

FUNKTIONALANALYSIS

Harald Woracek

Michael Kaltenbäck

Martin Blümlinger

11.Auflage, Februar 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Addendum zu Topologie	1
1.1	Vervollständigung metrischer Räume	1
1.2	Initiale Topologie	6
1.3	Der Satz von Tychonoff	11
1.4	Finale Topologie	13
2	Topologische Vektorräume	17
2.1	Topologische Vektorräume	17
2.2	Endliche Dimension	25
2.3	Einige Beispiele	27
2.4	Unterräume, Faktorräume, Produkträume	30
2.5	Vervollständigung normierter Räume	35
3	Hilberträume	41
3.1	Räume mit innerem Produkt	41
3.2	Orthogonalität	46
3.3	Orthonormalsysteme	51
4	Vollständigkeit	57
4.1	Der Satz von Baire	57
4.2	Der Satz von Banach-Steinhaus	58
4.3	Der Satz von der offenen Abbildung	60
4.4	Der Satz vom abgeschlossenen Graphen	62
5	Lokalkonvexe Vektorräume	65
5.1	Seminormen, Minkowski-Funktionale	66
5.2	Die Sätze von Hahn-Banach	71
5.3	Die schwache Topologie $\sigma(X, Y)$	78
5.4	Duale Paare, Annihilatoren, Bipolarsatz	81
5.5	Topologien auf $(X, \ \cdot\)'$, Satz von Banach-Alaoglu	85
5.6	Satz von Krein-Milman	89
5.7	Fixpunktsätze Brouwer und Schauder	90
6	Elementare Operatortheorie	97
6.1	Konjugierte Operatoren	97
6.2	Der Satz vom abgeschlossenen Bild	101
6.3	Das Spektrum	103
6.4	Kompakte Operatoren	113

6.5 Operatoren im Hilbertraum	120
7 Der Spektralsatz	127
7.1 Spektralmaße	127
7.2 Der Spektralsatz	140
7.3 Sturm-Liouville Differentialgleichungen	149
A Topologien / Dualräume	155
Literaturverzeichnis	157
Index	158

Kapitel 1

Addendum zu Topologie

1.1 Vervollständigung metrischer Räume

Ein metrischer Raum heißt bekannterweise vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert. Wie man an vielen Stellen in der Analysis gesehen hat, ist die Vollständigkeit eine ganz starke und wichtige Eigenschaft. Man denke zum Beispiel nur an den Zwischenwertsatz für reellwertige Funktionen.

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass man einen beliebigen metrischen Raum stets in einen vollständigen metrischen Raum einbetten kann, so wie zum Beispiel \mathbb{Q} in \mathbb{R} eingebettet ist.

Dazu zeigen wir als erstes einen Fortsetzungssatz für gleichmäßig stetige Abbildung mit Werten in einem vollständigen metrischen Raum.

1.1.1 Satz. *Seien (X, d) , (Y, d_1) metrische Räume, und sei (Y, d_1) vollständig. Weiters sei $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge von X und $f : D \rightarrow Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung, d.h. es gelte:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : d(x, y) < \delta \Rightarrow d_1(f(x), f(y)) < \epsilon$$

\rightsquigarrow *Dann existiert genau eine stetige Abbildung $F : X \rightarrow Y$ mit $F|_D = f$. Diese ist sogar gleichmäßig stetig.*

\rightsquigarrow *Ist f isometrisch, dh. $d_1(f(x), f(y)) = d(x, y)$ für $x, y \in D$ – offensichtlich ist dann f gleichmäßig stetig – so ist auch F isometrisch.*

\rightsquigarrow *Sei nun zusätzlich (X, d) vollständig, $f(D) \subseteq Y$ dicht, f injektiv und so, dass auch $f^{-1} : f(D) \rightarrow X$ gleichmäßig stetig ist. Dann ist $F : X \rightarrow Y$ bijektiv, und die nach dem ersten Punkt existierende eindeutige gleichmäßig stetige Fortsetzung $G : Y \rightarrow X$ von $f^{-1} : f(D) \rightarrow X$ stimmt mit F^{-1} überein.*

Beweis.

f führt Cauchy-Folgen in Cauchy-Folgen über: Dazu sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Punkten aus D . Zu einem $\epsilon > 0$ wähle man $\delta > 0$, sodass

$$\forall y, z \in D, d(y, z) < \delta \Rightarrow d_1(f(y), f(z)) < \epsilon. \quad (1.1.1)$$

Weiters wähle man $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x_m) < \delta$ für alle $n, m \geq N$. Dann folgt

$$d_1(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N,$$

und wir sehen, dass $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (Y, d_1) ist.

Konstruktion von F : Sei $x \in X$ gegeben. Da D dicht in X ist, existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten aus D mit $x_n \rightarrow x$. Als konvergente Folge ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge. Wegen dem letzten Punkt hat auch $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diese Eigenschaft. Da (Y, d_1) vollständig ist, existiert der Limes $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Wir definieren

$$F(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Zunächst hängt diese Definition von der gewählten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ab.

