PROFİNİTE GRUPLAR

Wolfgang Herfort, Sema Alıcı ve Berna Çınar

20 Ocak 2012

Özet

Grupların ve sonlu kümelerin *projektif limitleri* anlatıldı. Galoisteorisi bir cismin Galoisgrubunun tasvirini mümkün kılar ki normal geliştirmelerin sonsuz serileri bir profinite grup olarak tanımlanır. Profinite gruplar da sonlu grupların sahip olduğu benzer özelliklere sahiptir; Örneğin, her profinite grubun her p asal sayısı için bir p-Sylow-alt grubu vardır. Her bir çözülebilen grubun (çözülebilen sonlu grupların projektif sisteminin projektif limitleri) bütün asal sayıların her bir kümesi π için π-Hall-alt grubu vardır. Bir (ayrık) grup *profinite* topoloji ile topoloji grubu olarak görülebilir. Dolayısıyla sonlu indekslerin bütün normal bölenleri birin komşuluğunu bir taban olarak seçilir. Bir grup tamamlanabilir ve böylece profinite tamamlamayı elde edebilir. Bir *serbest profinite grup* bir serbest grubun profinite tamamlamasıdır. Bu amalgamated product ve HNN-Extention' ın (Higman-Neumann-Neumann) özel bir durumudur. Profinite grupların kohomolojisi hakkında incelenmez.

İçindekiler

1 Projektif limitler

Tanım 1 *$(I, \leq)$ kısmi ve sıralı bir küme olsun ‚$\leq$'. Böylece ‚$\leq$' yansıma, asimetri ve geçişli bir orantıdır ve her indeks $i, j \in I$ k için sağlar, bu yüzden $i \leq k$ ve $j \leq k$ geçerlidir. Her $i \in I$ X_i bir küme olsun; kabul edelim ki bütün $i \leq j$ için geçerlidir: ϕ_{ji} bir dönüşüm, bu yüzden her bir indeks $k \leq j \leq i$ için diyagram*

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "\phi_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_{ik}"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_{jk}"] \\
& X_k &
\end{tikzcd}$$

değişmelidir.

Aşağıdaki diyagram basit bir örneği gösterir:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & & ? \arrow[dlll, dotted] \\
 & & & & & 6 \arrow[dl] & \cdots \arrow[l] & (1,2,3,4,5,6,6,\ldots) \\
 & & & & 5 \arrow[dl] & 5 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & (1,2,3,4,5,5,\ldots) \\
 & & & 4 \arrow[dl] & 4 \arrow[l] & 4 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & (1,2,3,4,4,\ldots) \\
 & & 3 \arrow[dl] & 3 \arrow[l] & 3 \arrow[l] & 3 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & (1,2,3,3,\ldots) \\
 & 2 \arrow[dl] & 2 \arrow[l] & 2 \arrow[l] & 2 \arrow[l] & 2 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & (1,2,2,\ldots) \\
1 & 1 \arrow[l] & 1 \arrow[l] & 1 \arrow[l] & 1 \arrow[l] & 1 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & (1,1,\ldots)
\end{tikzcd}$$

Bu örnekte $I = \mathbf{N}$ doğal sayılar kümesidir ve ‚$\leq$' doğal sıralamadır. Her bir $i \in \mathbf{N}$ için $X_i := \{1, 2, \ldots, i\}$ sahibiz ve oklar her bir dönüşüm ϕ_{i+1i} için kullanılmaktadır. Örneğin $\phi_{43}(4) = 3$, $\phi_{43}(i) = 3$ için $i \geq 3$ ve $\phi_{43}(i) = i$ için $i < 4$ geçerlidir.

Tanım 2 $(I, \leq)$ sisteminin *projektif limitini* tanımlamak için, bu şekilde devam ediyoruz:

1. Kartezyen çarpımları oluşturalım $P := \prod_{i \in I} X_i$ (dönüşümlerdir $f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ ile $f(i) \in X_i$).

2. Projektif limitler $X := \varprojlim_{i \in I} X_i$ P' nin alt kümesidir ki bunlar f' nin elemanlarından oluşur, her bir $j \leq i$ $\phi_{ij}(f(i)) = f(j)$ sağlar.

3. Dönüşümler $\phi_i : P \to X_i$, için $\phi_{ij}\phi_i = \phi_j$ her bir indeks $j \leq i$, *kanonik projeksiyon* denir.

Teorem 3 *Bir küme X hakkındaki aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:*

- *X sonlu kümelerin sisteminin projektif limitidir.*
- *X sonlu kartezyen çarpımlarının kapalı alt kümesidir, bununla beraber ayrık topoloji sağlayan X_j kümelerdir.*

Böylece X bir *profinite gruptur* yada aynı zamanda boole uzayıdır.

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi $X_i = \{1, 2, \ldots, i\}$ kümeler, X' in elemanları (f_i) serilerdir, bunlar için $1 \leq f(i) \leq i$ ve $\varprojlim_{i \in \mathbf{N}} X_i$ $(1, 2, 3, 4, \ldots, i, i, i, i, \ldots)$ serilerden $i \in \mathbf{N}$ için $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ özel seri gibi oluşmaktadır. Görüldüğü gibi $\varprojlim_{i \in \mathbf{N}} X_i$ küme ile $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ Alexandrov-Kompaktlaştırması olarak tanımlanabilir.

Projektif sisteminin (X_i, ϕ_{ij}) projektif limiti $\varprojlim_i X_i$ bir *evrensel özelliği* sağlar: Eğer Z profinite uzay ise ve sürekli dönüşüm $\psi_i : Z \to X_i$ var ise, bu yüzden her bir indeks için $i \leq j$ diyagramlar

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "\psi_i"] \arrow[dr, dotted, "\omega\exists!"] \arrow[ddrr, bend right, "\psi_j"'] & & \\
& \varprojlim_k X_k \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[dr, "\phi_j"'] & X_i \arrow[d, "\phi_{ij}"] \\
& & X_j
\end{tikzcd}$$

değişir, o halde kesin bir *evrensel dönüşüm* ω vardır, bu yüzden $\phi_i \omega = \psi_i$ her bir $i \in I$ içindir.

