } g \subset (-R, R)$, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau(r) = r$ und $\alpha > 0$. Weiter sei $\{V_h\}_{h>0}$ eine Familie abgeschlossener Unterräume von $H^1(\mathbb{R})$ mit*

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{H^1(\mathbb{R})} = 0, \quad v \in H^1(\mathbb{R}). \quad (6.13)$$

Dann existiert eine Konstante $h_0 > 0$ sodass für alle $h \leq h_0$ Lösungen $u_h \in V_h$ von

$$s(u_h, v) = \int_{\mathbb{R}} gv \, dx, \quad v \in V_h \quad (6.14)$$

existieren. Ferner existiert eine Konstante $C > 0$ und eine Lösung $u_\gamma \in H^1(\mathbb{R})$ von (6.10) mit

$$\|u_\gamma - u_h\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\mathbb{R})}. \quad (6.15)$$

Beweis. Aus Satz 5.12 folgt zusammen mit Satz 6.2 die eindeutige Lösbarkeit von (6.10). Damit sind alle Voraussetzungen für das verallgemeinerte Céa-Lemma 4.4 erfüllt. \square

Es bleibt die Frage, wie denn geeignete Räume $V_h \subset H^1(\mathbb{R})$ zu finden sind. Zudem sollten die in der Sequilinearform auftretenden Integrale einfach zu berechnen sein.

Sei dazu $L > 0$ und $\tilde{V}_{h,L} \subset H_0^1([-L-R, L+R])$ ein geeigneter Finite-Elemente Ansatzraum für das beschränkte Gebiet $[-L-R, L+R]$ (zur Konstruktion siehe Sec. 3). Insbesondere sollte (3.4) erfüllt sein:

$$\inf_{v_h \in \tilde{V}_{h,L}} \|v - v_h\|_V \leq Ch^p |v|_{H_0^{p+1}([-L-R, L+R])}, \quad v \in H_0^{p+1}([-L-R, L+R]).$$

Diesen Raum können wir nun fortsetzen zu

$$V_{h,L} := \{u \in H^1(\mathbb{R}) : u|_{[-L-R, L+R]} \in \tilde{V}_{h,L}, u(x) = 0 \text{ für alle } |x| \geq L+R\} \subset H^1(\mathbb{R}). \quad (6.16)$$

Die Räume $V_{h,L}$ sind endlich-dimensional (und damit abgeschlossen) und (6.13) ist für $h \rightarrow 0$ und $L \rightarrow \infty$ erfüllt, da $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $H^1(\mathbb{R})$ liegen.

Der große Vorteil dieser Räume besteht darin, dass für fixes $L > 0$ lediglich eine Standardvariationsformulierung auf dem beschränkten Gebiet $[-L-R, L+R]$ vorliegt

$$s(u, v) = \int_{-L-R}^{L+R} \left(\frac{1}{x'_\gamma(x)} u'(x) v'(x) - \omega^2 (1 + p(x)) x'_\gamma(x) u(x) v(x) \right) dx, \quad u, v \in V_{h,L}. \quad (6.17)$$

Diese ist somit mit den üblichen Finite-Elemente-Methoden problemlos zu behandeln. Konvergenz ist jedoch nur für $L \rightarrow \infty$, d.h. für immer größer werdende Gebiete, sichergestellt.

Es bleibt die Frage, wie sich der Approximationsfehler $\inf_{v_{h,L} \in V_{h,L}} \|u_\gamma - v_{h,L}\|_{H^1(\mathbb{R})}$ verhält. Es gilt für alle $v_{h,L} \in V_{h,L}$

$$\begin{aligned} \|u_\gamma - v_{h,L}\|_{H^1(\mathbb{R})} &\leq \|u_\gamma|_{[-L-R, L+R]} - v_{h,L}|_{[-L-R, L+R]}\|_{H^1((-L-R, L+R))} \\ &\quad + \int_{R+L}^{\infty} (|u'_\gamma(x)|^2 + |u_\gamma(x)|^2) dx + \int_{-\infty}^{-L-R} (|u'_\gamma(x)|^2 + |u_\gamma(x)|^2) dx. \end{aligned}$$

Wegen

$$|u_\gamma(x)| = |u| \exp(-\omega\alpha(|x| - R)), \quad |x| \geq R,$$

für $\omega > 0$ können die unbeschränkten Integrale mit $\exp(-\omega\alpha L)$ abgeschätzt werden. Für den ersten Term führen wir für fixes $\epsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$g_{\epsilon,k}(x) := \begin{cases} 1, & |x| \leq R + L - \epsilon \\ 1 - \left(\frac{x + \epsilon - R - L}{\epsilon}\right)^k, & R + L - \epsilon \leq |x| \leq R + L \end{cases}$$

ein. Auf diese Weise gilt $u_\gamma g_{\epsilon,k} \in H_0^k((-R-L, R+L))$ und wir können (3.4) verwenden. Der verbleibende Term $u_\gamma(1 - g_{\epsilon,k})$ fällt für fixes ϵ und k wiederum exponentiell mit

$L \rightarrow \infty$. Insgesamt ergibt sich somit bei hinreichender Regularität von $u|_{[-R,R]}$ und mit geeigneten Finite-Elemente Verfahren

$$\inf_{v_{h,L} \in V_{h,L}} \|u_\gamma - v_{h,L}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C \left(h^p |u_\gamma g_{\epsilon,k}|_{H_0^{p+1}([-L-R, L+R])} + \exp(-\omega \alpha L) \right). \quad (6.18)$$

Der Fehler besteht somit aus einem exponentiell abklingenden Abschneidefehler und einen Standard Finite-Elemente Fehler.