Sei nun $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere, gegen x konvergente Folge von Punkten aus D . Zu einem beliebig kleinen $\epsilon > 0$ sei $\delta > 0$ wie in (1.1.1) und wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_n, x) < \frac{\delta}{2}, \quad d(y_n, x) < \frac{\delta}{2} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Dann ist $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(y_n, x) < \delta$ für alle $n \geq N$. Somit gilt $d_1(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon$, $n \geq N$, und daher

$$d_1\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)\right) \leq \epsilon.$$

Die Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ folgt wie die von $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, erkennen wir $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$. Also ist $F(x)$ unabhängig von der gewählten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten aus D definiert.

F ist eine Fortsetzung von f : Zu einem $x \in D$ betrachte die konstante Folge $x_n := x$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt trivialerweise $x_n \rightarrow x$ sowie $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Also folgt $F(x) = f(x)$.

F ist gleichmäßig stetig: Dazu sei $\epsilon > 0$ und wähle $\delta > 0$, sodass

$$\forall y, z \in D, \quad d(y, z) < \delta \Rightarrow d_1(f(y), f(z)) < \frac{\epsilon}{3}. \quad (1.1.2)$$

Seien nun $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \frac{\delta}{3}$. Wähle $x_n, y_n \in D$ mit $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ und wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_n, x) < \frac{\delta}{3}, \quad d(y_n, y) < \frac{\delta}{3}, \quad d_1(f(x_n), F(x)) < \frac{\epsilon}{3}, \quad d_1(f(y_n), F(y)) < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $n \geq N$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $d(x_n, y_n) < \delta$ und wegen (1.1.2) $d_1(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\epsilon}{3}$. Wenden wir abermals die Dreiecksungleichung an, so erhalten wir $d_1(F(x), F(y)) < \epsilon$.

Eindeutigkeit: Sind F_1 und F_2 zwei stetige Fortsetzungen von f , so gilt also $F_1|_D = f = F_2|_D$. Da D dicht ist, folgt bereits $F_1 = F_2$.

Isometrie: Ist f isometrisch, $x, y \in X$ und $(x_n), (y_n)$ Folgen aus D mit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, so folgt wegen der Stetigkeit von F und weil aus $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ folgt, dass $d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$,

$$\begin{aligned} d_1(F(x), F(y)) &= d_1\left(F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right), F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right)\right) = d_1\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(f(x_n), f(y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y). \end{aligned}$$

Bijektivität: Sei nun (X, d) auch vollständig, $f(D) \subseteq Y$ dicht, f injektiv und auch $f^{-1} : f(D) \rightarrow X$ gleichmäßig stetig. Nach dem ersten Punkt gibt es eine eindeutige gleichmäßig stetige Fortsetzung $G : Y \rightarrow X$ von $f^{-1} : f(D) \rightarrow X$. Für $x \in D$ gilt

$$G \circ F(x) = G(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x = \text{id}_X(x).$$

Also stimmen die beiden stetigen Funktionen $G \circ F : X \rightarrow X$ und $\text{id}_X : X \rightarrow X$ auf der dichten Teilmenge D von X überein. Somit gilt $G \circ F = \text{id}_X$. Da auch $f(D)$ dicht in Y ist, folgt genauso $F \circ G = \text{id}_Y$. Daraus schließen wir sofort die Bijektivität von F und auf $F^{-1} = G$. \square

Wir kommen nun zu dem Konzept der Vervollständigung.

1.1.2 Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Paar bestehend aus einem metrischen Raum (\hat{X}, \hat{d}) und einer Abbildung $\iota : X \rightarrow \hat{X}$ heißt eine *Vervollständigung* von (X, d) , wenn gilt:

(V_{met}1) (\hat{X}, \hat{d}) ist ein vollständiger metrischer Raum.

(V_{met}2) ι ist isometrisch, d.h. es gilt $\hat{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y)$, $x, y \in X$.

(V_{met}3) $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$, wobei der Abschluss bezüglich \hat{d} zu verstehen ist.

Zwei Vervollständigungen $\langle (\hat{X}_1, \hat{d}_1), \iota_1 \rangle$ und $\langle (\hat{X}_2, \hat{d}_2), \iota_2 \rangle$ von (X, d) heißen *isomorph*, wenn es ein isometrisches $\varphi : \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}_2$ gibt sodass $\iota_2 = \varphi \circ \iota_1$, d.h. sodass

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \iota_1 \swarrow & & \searrow \iota_2 \\ \hat{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \hat{X}_2 \end{array} \quad (1.1.3)$$

Bedingung (V_{met}2) bedingt insbesondere, dass ι injektiv ist. Die Bedingung (V_{met}3) besagt nur, dass \hat{X} nicht „unnötig groß“ ist. Hat man einen vollständigen metrischen Raum (\tilde{X}, \tilde{d}) und eine isometrische Abbildung $\iota : X \rightarrow \tilde{X}$, so erhält man eine Vervollständigung von X indem man $\hat{X} := \overline{\iota(X)}$, $\hat{d} := \tilde{d}|_{\hat{X} \times \hat{X}}$, und die gleiche Abbildung ι betrachtet.

Als erstes wollen wir uns überlegen, dass, falls überhaupt eine Vervollständigung existiert, diese bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

1.1.3 Korollar. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind je zwei Vervollständigungen von (X, d) isomorph.

Beweis. Seien $\langle (\hat{X}_1, \hat{d}_1), \iota_1 \rangle$ und $\langle (\hat{X}_2, \hat{d}_2), \iota_2 \rangle$ zwei Vervollständigungen von (X, d) .