Soru 4 *Diyagramı inceleyelim*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
& & & 0000\ldots \arrow[dl] \\
& & 000 \arrow[dl] & 0001\ldots \arrow[l] \\
& 00 \arrow[ddl] & & 0010\ldots \arrow[dl] \\
& & 001 \arrow[ul] & 0011\ldots \arrow[l] \\
0 & & & \\
& & 010 \arrow[dl] & 0100\ldots \arrow[l] \\
& 01 \arrow[uul] & & 0101\ldots \arrow[ul] \\
& & 011 \arrow[ul] & 0110\ldots \arrow[l] \\
& & & 0111\ldots \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Bu diyagram sayesinde bir projektif sistemi ve özellikle ϕ_{ij} ' i nasıl tanımlanır?

Soru 5 *$X = \varprojlim_i X_i$ ve hiç bir X_i boş olmasın. Aşağıdaki iddiaları ispatlayın:*

1. *X boş değildir.*

2. *Her bir nokta $x \in X$ ve her bir x' in komşuluğu U için bir indeks $i \in I$ vardır bu yüzden x' in $\phi_i^{-1}(\phi_i(x))$ bir kapalı - açık komşuluğudur ki bunlar U' da bulunmaktadır.*

3. *Her bir alt küme $A \subseteq X$ için A' nın kapanışı $\bar{A} = \bigcap_{i \in I} \phi_i^{-1}\phi_i(A)$ eşittir.*

   Eğer ψ_{ij}' nin kısıtlaması ϕ_{ij} üzerinde $\phi_i(A)$' yı gösterirse, o zaman $(\phi_i(A_i), \psi_{ij})$ bir projektif sistemdir. $A = \varprojlim_i \phi_i(A_i)$ olduğunu gösterin.

Soru 6 *(Vietoris-Topoloji) Bir profinite uzayı için $X = \varprojlim_i X_i$ $C(X)$ X' in kapalı boş olmayan alt kümelerinin kümesidir. Sürekli dönüşüm için $f : X \to Y$ tanımlansın $C(f) : C(X) \to C(Y)$ $C(f)(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$. Dönüşüme $C(-)$ functor denir. Projektif sistem elde edilir $(C(X_i), C(\phi_{ij}))$. $C(X) = \varprojlim_i C(X_i)$ olduğunu ispatlayın. $C(X)$' in alt kümeleri $W(U_1, \ldots, U_n)$, bunun yanında $n \in \mathbf{N}$ ve U_i X' in herhangi kapalı-açık alt kümesidir, bunun yanı sıra*

$$W(U_1, \ldots, U_n) := \{C \in C(X) \mid C \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_j \ \wedge \ C \cap C_j \neq \emptyset, \ j = 1, \ldots n\}$$

Vietoris-Topolojinin *bir tabanını oluşturur.*

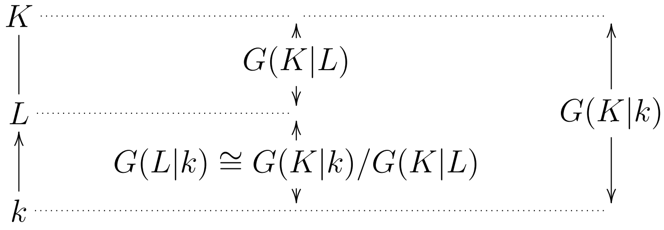
Örnek 7 k bir cisim ve I k' nın bütün sonlu Galois-geliştirmelerinin kümesi olsun. I üzerinde bir orantı $K \leq L$ ancak ve ancak $k \subseteq K \subseteq L$ tanımlansın. ,$\leq$' kısmi sıralama denir. Bilindiği gibi k' nın bütün sonlu Galois-geliştirmelerin K ve L bir sonlu Gelois-geliştirmesi M ile $K \leq M$ ve $L \leq M$ vardır. Böylece ,$\leq$' bir kısmi sıralamadır.

Lemma 8 *X_i bir grup ise ve bütün ϕ_{ji} homomorfizmler ise bu yüzden üzerinde $X = \prod_i X_i$ bir grupoperatörü tanımlanabilir bu da gösterir ki X bir topoloji grubu ve kanonik projeksiyonlar sürekli homomorfizmlerdir. Projektif limit $X = \varprojlim_i X_i$ P' nin bir kapalı alt grubudur.*

İspat: Çarpım $P := \prod_{i \in I} X_i$ bir operatörlerden $(x_i)(y_i) := (x_i y_i)$ oluşan bir gruptur. Görüldüğü gibi eğer P bir çarpım topolojisine sahipse operatörler süreklidir. İkinci iddia grup çarpımının sürekliliğini gösterir.

Örnek 9 k cisminin bütün sonlu Galois-geliştirmelerini örnek 7' deki gibi belirtelim. $G(K|L)$ L' nin bir Galois-geliştirmesi K bir Galois-grubu olsun.

Galois' in teoremi şöyle der: $G(L|k)$ $G(K|k)/G(K|L)$ izomorfdur.



Bu da $K \leq L$ ($L \subseteq K$) bir kanonik homomorfizmi $\phi_{KL} : G(K|k) \to G(L|k)$ gösterir. Projektif sistemin $(G(K|k), \phi_{LK})$ projektif limiti $\varprojlim_K G(K|L)$ olarak algılanır. $\hat{k} := \bigcup_K K$ olsun. $\hat{k}$ bir cisim cebirsel ve k' nın normal geliştirme olduğu anlaşılır. Galoisgrup $G(\hat{k}|k)$ kesin projektif limittir $\varprojlim_K G(K|L)$.

Eğer diyagramda K yerine $\hat{k}$ yazarsak, görürüz ki: $G(\hat{k}|L)$ $G(\hat{k}|k)$' nin normal bölenlerinin sonlu indeksleridir. *Krull-Topoloji* bütün grupların $G(K|L)$ birin komşuluğu olarak tanımlar. Gösterilebilir ki $G(\hat{k}|k)$ bir profinite grup ve projektif limitlerin oluşumu olarak "uygundur".