Bemerkung 6.5. *Die vorgestellte Theorie umfasst nur sogenannte Dirichlet-PML's, d.h. wenn am Abschniederand $R+L$ eine homogene Dirichlet Randbedingung verwendet wird. In einigen Fällen sind homogene Neumann Randbedingungen sinnvoller. In diesem Fall muss die Theorie angepasst werden. Typischerweise wird dabei zunächst der Fehler im durchs Abschneiden entstehenden gestörten Dirichlet-to-Neumann Operator untersucht.*

Die PML-Methode hat ihren Namen von [Ber94] 1994 für zeit-abhängige Probleme erhalten. Wesentlich älter ist der Name *complex scaling*, welcher insbesondere für Resonanzberechnungen verwendet wird/wurde. Mit den in (6.11) definierten Bilinearformen, lassen sich die Resonanzen des Streuproblems als Wurzeln der Eigenwerte des linearen Eigenwertproblems

$$a(u, v) = \omega^2 b(u, v), \quad v \in H^1(\mathbb{R}) \quad (6.19)$$

berechnen. Nach Projektion in die Räume $V_{h,L}$ entsteht daraus ein lineares, verallgemeinertes Eigenwertproblem

$$A_h \underline{u}_h = \omega_h^2 B_h \underline{u}_h. \quad (6.20)$$

Dieses kann z.B. mit dem Arnoldi-Verfahren gelöst werden.

Zur Konvergenz des Resonanzproblems können wir wiederum auf Sec. 4 verweisen. Dazu müssen wir lediglich Lemma 6.3 für komplexe Frequenzen $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\omega) > 0$ verallgemeinern. Unter der Voraussetzung $\arg(\sigma) > 2 \arg(\omega)$ ist dies auch einfach möglich. Unter der Voraussetzung $\arg(\sigma) > \arg(\omega)$, welche wegen (6.9) ausreichend sein sollte, muss die Theorie etwas angepasst werden.

Bemerkung 6.6. *Sei u eine ausstrahlende Resonanzfunktion für $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\omega) > 0$. Wegen (6.9) ist u_γ genau dann exponentiell fallend (und damit in $H^1(\mathbb{R})$), wenn $\arg(\sigma) > \arg(\omega)$ gilt. Resonanzen ω von (6.19) mit $\arg(\sigma) \leq \arg(\omega)$ gehören somit nicht zu einer ausstrahlenden Resonanzfunktion.*

6.2 Radiale komplexe Skalierung

Für $d = 2, 3$ gibt es zwei gebräuchliche Verallgemeinerungen der eindimensionalen Skalierung. Wir starten hier mit der theoretisch einfacheren radialen komplexen Skalierung.

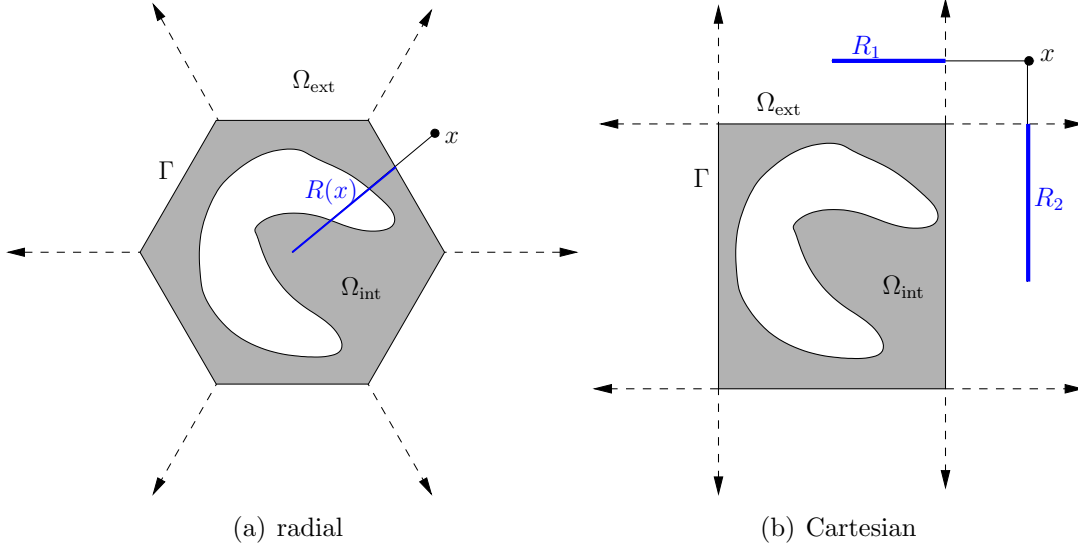


Abbildung 6.1: Übersicht über komplexe Skalierung. Die gestrichelten Linien deuten mögliche Unstetigkeiten von $D_x x_\sigma$ in Ω_{ext} an.

Dafür sei Γ stückweise glatt, d.h. es existiert eine Parametrisierung von Γ welche stückweise k mal stetig differenzierbar ist. Weiter nehmen wir an, dass für alle $x \in \Gamma$ mit zugehörigem Normalenvektor $\nu_\Gamma(x)$ das Skalarprodukt $x \cdot \nu_\Gamma(x)$ nicht verschwindet und dass Γ der Rand eines bezüglich des Ursprungs sternförmigen Gebietes ist. Im einfachsten und üblichsten Fall ist Γ einfach der Rand einer Kugel.

Mit den Definitionen des vorigen Abschnittes definieren wir für alle $x \in \Omega$ analog zu (6.6)

$$x_\gamma(x) := \begin{cases} \frac{\gamma_{\tau, \alpha, R(x)}(|x|)}{|x|} x, & x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

mit $R(x) := \sup\{r \in \mathbb{R}_+ : r \frac{x}{|x|} \in \Omega_{\text{int}}\}$. In Fig. 6.1(a) ist die Konstruktion von $R(x)$ zu erkennen. Falls $\Gamma = \partial B_R(0)$, so ist $R(x) \equiv R$. Wie im eindimensionalen Fall ist $x_\gamma(x) = x$ für alle $x \in \Omega_{\text{int}}$.

Lemma 6.7. *Sei $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ durch die k mal stetig differenzierbare Funktion η parametrisiert und sei τ ebenfalls k mal stetig differenzierbar. Dann ist x_γ k mal stetig differenzierbar in den Pyramidenstümpfen $\{r\hat{x} \in \mathbb{R}^d : r > 1, \hat{x} \in \tilde{\Gamma}\}$.*

Auf den Grenzflächen zwischen den Pyramidenstümpfen und zum Innenraumgebiet Ω_{int} ist x_γ mindestens stetig.