Nun sind die Abbildungen $\iota_2 \circ \iota_1^{-1} : \iota_1(X) (\subseteq \hat{X}_1) \rightarrow \iota_2(X) (\subseteq \hat{X}_2)$ und $(\iota_2 \circ \iota_1^{-1})^{-1} = \iota_1 \circ \iota_2^{-1} : \iota_2(X) (\subseteq \hat{X}_2) \rightarrow \iota_1(X) (\subseteq \hat{X}_1)$ beide isometrisch und daher insbesondere gleichmäßig stetig.

Nach Satz 1.1.1 existiert eine eindeutige isometrische Fortsetzung $\varphi : \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}_2$ von $\iota_2 \circ \iota_1^{-1}$, die bijektiv ist und deren Inverse gerade die isometrische Fortsetzung von $\iota_1 \circ \iota_2^{-1}$ ist.

□

Man beachte, dass man eine „bessere“ Eindeutigkeitsaussage als Korollar 1.1.3 nicht erhalten kann, denn ist $\langle (\hat{X}, \hat{d}), \iota \rangle$ eine Vervollständigung von (X, d) , und ist (\tilde{X}, \tilde{d}) ein metrischer Raum, sodass es eine isometrische Bijektion f von (\hat{X}, \hat{d}) auf (\tilde{X}, \tilde{d}) gibt, so ist $\langle (\tilde{X}, \tilde{d}), f \circ \iota \rangle$ offensichtlich ebenfalls eine Vervollständigung von (X, d) .

Es ist nun eine wesentliche Aussage, dass es zu jedem metrischen Raum tatsächlich eine Vervollständigung gibt.

1.1.4 Satz. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existiert eine Vervollständigung $\langle (\hat{X}, \hat{d}), \iota \rangle$ von (X, d) .*

Beweis.

Definition von \hat{X} und ι : Betrachte die Menge \mathfrak{X} aller Cauchy-Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in X$. Auf \mathfrak{X} definieren wir eine Relation durch

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = 0.$$

Diese Relation ist klarerweise reflexiv und symmetrisch. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung sieht man leicht, dass sie auch transitiv ist. Insgesamt haben wir also eine Äquivalenzrelation.

Setze $\hat{X} := \mathfrak{X} / \sim$, und definiere

$$\iota : \begin{cases} X & \rightarrow \hat{X}, \\ x & \mapsto (x_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sim, \text{ wobei } x_n := x, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

d.h. die Menge X ist in \hat{X} eingebettet indem man einen Punkt $x \in X$ mit der Folge „konstant gleich x “ identifiziert.

Definition von \hat{d} : Wendet man die Dreiecksungleichung für $|\cdot|$ oben und für d zweimal nach unten an, so erhält man für $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X^2$

$$\begin{aligned} |d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2)| &\leq |d(a_1, b_1) - d(a_2, b_1)| + |d(a_2, b_1) - d(a_2, b_2)| \\ &\leq d(a_1, a_2) + d(b_1, b_2). \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{X}$, dann folgt aus der Ungleichung (1.1.4), dass die Folge $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen ist. Also existiert der Limes $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \in \mathbb{R}$.

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d.h. $d(x_n, x'_n), d(y_n, y'_n) \rightarrow 0$, so folgt wieder mit (1.1.4), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)) = 0.$$

Es ist daher eine Funktion $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\hat{d}((x_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sim, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sim) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n), (x_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sim, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sim \in \hat{X}$$

wohldefiniert.

\hat{d} ist Metrik: Aus der Definition von \hat{d} ist klar, dass $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) \geq 0$ und $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) =$

$\hat{d}(\hat{y}, \hat{x})$ für alle $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$. Seien $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$, und wähle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{X}$, sodass $\hat{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sim$ und $\hat{y} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sim$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \hat{d}(\hat{x}, \hat{y}),$$

womit

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{y}.$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \hat{X}$ gegeben, und wähle entsprechende Repräsentanten $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{x}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{y}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{z}$. Dann gilt $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und daher auch

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, y_n) = \hat{d}(\hat{x}, \hat{z}) + \hat{d}(\hat{z}, \hat{y}).$$

(\hat{X}, \hat{d}) ist eine Vervollständigung von (X, d) : Dass ι isometrisch ist, folgt unmittelbar aus

$$\hat{d}(\iota(x), \iota(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y) = d(x, y).$$

Nun sei $\hat{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sim \in \hat{X}$ gegeben. Zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x_m) < \epsilon$, $n, m \geq N$. Dann folgt für jedes feste $m \geq N$

$$\hat{d}(\iota(x_m), \hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) \leq \epsilon.$$

Somit gilt in dem metrischen Raum (\hat{X}, \hat{d})

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iota(x_n) = \hat{x}, \quad (1.1.5)$$

woraus auch unmittelbar die Dichtheit von $\iota(X)$ in \hat{X} folgt.