Soru 10 Bir profinite grup G için bir küme $\mathcal{N}$ tanımlayalım. $\mathcal{N}$ bütün açık normal bölenlerin kümesi olarak tanımlansın ve bir sıralama ,$\preceq$' verilsin, $N \leq M$ ancak ve ancak M N' nin bir alt grubudur. Gösteriniz:

1. Bütün $N \in \mathcal{N}$ kapalıdır.
2. $(\mathcal{N}, \preceq)$ sıralı kümedir.
3. $\phi_N : G \to G/N$ bir kanonik homomorfizmi göstersin. Bağlı homomorfizmler $\phi_{NM} : G/M \to G/N$ (yanı sıra N M' i içersin) bir projektif sisteme $(G/N, \phi_{NM})$ sonlu gruplar olma fırsatını verir ve $G = \varprojlim_N G/N$ dir.

Soru 11 İspatla, profinite grup G için kapalı alt gruplar $C(G)$' nin kapalı alt kümesi $S(G)$' yi oluşturur. G' nin bir açık normal bölenleri N ve bir sonlu alt kümesi Y için $W(N) := \{S \in S(G) | SN = \langle Y \rangle N\}$ olsun. İspatla ki kümeler $W(Y, N)$ $S(G)$ üzerinde bir bağlı Vietoris-Topolojinin tabanını oluşturduğunu.

2 Profinite gruplar "büyük" sonlu gruplardır

Sonlu p-grupların (p asal) projektif sisteminin (G_i, ϕ_{ij}) projektif limitine pro-p-grup denir. Bir profinite grup G pro-p dir ancak ve ancak G/N her bir açık normal bölenleri N sonlu p-grup ise.

Soru 12 4. soruya dönelim. Her bir doğal sayı n' yi şu şekilde yazabiliriz

$$n = a_0 2^0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + \dots$$

$a_j \in \{0, 1\}$ (ikilik sistem). Genellikle $n = \cdots a_2 a_1 a_0$ yazılır, örneğin $5 = 1 + 4 = 101$. Toplamayı modül 4' e yada genel olarak modül 2^k nasıl yazabilinir? 4. sorudaki diyagramı sonlu 2-grubun projektif sistemi olarak yorumlanabilir mi?

Örnek 13 $\mathbf{Z}_2$ ifadelerin kümesi olsun

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^j$$

(önce seri $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ olarak tanımlayalım.) $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ ve $(b_0, b_1, b_2, \dots)$ toplamını tanımlamak için alışılmış algoritma olan ikili toplamayı kullanırız. Başlangıç olarak $r_{-1} := 0$ tanımlarız. $n = 0, 1, 2, \dots$ için $c_n := a_n + b_n + r_{n-1} \pmod 2$ ve $r_n := (a_n + b_n + r_{n-1} - c_n)/2$ tanımlarız. Görüldüğü üzere her doğal sayı $n = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \dots$ bir sonlu seriye benzer ve $\mathbf{N}$ üzerindeki $\mathbf{Z}_2$-toplama alışılmış toplama ile aynıdır. Bir geometrik dizinin formal yazılımı

$$-1 = \frac{1}{1-2} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j$$

belirtir, $\mathbf{Z}$' i $\mathbf{Z}_2$' nin alt grubu olarak nasıl yorumlanabilir. Bunu açıklamak için $\mathbf{Z}_2$' yi projektif limit olarak tasvir edilmelidir. Bunun için bir projektif sistem (C_{2^i}, ϕ_{ij}) belirleyelim, yanında $\phi_{i+1i}\ C_{2^{i+1}} \to C_{2^i}$ kanonik epimorfizmidir. Yukarıdaki hesaplama C_{2^i} olarak

$$-1 \equiv 2^i - 1 = \sum_{j=0}^{i-1} 2^j$$

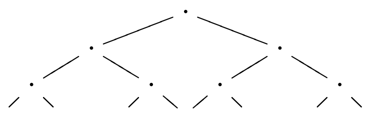
okunur. Dolayısıyla sonsuz geometrik dizi bir $\varprojlim_i C_{2^i}$ açıklamasıdır. Böylece her sayı $z \in \mathbf{Z}$ bir formal gösterim içerir

$$z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^j$$

ve $z \pmod{2^i} = \sum_{j=0}^{i-1} a_j 2^j$. Kolayca görülür ki $z \in \mathbf{Z}$ için sahip olduğu seri $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ periyodiktir. Ayrıca diğer formal seriler de bir $\varprojlim_i C_{2^i}$ gösterime sahiptir. Bu sebeptendir ki neden $\mathbf{Z}_2 = \varprojlim_i C_{2^i}$ dir.

Genel olarak her sabit asal sayı p için $\mathbf{Z}_p = \varprojlim_i C_{p^i}$, $\phi_{i+1i}\ C_{p^{i+1}} \to C_{p^i}$ kanonik epimorfizmidir. $\mathbf{Z}_p$ bütün p-adik sayılarının halkası olarak tanımlansın. Bu bir *pro-p-halka* için örnektir.

Örnek 14 (Kranzçarpımı ve otomorfizmalar) Bir ikili ağaç için (şekilde bulunan noktalar *düzlemler* içindir 1,2, ve 3.)



otomorfizmalar grubu tanımlanabilir: G_n otomorfizmalar grubunun ağacının derinliği n ise, o zaman otomorfizmaları oluştururuz ki bu $n+1$. düzlemde oluşan kenarların bir alt grubu $V_n := C_2 \times C_2 \ldots \times C_2$, 2^n faktörün (direkt 2^n kenarlardır ki çiftlerden oluşur böylece bazılarının değiştirilmesine izin verilir) yer değistirmesidir. Anlaşılır ki $G_1 = \{1\}$, $G_2 = C_2$, $G_3 = (C_2 \times C_2) \rtimes C_2$, $G_4 = (((C_2 \times C_2) \rtimes C_2) \times (C_2 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$; veya kısaca $G_3 = C_2 \wr C_2$, $G_4 = (C_2 \wr C_2) \wr C_2$, vs.