Beweis. Für $x \in \Omega_{\text{ext}} \cup \Gamma$ existiert mindestens ein Schnittpunkt zwischen den Strahlen $\{rx \in \mathbb{R}^d : r > 0\}$ und Γ . Dieser Schnittpunkt ist eindeutig aufgrund der Voraussetzungen an Γ und hängt stetig von x ab. Daher hängt auch $R(x)$ in (6.21) als Norm dieses Schnittpunktes stetig von x ab. Da $\gamma_{\tau, \alpha, R(x)}$ stetig ist bezüglich des Arguments und bezüglich R , ist x_γ stetig in Ω .

Sei nun $x \in \{r\hat{x} \in \mathbb{R}^d : r > 1, \hat{x} \in \tilde{\Gamma}\}$ und sei $\tilde{\Gamma} = \eta(S)$ mit $S \subset \mathbb{R}^{d-1}$. Wir müssen zeigen, dass für $x = r(x)\eta(\varphi(x))$, $\varphi \in S$, die Funktion r k mal stetig differenzierbar ist. Aus $R(x) = |x|/r(x)$ folgt dann die Behauptung.

Sei also $F : \Omega_{\text{ext}} \times (\mathbb{R}_+ \times S) \rightarrow \mathbb{R}^d$ durch $F(x, (r, \varphi)) := x - r\eta(\varphi)$ definiert. Die Jacobi-Matrix $D_{r,\varphi}F(x, (r, \varphi)) = (-\eta(\varphi), -rD_\varphi\eta_\varphi)$ ist aufgrund der Voraussetzung $\hat{x} \cdot \nu(\hat{x}) \neq 0$ mit $\hat{x} = \eta(\varphi)$ invertierbar. Da F sogar k mal stetig invertierbar ist, liefert der Hauptsatz über implizite Funktionen die gewünschte Glattheit von r . \square

Für $\Gamma = \partial B_R(0)$ ist die Jacobi-Matrix $J_\gamma := D_x x_\gamma$ einfach zu berechnen

$$J_\gamma(x) = \frac{\gamma_{\tau,\alpha,R}(|x|)}{|x|} \text{id}_d + \frac{\gamma'_{\tau,\alpha,R}(|x|) - \gamma_{\tau,\alpha,R}(|x|)}{|x|^3} xx^T, \quad x \in \Omega \setminus \{0\}. \quad (6.22)$$

In allen anderen Fällen ist $R'(x) \neq 0$ und muss dadurch berücksichtigt werden. Wir beschränken uns daher im Folgenden auf sphärische Γ und zur Vereinfachung $\tau(r) = r$.

Lemma 6.8. *Sei $\tau(r) = r$, $\sigma := 1 + \alpha i$, $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\omega) > 0$ und $\Im(\sigma\omega) > 0$. Weiter sei $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ eine nach Def. 5.4 austrahlende Lösung der Helmholtz Gleichung (5.1a). Dann ist*

$$u_\gamma := u \circ x_\gamma \in H^1(\Omega) \quad (6.23)$$

wohldefiniert und exponentiell fallend für $|x| \rightarrow \infty$.

Beweis. Die Reihendarstellung (5.25) konvergiert wegen Satz 5.6 gleichmäßig und absolut auf kompakten Teilmengen des Ω_{ext} und darf gliedweise differenziert werden. Zudem sind die (sphärischen) Hankel-Funktionen holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Daher hat u eine eindeutige, holomorphe Fortsetzung von $x = r\hat{x} \in \Omega_{\text{ext}}$ mit $r = |x|$ und $\hat{x} = x/r$ nach $\tilde{x} = \tilde{r}\hat{x}$ mit $\tilde{r} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. In diesem Sinne ist u_γ wohldefiniert und wegen des letzten Lemmas gilt $u_\gamma \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

Aufgrund des asymptotischen Verhaltens der (sphärischen) Hankel-Funktionen für große Argumente (5.16) bzw. (5.17) liegt die Vermutung nahe, dass u_γ exponentiell fällt. Die Grenzwerte in (5.16) bzw. (5.17) sind jedoch nicht gleichmäßig in n , sodass aus dem exponentiellen Fallen der (sphärischen) Hankel-Funktionen nicht direkt auf die Reihe über diese Funktionen geschlossen werden kann.

Einfacher ist der Zugang über die Integraldarstellung (5.35), welche nach Bem. 5.11 äquivalent zur Reihendarstellung ist. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist u_γ in Ω_{ext} eine Lösung der Helmholtz-Gleichung $\Delta u_\gamma + (\omega\sigma)^2 u_\gamma = 0$, d.h. in (5.35) ist die skalierte Fundamentallösung

$$\Phi_\sigma(x, y) := \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\omega\sigma|x-y|), & d = 2 \\ \frac{i\omega}{4\pi} h_0^{(1)}(\omega\sigma|x-y|) = \frac{\exp(i\omega\sigma|x-y|)}{4\pi|x-y|}, & d = 3 \end{cases}, \quad x \neq y. \quad (6.24)$$

zu verwenden. Daraus wiederum folgt die Behauptung. \square

Satz 6.9. Sei $\tau(r) = r$, $\sigma := 1 + \alpha i$, $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\omega) > 0$ und $\Im(\sigma\omega) > 0$. Weiter sei $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ eine nach Def. 5.4 austrahlende Lösung der Helmholtz Gleichung (5.1a). Dann ist $u_\gamma := u \circ x_\gamma$ die eindeutige Lösung von

$$a(u_\gamma, v) - \omega^2 b(u_\gamma, v) = \int_{\Omega} gv \, dx + \int_{\partial\Omega} g_{bd}v \, ds, \quad v \in H^1(\Omega) \quad (6.25)$$

mit den Bilinearformen auf $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$

$$a(u, v) := \int_{\Omega} J_\gamma^{-\top} \nabla u \cdot J_\gamma^{-\top} \nabla v \det(J_\gamma) dx + \int_{\partial\Omega} \alpha uv \, dx, \quad (6.26a)$$

$$b(u, v) := \int_{\Omega} (1 + p)uv \det(J_\gamma) dx. \quad (6.26b)$$

Umgekehrt sei $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ eine Lösung von (6.25). Dann ist $\tilde{u}|_{\Omega_{\text{int}}}$ die Einschränkung einer ausstrahlenden Lösung u von (5.1a) auf Ω_{int} .