Es bleibt die Vollständigkeit von (\hat{X}, \hat{d}) zu zeigen. Dazu sei $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \hat{X} . Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wähle $y_n \in X$ mit $\hat{d}(\iota(y_n), \hat{x}_n) < \frac{1}{n}$. Aus

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &= \hat{d}(\iota(y_n), \iota(y_m)) \leq \hat{d}(\iota(y_n), \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, \iota(y_m)) \\ &< \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ folgt sofort, dass mit $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist - und zwar in X ; also liegt $\hat{y} := (y_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sim$ in \mathfrak{X} . Mit (1.1.5) erhalten wir

$$\hat{d}(\hat{y}, \hat{x}_n) \leq \hat{d}(\hat{y}, \iota(y_n)) + \hat{d}(\iota(y_n), \hat{x}_n) \leq \hat{d}(\hat{y}, \iota(y_n)) + \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

und damit $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \hat{y}$. □

Wir wollen auch einen weniger konstruktiven Beweis der Existenz der Vervollständigung angeben.

Beweis (von Satz 1.1.4). Aus der Analysis ist bekannt, dass der Raum $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ aller beschränkten reellwertigen Funktionen ein Banachraum ist, wenn man ihn mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

versieht. Sei $a \in X$ festgehalten. Die Abbildung ι auf X , die einem $x \in X$ die Funktion $y \mapsto d(y, x) - d(y, a)$ zuweist, ist wegen (Dreiecksungleichung)

$$|d(y, x) - d(y, a)| \leq d(x, a) \quad \text{für alle } y \in X$$

eine Abbildung nach $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ hinein, dh. $\iota : X \rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Wegen

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= |d(x_1, x_1) - d(x_1, a) - d(x_1, x_2) + d(x_1, a)| \\ &= |\iota(x_1)(x_1) - \iota(x_2)(x_1)| \leq \|\iota(x_1) - \iota(x_2)\|_\infty \\ &= \sup_{y \in X} |d(y, x_1) - d(y, a) - d(y, x_2) + d(y, a)| \leq d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

ist ι eine Isometrie. Nun sei \hat{X} der Abschluss von $\iota(X)$ in $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ bezüglich der von $\|\cdot\|_\infty$ erzeugten Metrik d_∞ . Ist nun \hat{d} die Einschränkung von d_∞ auf \hat{X} , so ist $\langle (\hat{X}, \hat{d}), \iota \rangle$ offenbar eine Vervollständigung von (X, d) . □

1.2 Initiale Topologie

Mit dem Konzept Basis und Subbasis können wir auf einer gegebenen Menge ausgezeichnete Topologien definieren, die gewisse Eigenschaften haben.

1.2.1 Satz. *Seien X eine Menge, (Y_i, \mathcal{T}_i) , $i \in I$, topologische Räume und $f_i : X \rightarrow Y_i$, $i \in I$, Abbildungen. Dann existiert genau eine Topologie \mathcal{T} auf X mit der Eigenschaft*

(IN_1) \mathcal{T} ist die größte Topologie auf X , sodass alle Abbildungen $f_i : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, stetig sind.

Diese Topologie heißt initiale Topologie bezüglich der f_i . Für sie gilt

(IN_2) $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ ist eine Subbasis von \mathcal{T} ,

und

(IN_3) Ist (Y, \mathcal{O}) ein beliebiger topologischer Raum und $f : Y \rightarrow X$, so ist $f : (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ genau dann stetig, wenn alle Abbildungen

$$f_i \circ f : (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i), i \in I,$$

stetig sind.

Beweis. Ist \mathcal{T}' eine beliebige Topologie auf X , so ist $f_i : (X, \mathcal{T}') \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)$ genau dann stetig, wenn $f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}'$. Also sind alle f_i genau dann stetig, wenn

$$\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}'. \quad (1.2.1)$$

Die Topologie \mathcal{T} mit der linken Seite hier als Subbasis, dh. $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i))$, ist die größte Topologie, die (1.2.1) erfüllt. Damit ist aber auch \mathcal{T} die größte Topologie, sodass alle f_i stetig sind. Also gilt (IN_1) sowie auch (IN_2) .

Sei $f : (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$, wobei \mathcal{T} die initiale Topologie der $f_i, i \in I$, ist. Im Falle der Stetigkeit von f sind auch alle $f_i \circ f : (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)$ als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig.

Seien umgekehrt alle $f_i \circ f$ stetig, d.h. es gelte $(f_i \circ f)^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{O}$. Dann folgt $f^{-1}(f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)) \subseteq \mathcal{O}$ und damit

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)\right) \subseteq \mathcal{O}.$$

Da $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ eine Subbasis von \mathcal{T} ist, folgt leicht, dass f stetig ist. Die initiale Topologie \mathcal{T} hat also die Eigenschaft (IN_3) . □

1.2.2 Bemerkung. Die initiale Topologie \mathcal{T} ist in der Tat die einzige Topologie \mathcal{T}' mit der Eigenschaft (IN_3) . Um das einzusehen, sei \mathcal{T}' eine weitere Topologie auf X mit der Eigenschaft (IN_3) .