Sonuç olarak $G_{n+1} = V_n \rtimes G_n$ yarı doğru çarpımıdır. Orataya (G_n, ϕ_{kn}) projektif sistem çıkar burada $\phi_{k+1,k}\ G_{k+1} \to G_k$' nın (çekirdeği V_k ile) bir kanonik epimorfizmidir. Ağacın otomorfizmalargrubu bu sistemin projektif limitidir. Gösterilebilir ki her bir pro-2 grup bir yoğun alt grup ile ki bu sayılamayan kümeden oluşmamıştır G' nin bir alt grubudur.

Bir asal sayı p için konstruksiyon benzerdir. Yerleştirme sonucu geçerlidir.

Teorem 15 *(Sylow) p bir asal sayı olsun. Her bir profinite grup bir maksimal pro-p alt grubu içerir. G' nin her iki maksimal pro-p alt grubu konjugedir.*

İspat: G pro-p grup ise o zaman ispatlanması gereken hiç bişey yoktur. Kabul edelim ki G bir pro-p grup olmasın. Soru 11 G' nin bütün kapalı alt gruplarının kümesini $C(G)$' nin kapalı alt kümesi olarak gösterir. Sonuç olarak pro-p alt grupların alt kümesi $S_p(G)$ $C(G)$' nin kapalı alt kümesidir. G' nin aslında bir pro-p grubu olmadığı varsayımı bir kapalı alt grubun $S \leq G$ ve bir açık normal bölenlerin N varlığını anlatır bu yüzden $\langle S \rangle N/N$ bir sonlu p-grup değildir. Bütün gruplar $T \in W(S,N)$ $SN = TN$' i uygularlar ve TN/N böylece bir sonlu p-grup değildir. Bu da gösterir ki $S_p(G)$' nin bütünleyicisi açıktır.

$S_p(G)$' nin maksimal elemanlarının varlığını ispatlamak için Zorn lemmasını ve sıralamayı ,$\subseteq$' kullanırız. Küme $S_p(G)$ boş olamaz $\langle 1 \rangle$' i içerdiği için. $\{S_i\}$ $S_p(G)$' nin içerdiği grupların yükselen serisi olduğunu varsayalım ki bu da $S_p(G)$' nin içerdiği birikim noktası S' ye sahiptir. Anlaşılıyor ki $S_i N = SN$

I' nin bir cofinal alt kümesi için ve G' nin bir sabit açık normal bölenidir N. SN/N bir p-grup ve $S = \varprojlim_S N/N$ S_i' yi içeren pro-p-grup olduğu için dolayısıyla maksimal elemanı vardır ki *p-Sylow-alt grupları.*

Her iki maksimal pro-p-alt gruplar H ve K konjuge olduğunu ispatlamak için bir açık normal bölen N için değişmeli diyagram oluşturalım

$$\begin{tikzcd} S_p(G) \arrow[r] \arrow[d] & S_p(G/N) \arrow[d] \\ S_p(G)/G \arrow[r] & S_p(G/N)/G/N \end{tikzcd}$$

Burada $S_p(G)/G$ ve $S_p(G/N)/G/N$ G' nin üzerinde konjugasyon tarafından sonuçlanan etki bölüm uzayıdır. Sylow teoreminden bildiğimiz gibi $S_p(G/N)/G/N$ sadece bir nokta içerir ki bu p-Sylow alt gruplarının konjugasyonsınıfına eşittir. Sonuç olarak $S_p(G)/G$ bu sistemin projektif limitidir ve maksimal pro-p alt grubunun sadece bir konjugasyonsınıfını da içerir.

Soru 16 (Schur-Zassenhaus) Bir sonlu grup G ve normal bölenler $N \lhd G$ için $|N|$ $|G/N|$' i bölmez, bir *bütünleyici* $H \leq G$ vardır, böylece $G = N \rtimes H$ yarı çarpımdır.

(J. Thompson – O. H. Kegel – A. I. Kostrikin) Bütün $h \in H \backslash \langle 1 \rangle$ ve $n \in N$ için denklem $n^h = n$ sağlarsa ki $n = 1$ (H' yi N üzerinde sabit noktalar olmadan oluşan konjugasyon olarak söylenebilir) o zaman bir sayı c vardır böylece N en çok nilpotentsınıfı c' ye sahiptir ve c sadece H' ye bağlıdır. Aynı iddiaları profinite gruplar için tanımlayınız ve ispatlayınız.

Tanım 17 G bir profinite grup ve Π asal sayıların kümesi olsun. Π-*Hall-Sistem* G' nin p-Sylow-alt gruplarının $\{G_p \mid p \in \Pi\}$ kümesi olsun böylece $G_p G_q = G_q G_p$ $p, q \in \Pi$ için geçerlidir. $G_\Pi = \prod_{p \in \Pi} G_p$ bir maksimal alt grubudur ve en çok Π deki asal sayılar için basit olmayan pro-p-alt gruplarıdır. Buna G' nin Π-*Hall-alt grubu* denir.

Çözülebilir sonlu grup G için aşağıdaki önermeler geçerlidir:

- Bir Π-Hall-Sistemi vardır.
- G deki bütün Π-Hall-alt grupları konjugedir .
- Bir Π-*Sistemnormalleştirici* verilen sistemde vardır bu G' nin $K \neq \{1\}$ alt grubudur böylece her bir $p \in \Pi$ ve her $k \in K$ için $G_p^k = G_p$ geçerlidir.

Soru 18 G bir *pro-çözülebilen* grup olsun yani sonlu çözülebilen grupların bir projektif limitidir. Bu önermeyi G için ispatlayın.

Soru 19 G bir pro-çözülebilen grup ve p asal sayıların $\Pi(G)$ kümesi olsun böylece G bir sonsuz p-Sylow-alt grup $G_p \neq \langle 1 \rangle$ içerir. İspatlayınız ki G'nin bir kapalı abel alt grubu A vardır bunun yanı sıra $\Pi(A)$ sonsuzdur. Son olarak bir pro-çözülebilen grup G, her elemanından bir sonlu alt grup oluşur, $\Pi(G)$ sonlu bir kümedir.

Herhangi bir G profinite torsiyon grubu için aynı sonuç bilinir (W. Herfort). Bu sonucun bir sonucu: Her kompakt torsiyon grup G sonlu $\Pi(G)$' ye sahiptir. E. Zelmanov gösterdi ki her bir pro-p-torsiyon grup *yerel sonludur* (yani her sonlu alt küme sonlu alt grubu oluşturur) ve J. S. Wilson hem bu sonucu hem de bütün sonlu grupların sınıflandırılmasını kullanarak gösterdi ki her bir profinite torsiyon grup yerel sonludur.