Beweis. Der erste Teil folgt mit dem vorigen Lemma und der Kettenregel angewendet auf u_γ . Der zweite Teil folgt analog zum eindimensionalen Fall in (6.2) über Separation in (sphärische) Bessel-Gleichungen unter Verwendung des DtN-Operators (5.28). \square

Mit deutlich mehr Aufwand kann wie im eindimensionalen Fall (siehe Lemma 6.3) Stetigkeit und eine Art von Gårding-Ungleichung gezeigt werden. Mit einigen Modifikationen an der im Abschnitt 4 vorgestellten Konvergenztheorie für Projektionsverfahren folgt dann im Wesentlichen die gleichen Aussagen wie im eindimensionalen Fall. Insbesondere lässt sich für eine Dirichlet-PML, bei dem $\Omega_{\text{ext}} = \{x \in \mathbb{R}^d : R < |x|\}$ durch $\Omega_{R,L} = \{x \in \mathbb{R}^d : R < |x| < L\}$ beschnitten wird, analog zu (6.18) folgende Fehlerabschätzung nachweisen

$$\inf_{v_{h,L} \in V_{h,L}} \|u_\gamma - v_{h,L}\|_{H^1(\Omega_L)} \leq C (h^p + \exp(-\Im(\omega\sigma)L)). \quad (6.27)$$

6.3 Kartesische komplexe Skalierung

In der Praxis sind kartesische Skalierungen häufig deutlich leichter umzusetzen. Sei dazu Γ der Rand eines Quaders bzw. Rechtecks, d.h. o.B.d.A. $\Omega_{\text{int}} = \Omega \cap \bigotimes_{j=1}^d (-R_j, R_j)$ mit $R_j > 0$ für $j = 1, \dots, d$. Bei der radialen komplexen Skalierung (6.21) wurde ein verallgemeinerter Radius skaliert, d.h. die Skalierung wirkte auf alle Kartesische Komponenten gleich. Bei der kartesischen komplexen Skalierung werden die Kartesischen Komponenten getrennt voneinander skaliert. D.h. für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega$ wird definiert

$$(x_\gamma)_j := \begin{cases} \gamma_{\tau_j^{\text{right}}, \alpha_j^{\text{right}}, R_j}(x_j), & x_j > R_j \\ x_j, & x_j \in [-R_j, R_j], \\ -\gamma_{\tau_j^{\text{left}}, \alpha_j^{\text{left}}, R_j}(-x_j), & x_j < -R_j \end{cases}, \quad j = 1, \dots, d. \quad (6.28)$$

Fig. 6.1(b) zeigt mögliche Unstetigkeiten der Jacobi-Matrix Dx_γ . Diese ist in Falle der Kartesischen Skalierung deutlich einfacher als bei radialer Skalierung und besteht nur aus einer Diagonalmatrix. Ein Äquivalenzresultat und auch eine Konvergenztheorie ist dagegen deutlich aufwändiger als bei einer radialen PML (siehe [KP10, BP13]). Dies liegt im Wesentlichen darin begründet, dass der Zugang über die Integraldarstellung bzw. über die Reihendarstellung mit Hankel-Funktionen deutlich erschwert wird, da die Kartesischen Komponenten unabhängig voneinander skaliert werden.

Ein Vorteil der Kartesischen komplexen Skalierung ist natürlich die einfache Implementierung und die Flexibilität. Wobei bei Finiten-Elementen höherer Ordnung auf die Unstetigkeiten der Jacobi-Matrix Rücksicht genommen werden sollte, da u_γ dort nicht mehr beliebig glatt ist. Das Finite-Elemente Gitter sollte daher so konstruiert werden, dass diese Unstetigkeiten auf dem Skelett des Gitters liegen. Auf diese Weise kann die Konvergenzgeschwindigkeit der Verfahren höherer Ordnung erhalten werden.

7 Hardy-Raum Infinite Elemente

Bei der PML-Methode wurde im Wesentlichen Integral über das unbeschränkte Gebiet Ω_{ext} in (6.1) auf geschickte Weise diskretisiert. Den gleichen Ansatz verfolgen im Prinzip infinite Elemente Methoden. Klassische Infinite Elemente Methoden verwenden dabei für $\Omega_{\text{ext}} = \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ Tensor-Produkt Approximationen der Form

$$u_{\text{ext}}(r\hat{x}) \approx \sum_{j=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_\Gamma} c_{jk} \varphi_j^{(r)}(r) \varphi_k^\Gamma(\hat{x}), \quad r > R, \quad \hat{x} \in \Gamma. \quad (7.1)$$

φ_k^Γ sind dabei die nicht-verschwindenden Spuren der Finite-Elemente Basisfunktionen der Innenraumdiskretisierung $H^1(\Omega_{\text{int}})$ auf Γ . $\varphi_j^{(r)}$ sind spezielle radiale Basisfunktionen. Bei den klassischen Infinite Elementen nimmt man hier normalerweise die sphärischen Hankel-Funktionen 1. Art oder Funktionen der Form

$$\varphi_j^{(r)}(r) = \frac{\exp(i\omega r)}{r^j}, \quad j = 1, \dots, N_r.$$

Diese haben das gleiche asymptotische Verhalten und erfüllen die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung.