Da die Abbildung $\text{id}_X : (X, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ trivialerweise stetig ist, folgt aus (IN_3) angewandt auf \mathcal{T}' , dass alle $f_i \circ \text{id}_X : (X, \mathcal{T}') \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig sind. Aus (IN_1) folgt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Für $\text{id}_X : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ sind andererseits alle Abbildungen $f_i \circ \text{id}_X = f_i : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig. Mit (IN_3) angewandt auf \mathcal{T}' folgt die Stetigkeit von $\text{id}_X : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$, und daher $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Insgesamt ist $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. //

1.2.3 Lemma. *Mit der Notation aus Satz 1.2.1 sei $(x_j)_{j \in J}$ ein Netz in X . Dieses konvergiert bzgl. \mathcal{T} gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn $(f_i(x_j))_{j \in J}$ für alle $i \in I$ gegen $f_i(x)$ konvergiert.*

Beweis. Konvergiert $(x_j)_{j \in J}$ gegen x bzgl. \mathcal{T} , so folgt aus der Stetigkeit der f_i , dass $(f_i(x_j))_{j \in J}$ gegen $f_i(x)$ konvergiert.

Gelte umgekehrt, dass $(f_i(x_j))_{j \in J}$ gegen $f_i(x)$ für alle $i \in I$ konvergiert. Für ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit oBdA. $U \neq X$ und $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$ folgt aus der Tatsache, dass $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ eine Subbasis von \mathcal{T} ist (vgl. (IN_2) aus Satz 1.2.1), dass

$$x \in f_{i_1}^{-1}(O_1) \cap \cdots \cap f_{i_m}^{-1}(O_m) \subseteq O,$$

wobei $i_1, \dots, i_m \in I$, $O_1 \in \mathcal{T}_{i_1}, \dots, O_m \in \mathcal{T}_{i_m}$. Also folgt $f_{i_k}(x) \in O_k, k = 1, \dots, m$, und laut Voraussetzung gibt es Indizes $j_1, \dots, j_m \in J$, sodass $j \succeq j_k \Rightarrow f_{i_k}(x_j) \in O_k, k = 1, \dots, m$. Ist nun $j_0 \in J$ derart, dass $j_0 \succeq j_k, k = 1, \dots, m$, so folgt für $j \succeq j_0$ jedenfalls $f_{i_k}(x_j) \in O_k, k = 1, \dots, m$, und daher

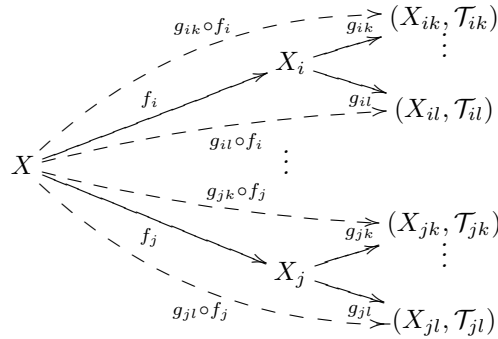
$$x_j \in f_{i_1}^{-1}(O_1) \cap \cdots \cap f_{i_m}^{-1}(O_m) \subseteq O \subseteq U.$$

□

Die Konstruktion der Initialen Topologie ist assoziativ.

1.2.4 Korollar. *Seien $X, X_i, i \in I$, Mengen, und seien $(X_{i_k}, \mathcal{T}_{i_k}), i \in I, k \in I_i$, topologische Räume. Weiters seien Abbildungen $f_i : X \rightarrow X_i, i \in I$, und*

$g_{ik} : X_i \rightarrow X_{ik}$, $i \in I$, $k \in I_i$, gegeben.



Bezeichne

\rightsquigarrow für jedes $i \in I$ mit \mathcal{T}_i die initiale Topologie auf X_i bezüglich der Familie

$$g_{ik} : X_i \rightarrow (X_{ik}, \mathcal{T}_{ik}), \quad k \in I_i,$$

\rightsquigarrow mit \mathcal{T}_1 die initiale Topologie auf X bezüglich der Familie

$$f_i : X \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i), \quad i \in I,$$

\rightsquigarrow mit \mathcal{T}_2 die initiale Topologie auf X bezüglich der Familie

$$g_{ik} \circ f_i : X \rightarrow (X_{ik}, \mathcal{T}_{ik}), \quad i \in I, k \in I_i.$$

Dann gilt $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Beweis. Wir versehen die X_i mit der initialen Topologie \mathcal{T}_i bezüglich der Abbildungen $g_{i,j}$, $j \in J_i$. Ist \mathcal{T} irgendeine Topologie auf X , so ist wegen (IN_3) angewandt auf die (X_i, \mathcal{T}_i) die Tatsache, dass alle Abbildungen $f_i : X \rightarrow X_i$, $i \in I$, stetig sind, dazu äquivalent, dass alle Abbildungen $g_{i,j} \circ f_i : X \rightarrow X_{i,j}$, $i \in I, j \in J_i$, stetig sind.

Also stimmt die grösste aller Topologien, die die erste Bedingung erfüllen, – wegen (IN_1) ist das \mathcal{T}_1 – mit der grössten aller Topologien, die die zweite Bedingung erfüllen, – wegen (IN_1) ist das \mathcal{T}_2 – überein. \square