3 Herhangi bir grubun profinite tamamlaması

Bir grup G için G' nin bütün normal bölenlerinin N sonlu indeks $|G : N|$ ile kümesi $\mathcal{N}$' yi tanımlayalım. $\mathcal{N}$ filtre tabanlı özelliğe sahip olduğu için birin komşuluğunun filtre tabanı olarak algılanabilir. $g \in G$ için $\{gN | N \in \mathcal{N}\}$ bir filtre tabanıdır. Bu sayede G bir *topoloji grubu* olacaktır. Buna G üzerindeki *profinite topoloji* denir.

Örnek 20 Bir kaç örnek gösterelim:

1. $G = \mathbf{Z}$ tam sayıların additive grubu olsun. Her alt grup N sonlu ideks ile bu şekle $n\mathbf{Z}$ sahiptir, n positif sayıdır. Eğer $x \neq y$ $\mathbf{Z}$' nin elemanı değilse o zaman bir $m \in \mathbf{Z}$ positif sayı vardır böylece $x - y$ m' yi bölmez. Böylece x ve y açık komşuluklara $x + m\mathbf{Z} := \{x + km \mid k \in \mathbf{Z}\}$ ve $y+m\mathbf{Z}$ ve $(x+m\mathbf{Z})\cap(y+m\mathbf{Z}) = \emptyset$ sahiptir. Dolayısıyla $\mathbf{Z}$ bir Hausdorff uzayıdır.

   H. Fürstenberg' in(1955) profinite topoloji için güzel bir uygulaması vardır. Bunu göstermek için asal sayılar kümesi sonsuzdur:

   P bütün asal sayıların kümesi olsun ve varsayalım ki P sonlu olsun. Her küme $p\mathbf{Z}$ açık-kapalıdır ve $\bigcup_{p\in P} pZ = \mathbf{Z} \setminus \{-1, 1\}$ kapalıdır − Çelişki.

2. G bir *residual sonlu* grup olsun yani bütün $g \in G\setminus\langle 1 \rangle$ için sonlu ideksler ile $g \notin N$ G' nin normal bölenleri N vardır. Buna sonlu indeksli G' nin bütün normal bölenlerinin kesişimi basit olduğuna eşdeğerdir.

   Bu sayede her bir grup için G' nin *residual sonlu* ve profinite topolojinin Hausdorff olması birbirine eşdeğerdir: Eğer $x \neq y$ G' nin elemanları ve N $xy^{-1} \notin N$ ile açık normal bölenleri ise o zaman $xN \cap yN = \emptyset$ geçerlidir.

$\mathbf{Z}$ ve genel, serbest ve procyclical gruplar örneklerdir.

3. G basit bir sonsuz grup olsun. Bu yüzden $\mathcal{N} = \{G\}$ geçerlidir.

Soru 21 Bir grup G için $\mathcal{N}$ G deki sonlu indeks ile bütün normal bölenlerin kümesi olsun. $\mathcal{N}$ üzerinde bir sıralama tanımlayalım: $M, N \in \mathcal{N}$ için $M \preceq N$' i tanımlayalım eğer $N \leq M$ ise. $\prec$ bir sıralı sıralama olduğunu ispatlayın.

Soru gösteriyor ki kümenin $\{G/N \mid N \in \mathcal{N}\}$ bir projektif sistem $(G/N, \phi_{NN'})$ olduğunu yanı sıra kanonik epimorfizmaları $\phi_{NN'} : G/N \to G/N'$, $N' \preceq N$ için $\phi_{NN'}(gN) := gN'$ aracılığıyla tanımlanır. Projektif limite

$$\hat{G} := \varprojlim_N G/N$$

G' nin *profinite tamamlaması* denir ve aşağıdaki evrensel özelliği sağlar: Bir homomorfizm $\phi : G \to \hat{G}$ vardır böylece $\phi(G)$ $\hat{G}$ de yoğundur ve her bir profinite grup H ve her homomorfizm $f : G \to H$ için kesin bir sürekli homomorfizm vardır $\hat{f} : \hat{G} \to H$ bu yüzden diyagram

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & \hat{G} \arrow[dl, dotted, "\hat{f}"] \\ H & \end{tikzcd}$$

değiştirilir.

H herhangi bir kompakt grup ise o zaman grup G' nin bir *Bohr-Kompaktlaştırması* βG vardır (Örneğin S.430 [1] de). $\hat{G}$' in bölüm grubu $\beta G/\beta G_0$ olduğunu göstermek kolaydır bunun yanı sıra βG_0 βG deki 1' in bağlantılı bileşenidir.

Örnek 22 20 deki örneklere geri dönelim.

1. $\mathbf{Z}$' nin profinite tamamlaması $\hat{\mathbf{Z}}$ *Hensel sayılar* olarak bilinmektedir.

2. Bir grup residual sonludur ancak ve ancak ϕ injektif ise. Grup $\widehat{F(x, y)}$ serbest profinite grup olarak adlandırılır, $\{x, y\}$ aracılığıyla serbest oluşur.

3. Üçüncü örnekte $\hat{G} = \langle 1 \rangle$ dir.

Sonlu gruplardan bir kategori $\mathcal{C}$, ki o pullbackslere (subdirectly çarpımlara) izin verir ve eğer H' nin normal bölenleri $H \in \mathcal{C}$ ve K' yi içerirse o zaman ona *formasyon* denir.

Örneğin p-gruplar (yada çözülebilen gruplar) bir formasyon oluşturur.

Sonlu gruplardan bir formasyon için önceki yapıları tekrarlıyabiliriz ve pro-$\mathcal{C}$ tamamlamayı tanımlayabiliriz:

G herhangi bir grup ve G' nin bütün normal bölenlerinin N kümesi $\mathcal{N}_\mathcal{C}$ olsun böylece $G/N \in \mathcal{C}$ geçerli olur.