Problematisch ist jedoch, dass diese Funktionen nicht auch gleichzeitig als Testfunktionen gewählt werden können, da $\int_R^\infty r^2 |\varphi_1^{(r)}(r)|^2 dr$ unbeschränkt ist. Die Basisfunktionen müssen also entweder modifiziert werden oder es muss ein Petrov-Galerkin Verfahren mit unterschiedlichen Ansatz- und Testfunktionen gewählt werden. Details zu solchen Verfahren finden sich z.B. in [Ihl98]. Da die Verfahren auf sehr schlecht konditionierte lineare Gleichungssysteme führen, werden wir sie hier nicht weiter vorstellen.

Die Hardy-Raum Infinite Elemente basieren auf ähnlichen Ansätzen jedoch mit einer komplett anderen theoretischen Grundlage. Der große Vorteil dieser Methoden gegenüber den klassischen Infinite Elementen liegt in sehr gut konditionierten Diskretisierungsmatrizen, einer klassischen Galerkin Konvergenztheorie mit exponentiell abfallendem Projektionsfehler und der Unabhängigkeit der Basisfunktionen von der Frequenz ω . Letzteres ist besonders für Resonanzprobleme von großem Vorteil. Der Nachteil ist der theoretische Zugang, welcher im Gegensatz zur PML und zu den klassischen infinite Elementen weniger intuitiv ist.

7.1 Eindimensionaler Fall

Analog zur PML starten wir wie im Abschnitt 5.2 mit $d = 1$, d.h. mit dem Problem (5.7)

$$\int_a^b (u'_{\text{int}} v'_{\text{int}} - \omega^2(1+p)u_{\text{int}}v_{\text{int}}) dx - v_{\text{int}}(b) \text{DtN}(u_{\text{int}}(b)) - v_{\text{int}}(a) \text{DtN}(u_{\text{int}}(a)) = \int_a^b g v_{\text{int}} dx$$

mit $\text{DtN } c := i\omega c$ für $c \in \mathbb{C}$. (6.1) wird für den rechten Halbraum (b, ∞) zu

$$\int_b^\infty (u'_{\text{ext}} v'_{\text{ext}} - \omega^2 u_{\text{ext}} v_{\text{ext}}) dx = -v(b) \text{DtN}(u_{\text{ext}}(b)) \quad (7.2)$$

unter den Stetigkeitsbedingungen $u_{\text{ext}}(b) = u_{\text{int}}(b)$ und $v_{\text{ext}}(b) = v_{\text{int}}(b)$. u_{ext} hat die allgemeine Form

$$u_{\text{ext}}(x) = C \exp(i\omega(x-R)) + D \exp(-i\omega(x-R)), \quad (7.3)$$

wobei wir bereits wissen, dass für ausstrahlende Lösungen $D = 0$ gelten sollte. Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden $R = 0$ an.

Lemma 7.1. *Sei $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ maximal exponentiell steigend, d.h. es existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit $f(x) \leq C_1 \exp(C_2 x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Dann existiert für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > C_2$ die Laplace transformierte*

$$(\mathcal{L} f)(s) := \int_0^\infty f(x) \exp(-sx) dx. \quad (7.4)$$

Sei weiter f stetig differenzierbar mit den gleichen Voraussetzungen an f' und stetig im Ursprung, dann gilt

$$(\mathcal{L} f')(s) = s(\mathcal{L} f)(s) - f(0). \quad (7.5)$$

Beweis. Aufgrund der Voraussetzungen ist der Integrand exponentiell fallend und damit in $L^1(\mathbb{R}_+)$. (7.5) folgt direkt mit partieller Integration. \square

u_{ext} ist Laplace transformierbar und es gilt mit $\hat{u} := \mathcal{L} u_{\text{ext}}$

$$\hat{u}(s) = \frac{C}{s - i\omega} + \frac{D}{s + i\omega}, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (7.6)$$

Streng genommen ist \hat{u} nur für hinreichend große $\Re(s)$ definiert. \hat{u} hat jedoch eine eindeutige meromorphe Fortsetzung auf \mathbb{C} mit Polen in $\pm i\omega$.

Lemma 7.2. *Sei $\kappa_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist die Möbius Transformation*

$$m_{\kappa_0}(z) := i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (7.7)$$

eine konforme Abbildung auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sei D die offene komplexe Einheitscheibe in \mathbb{C} und $S^1 = \partial D$ die komplexe Einheitskugel. Dann gilt

$$m_{\kappa_0}(D) = \{\kappa_0(x + iy) \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, y < 0\}, \quad (7.8a)$$

$$m_{\kappa_0}(S^1 \setminus \{1\}) = \{\kappa_0(x + iy) \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, y = 0\} = \kappa_0\mathbb{R}, \quad (7.8b)$$

$$m_{\kappa_0}(\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus (D \cup S^1)) = \{\kappa_0(x + iy) \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, y > 0\}. \quad (7.8c)$$

Weiter ist die durch

$$(\mathcal{M}_{\kappa_0} f)(z) := \frac{(f \circ m_{\kappa_0})(z)}{z - 1}, \quad z \in S^1, \quad (7.9)$$

definierte Abbildung $\mathcal{M}_{\kappa_0} : L^2(\kappa_0\mathbb{R}) \rightarrow L^2(S^1)$ bis auf den Faktor $\sqrt{2|\kappa_0|}$ unitär.

Beweis. Nachrechnen. Es gilt $m'_{\kappa_0}(z) = -2i\kappa_0/(z - 1)^2$ und daher

$$\int_{\kappa_0\mathbb{R}} |f(s)|^2 |ds| = \int_{S^1} |f(m_{\kappa_0}(z))|^2 |m'_{\kappa_0}(z) dz| = 2|\kappa_0| \int_{S^1} \left| \frac{(f \circ m_{\kappa_0})(z)}{z - 1} \right|^2 |dz|.$$

□

Für $\hat{U} := \mathcal{M}_{\kappa_0} \mathcal{L} u_{\text{ext}}$ erhalten wir

$$\hat{U}(z) := \frac{C}{i(\kappa_0 - \omega)z + i(\kappa_0 + \omega)} + \frac{D}{i(\kappa_0 + \omega)z + i(\kappa_0 - \omega)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (7.10)$$

Auch \hat{U} ist somit eine meromorphe Funktion, die Pole von \hat{u} werden abgebildet auf $\left(\frac{\omega + \kappa_0}{\omega - \kappa_0}\right)^{\pm 1}$.