1.2.5 Beispiel. Sei (Y, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $X \subseteq Y$. Weiters sei $\iota : X \rightarrow Y$ die kanonische Einbettung, $\iota(x) = x$. Die initiale Topologie auf X bezüglich der Abbildung ι heisst die *Spurtopologie* von \mathcal{T} auf X und wird bezeichnet als $\mathcal{T}|_X$. Man spricht von $(X, \mathcal{T}|_X)$ als einem *Teilraum* von (Y, \mathcal{T}) . Wegen Satz 1.2.1 ist

$$\iota^{-1}(\mathcal{T}) = \{O \cap X : O \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

eine Subbasis für $\mathcal{T}|_X$. Nun erfüllt diese Menge selbst schon $(O1) - (O3)$, d.h. es gilt

$$\mathcal{T}|_X = \{O \cap X : O \in \mathcal{T}\}.$$

Damit erhält man auch, dass das System $\mathfrak{A}|_X$ der in $(X, \mathcal{T}|_X)$ abgeschlossenen Mengen gegeben ist durch

$$\mathfrak{A}|_X = \{A \cap X : A \in \mathfrak{A}\}, \quad (1.2.2)$$

und dass der Umgebungsfiler $\mathfrak{U}|_X(x)$ eines Elementes $x \in X$ bezüglich $\mathcal{T}|_X$ genau

$$\mathfrak{U}|_X(x) = \{U \cap X : U \in \mathfrak{U}(x)\}$$

ist. Erfüllt (Y, \mathcal{T}) das Axiom (T2), so folgt somit, dass auch $(X, \mathcal{T}|_X)$ dieses Axiom erfüllt.

Weiters folgt aus (1.2.2) für $A \subseteq X$

$$\overline{A}^{\mathcal{T}|_X} = \overline{A}^{\mathcal{T}} \cap X, \quad (1.2.3)$$

und aus (IN₃) folgt, dass eine Funktion $f : (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (X, \mathcal{T}|_X)$ genau dann stetig ist, wenn $f : (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ stetig ist.

Ist $(x_j)_{j \in J}$ ein Netz in X und $x \in X$, so erkennt man aus der letzten Behauptung von Satz 1.2.1, dass $(x_j)_{j \in J}$ genau dann gegen x bzgl. \mathcal{T} konvergiert, wenn $(x_j)_{j \in J}$ bzgl. $\mathcal{T}|_X$ gegen x konvergiert.

Ist schließlich $X \subseteq Z \subseteq Y$, so gilt wegen Korollar 1.2.4

$$\mathcal{T}|_X = (\mathcal{T}|_Z)|_X. \quad (1.2.4)$$

//

1.2.6 Beispiel. Sei (Y, d) ein metrischer Raum, und sei $X \subseteq Y$ versehen mit der Einschränkung von $d|_{X \times X}$. Klarerweise ist $(X, d|_{X \times X})$ ein metrischer Raum.

Die von $d|_{X \times X}$ auf X erzeugte Topologie ist genau die Spurtopologie, die von $\mathcal{T}(d)$ auf X induziert wird:

Ist $O \in \mathcal{T}(d)$ und $x \in O \cap X$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq O$. Daraus folgt, dass die ϵ -Kugel $U_\epsilon(x) \cap X$ um x bezüglich $d|_{X \times X}$ in $O \cap X$ enthalten ist. Also ist jede Menge aus $\mathcal{T}(d)|_X$ offen bezüglich $d|_{X \times X}$.

Ist umgekehrt $P \in \mathcal{T}(d|_{X \times X})$, so wähle man für jedes $x \in P$ ein $\epsilon_x > 0$, sodass die ϵ_x -Kugel $X \cap U_{\epsilon_x}(x)$ in X in P enthalten ist. Es folgt

$$P = \bigcup_{x \in P} (X \cap U_{\epsilon_x}(x)) = X \cap \bigcup_{x \in P} U_{\epsilon_x}(x).$$

Somit ist P der Schnitt einer in Y offenen Menge und X , also $P \in \mathcal{T}(d)|_X$. //

1.2.7 Definition. Seien (X_i, \mathcal{T}_i) , $i \in I$, topologische Räume, und sei $X := \prod_{i \in I} X_i$. Die initiale Topologie auf X bezüglich der Familie $\pi_i : X \rightarrow X_i$ der kanonischen Projektionen

$$\pi_i((x_k)_{k \in I}) = x_i$$

heißt die *Produkttopologie* der \mathcal{T}_i auf X und wird bezeichnet mit $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$.

Für ein $O \subseteq X_i$ gilt

$$\pi_i^{-1}(O) = \prod_{k \in I} O_k$$

wobei $O_k = X_k, k \neq i$, und $O_i = O$ ist. Wieder mit (IN_2) erhält man daraus, dass die Mengen der Gestalt

$$\prod_{k \in I} O_k,$$

wobei $O_k \in \mathcal{T}_k, k \in I$, und für alle $k \in I$ bis auf endlich viele $O_k = X_k$ gilt, eine Basis für $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ bilden.

Ist $i \in I$ fest, so gilt klarerweise $\pi_i(\prod_{k \in I} O_k) = O_i$. Also ist das Bild unter π_i einer jeden Menge aus dieser Basis offen in (X_i, \mathcal{T}_i) . Da jede offene Menge in $\prod_{k \in I} \mathcal{T}_k$ Vereinigung von Basismengen ist, folgt

1.2.8 Proposition. *Die kanonischen Projektionen $\pi_i : X \rightarrow X_i$ bilden offene Menge in $\prod_{k \in I} \mathcal{T}_k$ auf offene Mengen in \mathcal{T}_i ab, also sind sie offene Abbildungen.*

Weiters sieht man leicht mit Hilfe der oben konstruierten Basis für die Produkttopologie, dass für einen Punkt $(x_i)_{i \in I} \in X$ die Mengen

$$\prod_{i \in I} U_i,$$

wobei $U_i \in \mathcal{U}(x_i), i \in I$, und $U_i = X_i$ für alle bis auf endlich viele i , eine Umgebungsbasis bezüglich $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ bilden.