M, N G' nin $\mathcal{N}_\mathcal{C}$ deki normal bölenleri olsun. Bir pullback P (subdirectly çarpım) vardır

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dotted, "\omega"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& P \arrow[r] \arrow[d] & G/N \arrow[d] \\
& G/M \arrow[r] & \langle 1 \rangle
\end{tikzcd},$$

yani $P = G/M \cap N \in \mathcal{C}$ ve $M \cap N \in \mathcal{N}$. $\mathcal{N}_\mathcal{C}$ üzerinde $M \preceq N$ aracılığıyla bir sıralama tanımlayalım sadece ve sadece $N \leq M$ geçerli ise. Böylece $(\mathcal{N}_\mathcal{C}, \preceq)$ sıralı bir kümedir ve G' nin *pro-$\mathcal{C}$-tamamlaması* $\hat{G}_\mathcal{C}$' yi oluşturabiliriz.

Örnek 23 Formasyon için bazı örnekler:

- p bir asal sayı ise o zaman p-grupları bir formasyon oluşturur. Bir grup G için *pro-p-tamamlamayı* elde ederiz.

  $\mathbf{Z}$' nin pro-2-tamamlaması örnek 13 de oluşturuldu.

- Eğer Π asal sayıların bir kümesi ise o zaman sonlu gruplar G $\Pi(G) \subseteq \Pi$ ile bir formasyon oluşturur.

- Bütün çözülebilen gruplar bir formasyon oluşturur. *Pro-çözülebilen tamamlama* elde edilir.

Soru 24 (profinite tamamlama) G ve $\mathcal{C}$ için pro-$\mathcal{C}$-tamamlamayı tanımlayın:

1. $G = \mathbf{Q}$ (rasyonel sayılar) ve $\mathcal{C}$ bütün sonlu gruplar olsun;

2. $G = C_2$ ve $\mathcal{C}$ bütün sonlu 3-gruplar olsun;

3. $G = C_2 * C_4$ (serbest çarpım) ve $\mathcal{C}$ bütün sonlu 5-gruplar olsun;

4. $G = F(x, y)$ (serbest gruplar $\{x, y\}$ küme aracılığıyla oluşmuştur) ve $\mathcal{C}$ bütün sonlu nilpotent gruplar olsun;

5. $G = \langle x, t \mid t^{-1}x^2t = x^4 \rangle$ ve $\mathcal{C}$ bütün sonlu 2-gruplar olsun.

Soru 25 *W. Burnside* (1902) problemi: Eğer $n \in \mathbf{N}$ ve G bir sonlu oluşturulan grup ise böylece bütün elemanları $g \in G$ $g^n = 1$ uygularsa (yani G sonlu üse sahiptir), G sonlu bir grup mudur? I. Adian' ın gösterdiği gibi bu yanlıştır.

Bu sorunun bir varyasyonuda kısıtlanmış Burnside problemidir (Restricted Burnside-Problem): G' nin bir maksimal sonlu bölümü var mıdır? G. Higman (çözülebilen G için) ve J. S. Wilson (genel durum) ispatladılar ki bunun için kısıtlanmış Burnside problemi asal sayının kuvvetlerinin çözülmesi için yeterlidir. E. Zelmanov tarafından asal sayının kuvveti için bir çözüm bulunmuştur.

Kısıtlanmış Burnside problemi ve onun çözümü "profinite dilde" nasıl tanımlanır?

Bir cismin Galoisgrup üzerindeki Krull-topolojisi profinite topolojiden büyüktür. Bir profinite grup G için, ki o bir yoğun ve bir sonlu alt kümeden oluşan alt grubu içerir, N. Nikolov ve D. Segal ispatladılar ki her sonlu indeksli alt grup açıktır. G böyle bir Galois-grup ise bu yüzden Krull-topoloji profinite topoloji ile denktir.

4 Serbest konstrüksiyonlar

$\mathcal{C}$ sonlu grupların bir formasyonu olsun. $\mathcal{C}$ deki grubun her projektif limiti $\mathcal{C}$' ye *pro-$\mathcal{C}$-grup* denir. Bu terim pro-p-grubun (2) taslağını genelleştirir.

X bir küme olsun ve $F_0(X)$ X tabanlı serbest bir grup olsun. Serbest pro-$\mathcal{C}$-grup $F_{\mathcal{C}}(X)$ ile tanımlanır ve aşağıdaki evrensel özellik aracılığıyla tanımlanmıştır: $F_{\mathcal{C}}(X)$ X' i içerir. Her şekil $f : X \to H$ kesin bir sürekli homorfizmi $\hat{f}$ tanımlar bunun yanı sıra H herhangi bir pro-$\mathcal{C}$-gruptur böylece aşağıdaki diyagram değiştirilir:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & F_{\mathcal{C}}(X) \arrow[d, dotted, "\hat{f}\exists!"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Örnek 26 Bazı örnekler:

1. Eğer $|X| = 1$ ise o zaman $F_{\mathcal{C}}(X)$ *procyclical* dır. Örnek 13 deki grup $\mathbf{Z}_2$ bir serbest pro-2- gruptur. Eğer $\mathcal{C}$ bütün sonlu grupların sınıfı olarak seçilirse bu bir serbest profinite grup değildir.

   Örnek 12(1) de grup $\hat{\mathbf{Z}}$ bir *serbest procyclical gruptur* bunun yanı sıra $\mathcal{C}$ bütün sonlu (çözülebilen) gruptan oluşur. $\hat{\mathbf{Z}}_2$ $\hat{\mathbf{Z}}$' in serbest olmayan bir alt grubudur.

2. Örnek 12(2) de $X = \{x, y\}$' ye sahibiz ve $\mathcal{C}$ bütün gruplardan oluşur.

3. X sonlu ise o zaman $F_{\mathcal{C}}(X)$ serbest grupların $F_0(X)$ pro-$\mathcal{C}$-tamamlamasıdır.

4. Eğer X sonsuz ise o zaman genellikle $F_0(X)$ üzerinde bir kısıtlanmış pro-$\mathcal{C}$-topoloji kullanılır: $X \cup \{1\}$ Alexandrov-Kompaktlaştırma ve $\mathcal{N}$ $F_0(X)$' in açık normal bölenlerinin kümesi olsun; bütün $N \in \mathcal{N}$ için X' in sonlu alt kümesi S vardır böylece N de $X \setminus S$ içerir ve $F_0(X)/N \in \mathcal{C}$ dir. İspatlanabilinir ki $F_0(X)$ bu topoloji ile bir topolojik gruptur ve onun tamamlaması bir pro-$\mathcal{C}$ gruptur ki bu genellikle $F_{\mathcal{C}}(X)$ aracılığıyla tanımlanır.