Definition 7.3 (Hardy Raum). $H^{\pm}(S^1)$ bezeichnet den Raum aller Funktionen $U_{\text{bd}} \in L^2(S^1)$ die L^2 -Randwerte von in D holomorphen Funktionen U_{vol} sind mit $\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |U_{\text{vol}}(r^{\pm 1} \exp(i\varphi))|^2 d\varphi < \infty$.

$H^+(S^1)$ ist ein Hilbert-Raum mit Orthogonalbasis $\{z^j, j \in \mathbb{N}_0\}$.

Definition 7.4 (Polbedingung). Eine Funktion u erfüllt für einen Parameter $\kappa_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Polbedingung, wenn die Laplace-Transformierte für hinreichend große $\Re(s)$ existiert, eine holomorphe Fortsetzung in eine Umgebung von $m_{\kappa_0}(D \cup S^1)$ hat und die Möbius Transformierte der Einschränkung dieser Fortsetzung auf $\kappa_0\mathbb{R}$ in $H^+(S^1)$ liegt. Kurz

$$\mathcal{M}_{\kappa_0} \mathcal{L} u \in H^+(S^1). \quad (7.11)$$

Für $\Re(\omega/\kappa_0) > 0$ ist diese Bedingung gleichbedeutend mit der gewünschten Ausstrahlungsbedingung $D = 0$. Von daher werden wir im Folgenden die Polbedingung (7.11) als Ausstrahlungsbedingung verwenden und annehmen, dass der Parameter κ_0 so gewählt ist, dass $\Re(\omega/\kappa_0) > 0$ gilt.

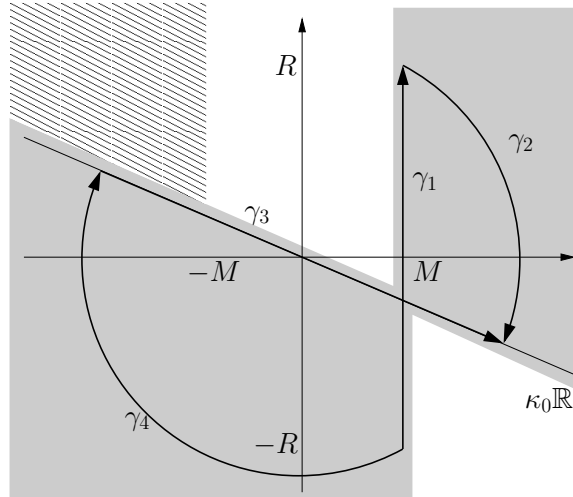


Abbildung 7.1: Integrationswege im Beweis von Lemma 7.5

Zur Diskretisierung von (7.2) müssen wir also Funktionen wählen, für die die Integrale beschränkt sind und die die Austrahlungsbedingung (7.11) erfüllen. Dies ist deutlich einfacher, wenn wir die unendlichen Integrale transformieren.

Lemma 7.5. Seien $M \geq 0$, $\kappa_0 \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\kappa_0) > 0$ und $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen, deren Laplace-Transformierte $\hat{f} := \mathcal{L}f$ und $\hat{g} := \mathcal{L}g$ für $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq M\}$ bzw. $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq -M - \epsilon\}$ mit $\epsilon > 0$ existieren und eine holomorphe Fortsetzung in eine Umgebung um $E(M, \kappa_0) := \{s \in \mathbb{C} : \Re(is/\kappa_0) \geq 0 \vee \Re(s) \geq M\}$ besitzen. Weiter sei in dieser Umgebung $|\hat{f}(s)s|$ und $|\hat{g}(s)s|$ gleichmäßig beschränkt.

Dann gilt

$$\int_0^\infty f(r)g(r)dr = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_0 \mathbb{R}} \hat{f}(s)\hat{g}(-s)ds = \frac{2\kappa_0}{2\pi i} \int_{S^1} \hat{F}(z)\hat{G}(\bar{z})|dz| \quad (7.12)$$

mit $\hat{F} := \mathcal{M}\hat{f}$ und $\hat{G} := \mathcal{M}\hat{g}$.

Beweis. Wir erweitern f, g durch 0 zu $f^*, g^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und betrachten

$$\int_0^\infty f(r)g(r)dr = \mathcal{F}\{f^*g^*\}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}\{f^*e^{-M\bullet}\}(t)\mathcal{F}\{g^*e^{M\bullet}\}(-t)dt.$$

Die Fourier-Transformierten

$$\mathcal{F}\{f^*(x)e^{-Mx}\}(t) = \hat{f}(it + M) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}\{g^*(x)e^{Mx}\}(-t) = \hat{g}(-(it + M))$$

existieren nach Voraussetzung. Weiterhin ist $\hat{f}(s)\hat{g}(-s)$ holomorph in dem grau hinterlegten Bereich aus Abbildung 7.1, da \hat{g} nur auf die schraffierte obere Ecke nicht holomorph fortsetzbar ist. Damit folgt die erste Gleichung in (7.12) mit Cauchys Integralsatz bezüglich des abgeschlossenen Weges $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4$ aus Abbildung 7.1,

wobei die Integrale über γ_2 und γ_4 für $R \rightarrow \infty$ wegen des Abfallverhaltens von \hat{f} und \hat{g} verschwinden:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(r)g(r)dr &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(it+M)\hat{g}(-(it+M))dt = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} \hat{f}(s)\hat{g}(-s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3} \hat{f}(s)\hat{g}(-s)ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_0\mathbb{R}} \hat{f}(s)\hat{g}(-s)ds. \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung nutzen wir die bereits von der Möbius-Transformation (7.7) bekannte Substitution $s = m_{\kappa_0}(z)$ mit $m'_{\kappa_0}(z) = (-2i\kappa_0)/(z-1)^2$ und $-m_{\kappa_0}(z) = m_{\kappa_0}(\bar{z})$ für $z \in S^1$:

$$\begin{aligned} \int_{\kappa_0\mathbb{R}} \hat{f}(s)\hat{g}(-s)ds &= -\frac{\kappa_0}{|\kappa_0|} \int_{\kappa_0\mathbb{R}} \hat{f}(s)\hat{g}(-s)|ds| \\ &= \frac{\kappa_0}{|\kappa_0|} \int_{S^1} \hat{f}(m_{\kappa_0}(z))\hat{g}(m_{\kappa_0}(\bar{z})) \frac{2|\kappa_0|}{|z-1|^2} |dz| \\ &= 2\kappa_0 \int_{S^1} (\mathcal{M}\hat{f})(z)(\mathcal{M}\hat{g})(\bar{z})|dz|. \end{aligned}$$