Aus Lemma 1.2.3 folgt, dass für ein Netz $(x_j)_{j \in J}$ und einen Punkt x aus $\prod_{i \in I} X_i$, d.h. $x_j = (\xi_{j,i})_{i \in I}$ und $x = (\xi_i)_{i \in I}$ mit $\xi_{j,i}, \xi_i \in X_i$,

$$x_j \xrightarrow{j \in J} x \Leftrightarrow \forall i \in I : \xi_{j,i} \xrightarrow{j \in J} \xi_i. \quad (1.2.5)$$

Es folgt daraus, dass für abgeschlossene $A_i \subseteq X_i, i \in I$, das Produkt $\prod_{i \in I} A_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ ebenfalls abgeschlossen ist. Alternativ kann man das auch daraus erkennen, dass

$$\prod_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(A_i)$$

als Durchschnitt von Urbildern abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen selber wieder abgeschlossen ist.

1.2.9 Bemerkung. Wendet man diese Konstruktion der Produkttopologie etwa auf zwei Räume (X_1, \mathcal{T}_1) und (X_2, \mathcal{T}_2) an, d.h. $I = \{1, 2\}$, so bilden insbesondere alle Mengen der Bauart $O_1 \times O_2$ mit $O_1 \subseteq X_1, O_2 \subseteq X_2$ eine Basis der Produkttopologie $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$. Außerdem sind alle Mengen $A_1 \times A_2$ für abgeschlossene $A_1 \subseteq X_1, A_2 \subseteq X_2$, ebenfalls abgeschlossen. //

1.2.10 Beispiel. Seien (Y_1, d_1) un (Y_2, d_2) zwei metrische Räume, und sei $d : Y_1 \times Y_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$.

Wir wissen schon, dass d eine Metrik auf $Y_1 \times Y_2$ ist, und dass $U_\epsilon((x_1, x_2)) = U_\epsilon(x_1) \times U_\epsilon(x_2)$.

Die von dieser Metrk erzeugte Topologie $\mathcal{T}(d)$ stimmt mit der Produkttopologie von $\mathcal{T}(d_1)$ und $\mathcal{T}(d_2)$ überein. Um das einzusehen sei $O \subseteq Y_1 \times Y_2$. Diese Menge ist in $\mathcal{T}(d)$, genau dann, wenn

$$\forall (x_1, x_2) \in O \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon((x_1, x_2)) = U_\epsilon(x_1) \times U_\epsilon(x_2) \subseteq O,$$

was aber äquivalent zu

$$\forall (x_1, x_2) \in O \Rightarrow \exists O_1 \in \mathcal{T}(d_1), O_2 \in \mathcal{T}(d_2) : (x_1, x_2) \in O_1 \times O_2 \subseteq O$$

ist. Da die Mengen der Form $O_1 \times O_2$ eine Basis von $\mathcal{T}(d_1) \times \mathcal{T}(d_2)$ darstellen, bedeutet das genau $O \in \mathcal{T}(d_1) \times \mathcal{T}(d_2)$. //

1.3 Der Satz von Tychonoff

1.3.1 Satz (Tychonoff). *Sei (X_i, \mathcal{T}_i) , $i \in I$, eine Familie topologischer Räume, und sei $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ die Produkttopologie auf $\prod_{i \in I} X_i$. Dann ist $(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ genau dann kompakt, wenn alle Räume (X_i, \mathcal{T}_i) , $i \in I$, kompakt sind.*

Dieser Satz ist einer der ganz wichtigen Sätze in der Topologie. Er wird an vielen Stellen in entscheidender Weise eingehen. Wir wollen bemerken, dass die wesentliche Implikation jene ist, die von der Kompaktheit der einzelnen Räume auf die des Produktes schließt. Die Umkehrung ist ganz elementar.

Es gibt verschiedene Zugänge, um diesen Satz zu beweisen. Wir wählen hier jenen über den Begriff des Filters, den wir kurz wiederholen wollen:

Ist X eine nichtleere Menge, dann heißt $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Filter, wenn $\emptyset \notin \mathfrak{F} \neq \emptyset$, wenn $F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$ und wenn $F_2 \supseteq F_1, F_1 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_2 \in \mathfrak{F}$.

Sei X eine Menge. Betrachte die Menge aller Filter auf X . Dies ist eine gewisse Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Da die Potenzmenge jeder Menge mit der mengentheoretischen Inklusion geordnet ist, ist auch die Menge aller Filter auf X in dieser Weise eine geordnete Menge. Explizit gesagt gilt $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ genau dann, wenn jedes Element von \mathfrak{F}_1 auch zu \mathfrak{F}_2 gehört. In diesem Fall sagt man auch, dass \mathfrak{F}_2 *feiner* als \mathfrak{F}_1 ist oder, dass \mathfrak{F}_1 *gröber* als \mathfrak{F}_2 ist.

1.3.2 Definition. Sei X eine Menge. Ein Filter \mathfrak{F} auf X heißt *Ultrafilter*, wenn er ein maximales Element bezüglich der mengentheoretischen Inklusion in der Menge aller Filter auf X ist.