Teorem 27 *$\mathcal{C}$ bir formasyon olsun ki bu $\mathcal{C}$ deki bir grubun bütün alt gruplarını içerir. Bir serbest pro-$\mathcal{C}$-grubun $F_{\mathcal{C}}(X)$ her bir açık alt grubu H açıktır.*

İspat sonlu X için: Serbest grup $F_0(X)$ $F_{\mathcal{C}}(X)$' in yoğun bir alt grubudur ve $H \cap F(X)$ $F_0(X)$' de sonlu indekse sahiptir. Nielsen-Schreier' in teoremi serbest (ayrık) gruplar için diyor ki $F_0(X) \cap H$ bir serbest gruptur. Eğer gösterilebilinirse $F(X)$' in profinite topolojisinin $F_0(X) \cap H$ üzerinde profinite topoloji sonuçlandırır ki bu da teoremi ispatlar. Çünkü H ve tamamlaması H' ikiside kapalıdır ve $H = \bigcap_N HN$ dır bunun yanı sıra N $F(X)$' in bütün açık normal bölenleri $F(X)/N \in \mathcal{C}$ ile geçer, $H' = \bigcup_N (HN)'$ dir. H'' in kompakt olmasından dolayı böylece bir sonlu bütün N lerin alt sistemi $H = \bigcap_N HN$ ile bulunabilir, bu yüzden bütün bu normal bölenlerin N sonlu kesişimi K H dedir. Dolayısıyla $F_0(X) \cap K$ $F_0(X) \cap H$ üzerinde pro-$\mathcal{C}$ topolojide açıktır.

Tanım 28 Aynı tarz ile pro-$\mathcal{C}$-gruplar A ve B' nin serbest çarpımlarını tanımlayalım:
$A * B$ serbest çarpım olsun ve bütün normal bölenleri N'nin kümesi $\mathcal{N}$ ki $A * B/N \in \mathcal{C}$ oluşturalım, bununla beraber $A \cap N$ ve $B \cap N$ A' nın kapalı alt grupları ya da B' nindir. $\mathcal{N}$, $A * B$' nin bir komşulugundaki tabandır. Pro-$\mathcal{C}$ tamamlama $A \amalg B$ ile gösterilir ve *A ve B'nin serbest pro-$\mathcal{C}$-çarpımı* denir.

Örnek 29 Birkaç örnek:

- $A = B = \hat{\mathbf{Z}}$ için biz $A \amalg B = F(x, y)$' yi A ve B' yi oluşturan x ve y' den elde ederiz.
- $A = C_2 = B$ için biz dihedrali $C_2 * C_2$ ve pro-$\mathcal{C}$-dihedrali $C_2 \amalg C_2$ elde ederiz. Bu açık çünkü $C_2 \amalg C_2$ aynı zamanda $C_2 * C_2$' nin bir pro-$\mathcal{C}$-tamamlamasıdır.
- $\mathcal{C}$' deki A ve B grupları için serbest pro-$\mathcal{C}$-çarpımı ile $A * B$' nin pro-$\mathcal{C}$-tamamlaması uyuşur.

Teorem 30 *(İki faktör için Kurosh) $\mathcal{C}$ bir oluşum olsun ki bu $\mathcal{C}$' deki her grubun bütün alt gruplarını içersin. $G = A \amalg B$ pro-$\mathcal{C}$ gruplar A ve B' nin serbest pro-$\mathcal{C}$-çarpımıdır. G' nin her açık grubu H bir serbest pro-$\mathcal{C}$-çarpımdır.*

$$H = \coprod_{i=1}^{m} A^{g_i} \cap H \amalg \coprod_{j=1}^{n} B^{k_j} \cap H \amalg U$$

ve U bir serbest pro-$\mathcal{C}$-gruptur.

(Kurosh n faktör için) Eğer $G = A_1 \amalg A_2 \amalg \ldots \amalg A_n$ ve H bir açık grup ise:

$$H = \coprod_{i=1}^{n} \coprod_{r \in A_i \backslash G/H} A_i^{g_{ir}} \cap H \amalg U,$$

geçerlidir ki $A_i \backslash G/H$ bir çiftyansınıf sistemidir ve $g_{ir} \in G$ dir. $g_{i1} = 1$ de kullanılabilir.

İspat sonlu A ve B için teori 27 deki gibi aynıdır.

Bir kullanım:

Sonuç 31 *$G = A_1 \amalg A_2 \amalg \ldots \amalg A_n$ ile $A_i \neq \langle 1 \rangle$ sonlu olsun. O zaman $A_i \cap A_i^x \neq \langle 1 \rangle$ ancak ve ancak $i = j$ ve $x \in A_i$. $1 \neq a \in A_i$ için $C_G(a) = C_{A_i}(a)$ elde ederiz.*

İspat (P. A. Zalesskii): Ayrık durumda olduğu gibi bir epimorfizmi $\psi : \coprod_i A_i \to \prod_i A_i$, $A_i \cap A_i^x \leq ker\psi$ görmek için kullanılır ve
$A_I \cap ker\psi = \langle 1 \rangle$ görülür ki $i = j$.
Kabul edelim ki, $x \notin A_i$ ve $A_i \cap A_i^x \neq \langle 1 \rangle$. O zaman bir açık normal bölenleri N ile $x \notin A_i N$ vardır. $H := A_i N$ G nin bir açık alt grubudur ve dolayısıyla Kurosh teoremini kullanabiliriz:

$$A_i N = \coprod_{i=1}^{n} \coprod_{r \in A_i \backslash G/A_i N} A_i^{g_{ir}} \cap (A_i N) \amalg U.$$

Bu ayrışma $A_i \leq A_i N$,,üslerin" $g_{ir} = 1$ sahiptir. $a_i, a_i' \in A_i$ olsun, g_{ir} ve $n \in N$, böylece $x = a_i g_{ir} a_i' n$. Ama $g_{ir} = 1$; çünkü $x \in A_i N$ bir çelişkidir.