□

Zur Vereinfachung definieren wir die Bilinearform aus dem vorigen Lemma zu

$$q(F, G) := \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} G(\bar{z})F(z)|dz| \quad (7.13)$$

und erhalten folgende Variationsformulierung.

Satz 7.6. *Seien $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil und $\Re(\kappa/\kappa_0) > 0$, $X := \mathbb{C} \times H^+(S^1)$, und $u \in H_{\text{loc}}^1([0, \infty))$ eine ausstrahlende (im Sinne der Polbedingung) Lösung von (7.2) zu gegebenem $g_0 := u(0)$. Dann löst $(u_0, U)^\top \in X$ mit $u_0 = g_0$ und*

$$U(z) := \frac{2i\kappa_0\hat{U}(z) - u_0}{z-1} = \frac{(\kappa_0 - \omega)u_0}{(\kappa_0 - \omega)z + (\kappa_0 + \omega)}, \quad z \in S^1, \quad (7.14)$$

das Variationsproblem

$$A\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ V \end{pmatrix}\right) - \kappa^2 B\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ V \end{pmatrix}\right) = -v_0 \text{DtN}(g_0) \quad (7.15)$$

für alle $(v_0, V)^\top \in X$ und den Bilinearformen

$$\begin{aligned} A\left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix}\right) &:= (-2i\kappa_0)q\left(\mathcal{T}_+\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{T}_+\begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix}\right), \\ B\left(\begin{pmatrix} f_0 \\ G \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix}\right) &:= \frac{2i}{\kappa_0}q\left(\mathcal{T}_-\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{T}_-\begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix}\right) \end{aligned} \quad (7.16)$$

mit $(f_0, F)^\top, (g_0, G)^\top \in X$ und den Operatoren $\mathcal{T}_\pm : X \rightarrow H^+(S^1)$ definiert durch

$$\left(\mathcal{T}_\pm \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix} \right) (z) := \frac{1}{2} (f_0 + (z \pm 1)F(z)), \quad z \in S^1. \quad (7.17)$$

Ist umgekehrt $(u_0, U)^\top \in X$ eine Lösung von (7.15) mit rechter Seite $-v_0 g'_0$, so gilt $g'_0 := \text{DtN}(u_0) = i\omega u_0$.

Beweisskizze. Wir wählen in (7.2) Testfunktionen der Form

$$v(x) = v_0 \exp(i\tilde{k}x) + r \sum_{j=1}^N \alpha_j \exp(ik_j r), \quad r \geq 0 \quad (7.18)$$

mit $N \in \mathbb{N}$ beliebig und Konstanten $\tilde{k}, k_j, \alpha_j \in \mathbb{C}$. Insbesondere nehmen wir an, dass $\Im(\tilde{k})$ und $\Im(k_j)$ hinreichend groß ist ($> \Im(\omega)$), sodass der Integrand exponentiell fällt und das vorigen Lemma anwendbar ist. Dann folgt

$$q(\mathcal{M}\mathcal{L}u', \mathcal{M}\mathcal{L}v') - q(\mathcal{M}\mathcal{L}u, \mathcal{M}\mathcal{L}v) = -v(b) \text{DtN}(u_0). \quad (7.19)$$

Wenn wir U wie in (7.14) definieren, dann gilt nach kurzer Rechnung

$$\mathcal{M}\mathcal{L}u = \frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{M}\mathcal{L}u' = \mathcal{T}_+ \begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

Daraus ergibt sich dann (7.15) für spezielle Testfunktionen $(v_0, V)^\top \in X$. Da die Bilinearform und die Operatoren \mathcal{T}_\pm stetig sind und diese Testfunktionen dicht in X liegen (längere Rechnung), folgt die erste Aussage.

Die Rückrichtung folgt letztlich analog zur eindimensionalen PML durch analytische Lösung in $H^+(S^1)$. Mit Hilfe des Grenzwertsatzes der Laplace-Transformation

$$\begin{aligned} u(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(\mathcal{L}u)(s) = \lim_{z \rightarrow 1} i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1} (\mathcal{L}u)(m_{\kappa_0}(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} i\kappa_0 (z+1) (\mathcal{M}_{\kappa_0} \mathcal{L}u)(z) = 2i\kappa_0 \hat{U}(1) = 2i\kappa_0 \frac{1}{2i\kappa_0} (u_0 + 0U(1)) = u_0 \end{aligned}$$

ist die erste Komponente aus X genau der Dirichlet-Wert an der Stelle 0. Daraus folgt dann die Behauptung.

Die Details finden sich in [Nan08]. □

Eine Diskretisierung von (7.15) ist sehr einfach. Wir wählen die Monome $\Pi_N := \{z \mapsto z^j, z = 0, \dots, N\} \subset H^+(S^1)$ als Diskretisierung des Hardy Raumes. Wegen $q(b_j, b_k) = \delta_{j,k}$ für Monome b_j, b_k führt eine Diskretisierung der Bilinearform q auf die

Einheitsmatrix. Bleiben die Operatoren \mathcal{T}_\pm . Als lineare Operatoren von $\mathbb{C} \times \Pi_N \rightarrow \Pi_{N+1}$ sind diese gegeben durch die Matrizen

$$\mathcal{T}_\pm^{(N)} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \pm 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+2) \times (N+2)}. \quad (7.21)$$

Insgesamt ergibt sich somit eine Diskretisierung von (7.15) durch

$$\left((-2i\kappa_0)\mathcal{T}_+^{(N)\top} \mathcal{T}_+^{(N)} - \omega^2 \frac{2i}{\kappa_0} \mathcal{T}_-^{(N)\top} \mathcal{T}_-^{(N)} \right) \begin{pmatrix} u_0 \\ \underline{U}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{DtN } g_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

Gibt es ein Innenraumgebiet, so wird dieses wie üblich über den Randfreiheitsgrad u_0 bzw. v_0 mit der Aussenraumdiskretisierung zusammengekoppelt. Der Term auf der rechten Seite hebt sich dann mit dem entsprechenden Randterm der Innenraumformulierung auf.