İkinci iddia birincinin bir sonucudur.

Soru 32

1. *Teorem 27' nin Kurosh Teoremi' nden türetilebileceğini gösteriniz.*
2. *$G = C_2 \amalg C_2 = \langle a, b \rangle$ olsun. Kurosh' un teoremini alt grup $H = \langle ab \rangle$ için açıklayınız.*

3. *$G = C_2 \amalg C_2 \amalg C_2 = \langle a, b, c\rangle$ olsun. Kurosh' un teoremini alt grup $H = \langle ab, bc, ca\rangle$ için açıklayınız.*

4. *A, B, C, D $\mathcal{C}$' nin gruplarıdır ve $G = A \amalg B = C \amalg D$ olsunlar . Gösteriniz ki $g \in G$ vardır, bu yüzden $C = A^g$ veya $D = A^g$ dır.*

Tanım 33 A, B, C pro-$\mathcal{C}$-Gruplar olsunlar ve $G := A *_C B$ serbest amalgameted çarpım olsun. $\mathcal{N}$ G'nin her normalböleninin sistemi olsun, $G/N \in \mathcal{C}$ ve $A \cap N$, $B \cap N$ ve $C \cap N$ A' nın B' nin veya C' nin açık altgruplarıdır. Tekrardan G üzerinde pro-$\mathcal{C}$ topoloji $\mathcal{N}$' nin G üzerinde sabit kılınmasıyla birin komşu tabanı tanımlanır ve pro-$\mathcal{C}$ tamamlama ile serbest amalgamated pro-$\mathcal{C}$-çarpımını $A \amalg_C B$ oluşturulur.

$A, B \leq H$, $\phi : A \to B$ sürekli bir izomorfizm ve $G = \mathrm{HNN}(A, B, \phi, t)$ HNN-Extention olsun. $\mathcal{N}$ tanımlandığı gibi olsun. G' nin pro-$\mathcal{C}$ tamamlaması bir pro-$\mathcal{C}$-HNN-Extention dır. *H tabangrup*, *A, B ilgili altgruplar* ve *t sabit sembol.*

$\mathrm{HNN}(A, B, t)$ serbest çarpımların bölüm grubu $A * \langle t\rangle$ topolojik normal bölenlerinden elde edilen $\{\phi(a)tat^{-1} \mid a \in A\}$ altkümenin modülü olsun .

Ayrık durumda olduğu gibi $A \amalg_C B$ ve $\mathrm{HNN}(A, B, \phi, t)$ evrensel özelliğe sahiptirler. A, B (sonlu) gruplar ve $C \to A$, $C \to B$ bire birlikler (ortadaki oklar). Yukarıyı gösteren oklar serbest amalgamated çarpıma giden doğal dönüşümlerdir. Verilen grup H ikinci ve üçüncü ok bir değişmeli diyagramı oluşturur, çünkü evrensel ok vardır.

$$\begin{tikzcd}
& A \amalg_C B \arrow[dd, bend left=60, "\exists!"] & \\
A \arrow[ur] \arrow[dr] & C \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & B \arrow[ul] \arrow[dl] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

Diyagramı kullanarak $\mathrm{HNN}(A, B, \phi, t)$' nın evrensel özelliğini açıklayacağız:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] & & & \\
& H \arrow[rr] \arrow[drr, "\psi"'] & & HNN(H, A, B, \phi, t) \arrow[d, dotted, "\omega\exists!"] & & \{t\} \arrow[ll] \arrow[dll, "\lambda"] \\
& & & K & &
\end{tikzcd}$$

K ve homomorfizma $\psi : H \to K$ verilsin K' nin bir elemanı gibi ($\lambda : \{t\} \to H$ dönüşümünün resmi olarak yorumlandı) bu yüzden ki $\psi(\phi(a)) = \phi(a)^{\lambda(t)}$ her $a \in A$ için geçerlidir. O zaman tam bir homomorfizma $\omega : \mathrm{HNN}(A, B, \phi, t) \to K$ vardır. Bu yüzden diyagram dönüşümlüdür.

Soru 34 *1. $\phi : C_4 \to C_4$ otomorfizma olsun $\phi(x) := x^{-1}$ y $A = B = C_4$. Açıkla HNN(A, B, ϕ, t).*

2. 24(5)'deki örneği HNN(A, B, ϕ, t) olarak nasıl açıklayabiliriz?

Bu konstrüksiyonlar şaşırtıcı kullanımlara sahiptir: Her profinite grup, bazıları sayılabilen küme tarafindan elde edilmiştir ve iki elemandan oluşan gruba yerleştirilebilir (Z. Chatzidakis, P.A. Zalesski). Zor bir versiyonu şöyle der: Her bir profinite grup bir açık burulma olmayan alt grubu ile bir profinite grubun içine yerleştirilebilir, böylece bütün elemanların aynı sonlu sıralaması konjugedir (W.Herfort ve P.A. Zalesskii).

5 Teşekkür

Adı ilk geçen yazar Sema Alıcı ve Berna Çınar' a almanca' dan türkç' ye çeviri için hem de Mimar Sinan Üniversitesi' nin Matematik Bölümünün nazik daveti için teşekkür eder.

Kaynaklar

[1] Hewitt E. and Ross K., *Abstract and harmonic analysis*, Springer 1963

[2] Ribes L. and Zalesskii P.A., *Profinite Groups*, Second Edition, Springer 2010.

[3] Ribes L. and Zalesskii P.A., *Pro-p Trees,* (2000), Chapter, Ser. Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston (2000), Ed. Shalev A., Segal D..

[4] Wilson J.S., *Profinite Groups*, London Mathematical Society Monographs New Series 19, Oxford 1998

Wolfgang Herfort,
Institut für Analysis und Scientific Computing
Technische Universität
Wiedner Hauptstraße 8–10/101
A-1040 Wien, Österreich
email: w.herfort@tuwien.ac.at