Die Konvergenztheorie geht in einer Dimension vollständig analog zur PML-Konvergenztheorie mit Hilfe einer Gårding Ungleichung. Der Projektionsfehler von $U \in H^+(S^1)$ durch Projektion in Π_N wird exponentiell in N klein, da

$$U(z) = -u_0 \frac{\kappa_0 - \omega}{\kappa_0 + \omega} \frac{1}{1 - \frac{\kappa_0 - \omega}{\kappa_0 + \omega} z} = -u_0 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa_0 - \omega}{\kappa_0 + \omega} \right)^{j+1} z^j, \quad z \in S^1.$$

und da $|\frac{\kappa_0 - \omega}{\kappa_0 + \omega}| < 1$ aufgrund der Polbedingung. Wir erhalten somit exponentielle Konvergenz in der Anzahl der Freiheitsgrade im Aussenraum. Zum Vergleich: Bei der PML konvergiert der Abschneidefehler exponentiell, aber der Finite-Elemente Diskretisierungsfehler nur mit h^p .

In mehreren Dimensionen wird's ein wenig komplizierter. Prinzipiell lässt sich aber wie bei der PML die Methode über radiale oder kartesische Konstruktionen auf zwei bzw. drei Dimensionen verallgemeinern.

Literaturverzeichnis

- [Alt99] ALT, Hans W.: *Lineare Funktionalanalysis: eine anwendungsorientierte Einführung*. Third. Berlin : Springer-Verlag, 1999
- [AS64] ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A.: *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. Bd. 55: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964. – xiv+1046 S.
- [Ber94] BERENGER, Jean-Pierre: A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. In: *J. Comput. Phys.* 114 (1994), Nr. 2, S. 185–200
- [BP13] BRAMBLE, James H. ; PASCIAK, Joseph E.: Analysis of a Cartesian PML approximation to acoustic scattering problems in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 . In: *J. Comput. Appl. Math.* 247 (2013), 209–230. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2012.12.022>. – DOI 10.1016/j.cam.2012.12.022. – ISSN 0377–0427
- [BS08] BRENNER, Susanne C. ; SCOTT, L. R.: *Texts in Applied Mathematics*. Bd. 15: *The mathematical theory of finite element methods*. Third. Springer, New York, 2008. – xviii+397 S. <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0>. – ISBN 978–0–387–75933–3
- [CK98] COLTON, David ; KRESS, Rainer: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 93: *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Second. Berlin : Springer-Verlag, 1998. – xii+334 S. – ISBN 3–540–62838–X
- [DL90] DAUTRAY, Robert ; LIONS, Jacques-Louis: *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*. Vol. 3. Berlin : Springer-Verlag, 1990. – x+515 S. – Spectral theory and applications, With the collaboration of Michel Artola and Michel Cessenat, Translated from the French by John C. Amson
- [GGK90] GOHBERG, Israel ; GOLDBERG, Seymour ; KAASHOEK, Marinus A.: *Operator Theory: Advances and Applications*. Bd. 49: *Classes of linear operators*. Vol. I. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990. – xiv+468 S. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-7509-7>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-7509-7>. – ISBN 3–7643–2531–3
- [HS96] HISLOP, P. D. ; SIGAL, I. M.: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 113:

- Introduction to spectral theory*. New York : Springer-Verlag, 1996. – x+337 S. – With applications to Schrödinger operators
- [Ihl98] IHLENBURG, Frank: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 132: *Finite element analysis of acoustic scattering*. New York : Springer-Verlag, 1998. – xiv+224 S. – ISBN 0–387–98319–8
- [KP09] KIM, Seungil ; PASCIAK, Joseph E.: The computation of resonances in open systems using a perfectly matched layer. In: *Math. Comp.* 78 (2009), Nr. 267, 1375–1398. <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-09-02227-3>. – DOI 10.1090/S0025-5718-09-02227-3. – ISSN 0025-5718
- [KP10] KIM, Seungil ; PASCIAK, Joseph E.: Analysis of a Cartesian PML approximation to acoustic scattering problems in \mathbb{R}^2 . In: *J. Math. Anal. Appl.* 370 (2010), Nr. 1, 168–186. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.05.006>. – DOI 10.1016/j.jmaa.2010.05.006. – ISSN 0022-247X
- [Kre99] KRESS, Rainer: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 82: *Linear integral equations*. Second. New York : Springer-Verlag, 1999. – xiv+365 S. – ISBN 0–387–98700–2
- [Kre02] KRESS, R.: Chapter 1.2.1 - Specific Theoretical Tools. Version: 2002. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/B978-012613760-6/50004-8>. In: SABATIER, Roy P. (Hrsg.): *Scattering*. London : Academic Press, 2002. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/B978-012613760-6/50004-8>. – ISBN 978-0-12-613760-6, 37 - 51
- [Nan08] NANNEN, Lothar: *Hardy-Raum Methoden zur numerischen Lösung von Streu- und Resonanzproblemen auf unbeschränkten Gebieten*. Der Andere Verlag, Tönning, University of Göttingen, Diss., 2008
- [SZ99] SJÖSTRAND, Johannes ; ZWORSKI, Maciej: Asymptotic distribution of resonances for convex obstacles. In: *Acta Math.* 183 (1999), Nr. 2, S. 191–253