1.3.3 Lemma. *Sei X eine Menge, und \mathfrak{F} ein Filter auf X . Dann existiert ein Ultrafilter \mathfrak{F}_1 mit $\mathfrak{F}_1 \supseteq \mathfrak{F}$.*

Beweis. Wir wollen das Lemma von Zorn anwenden, und zwar auf die Menge aller Filter auf X , die feiner als \mathfrak{F} sind. Diese Menge ist nichtleer und als Teilmenge der Menge aller Filter bezüglich der mengentheoretischen Inklusion geordnet.

Ist $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$, $I \neq \emptyset$ eine totalgeordnete Menge von Filtern \mathfrak{F}_i mit $\mathfrak{F}_i \supseteq \mathfrak{F}$, so definieren wir $\tilde{\mathfrak{F}} := \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Es folgt $\tilde{\mathfrak{F}} \supseteq \mathfrak{F}$, denn $I \neq \emptyset$ und alle \mathfrak{F}_i enthalten \mathfrak{F} . Insbesondere ist $\tilde{\mathfrak{F}}$ nichtleer. Seien $F_1, F_2 \in \tilde{\mathfrak{F}}$. Dann existiert $i_1, i_2 \in I$ mit $F_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$ und $F_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$. Nun gilt entweder $\mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \mathfrak{F}_{i_2}$ oder $\mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \mathfrak{F}_{i_1}$. Im ersten Fall sind F_1, F_2 beide Elemente des Filters \mathfrak{F}_{i_2} , und daher ist auch $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \tilde{\mathfrak{F}}$. Im zweiten Fall erhält man genauso $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \tilde{\mathfrak{F}}$. Schließlich sei $F_1 \in \tilde{\mathfrak{F}}$, und $F_2 \supseteq F_1$ gegeben. Sei $i \in I$, sodass $F_1 \in \mathfrak{F}_i$, dann ist auch $F_2 \in \mathfrak{F}_i \subseteq \tilde{\mathfrak{F}}$. Also ist $\tilde{\mathfrak{F}}$ ein Filter.

Nach dem Lemma von Zorn existiert in der Menge aller Filter auf X , die feiner als \mathfrak{F} sind, ein maximales Element. Es verbleibt zu bemerken, dass ein maximales Element in der Menge aller Filter auf X , die feiner als \mathfrak{F} sind, auch maximal in der Menge aller Filter ist. □

1.3.4 Lemma. *Seien X und Y nichtleere Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Ist \mathfrak{F} ein Filter auf X , so ist*

$$f(\mathfrak{F}) := \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}\}$$

ein Filter auf Y , der $\{f(F) : F \in \mathfrak{F}\}$ enthält. Ist \mathfrak{F} ein Ultrafilter, so auch $f(\mathfrak{F})$.

Beweis. Es gilt $Y \in f(\mathfrak{F})$, da $f^{-1}(Y) = X \in \mathfrak{F}$. Wegen $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin \mathfrak{F}$ gilt auch $\emptyset \notin f(\mathfrak{F})$. Sind $B_1, B_2 \in f(\mathfrak{F})$, daher $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) \in \mathfrak{F}$, so folgt $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \in \mathfrak{F}$ und somit $B_1 \cap B_2 \in f(\mathfrak{F})$. Ist schließlich $B_2 \supseteq B_1 \in f(\mathfrak{F})$, so folgt $f^{-1}(B_2) \supseteq f^{-1}(B_1) \in \mathfrak{F}$ und somit $f^{-1}(B_2) \in \mathfrak{F}$, bzw. $B_2 \in f(\mathfrak{F})$. Also ist $f(\mathfrak{F})$ ein Filter, der wegen $f^{-1}(f(F)) \supseteq F \in \mathfrak{F}$ für $F \in \mathfrak{F}$ alle Bilder $f(F)$ enthält.

Ist \mathfrak{F} ein Ultrafilter und ist $f(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{G}$ für einen Filter \mathfrak{G} , so folgt $f(F) \cap G \neq \emptyset$ und infolge $F \cap f^{-1}(G) \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathfrak{F}, G \in \mathfrak{G}$. Damit erkennt man leicht, dass

$$\{H \subseteq X : \exists F \in \mathfrak{F}, G \in \mathfrak{G} : F \cap f^{-1}(G) \subseteq H\}$$

ein Filter ist, der offenbar \mathfrak{F} und $f^{-1}(\mathfrak{G})$ umfasst. Wegen der Maximalität muss dieser mit \mathfrak{F} übereinstimmen, und daher $f^{-1}(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{G} \subseteq f(\mathfrak{F})$. \square

In einem topologischen Raum sind uns gewisse Filter schon begegnet, nämlich die Umgebungfilter

$$\mathfrak{U}(x) := \{U \subseteq X : U \text{ ist Umgebung von } x\}.$$

1.3.5 Definition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $x \in X$. Ein Filter \mathfrak{F} auf X heißt *konvergent gegen x* , wenn \mathfrak{F} feiner ist als der Umgebungfilter $\mathfrak{U}(x)$ von x .

In unserem Zusammenhang ist es entscheidend, dass sich Kompaktheit mit Hilfe des Begriffes der Filterkonvergenz charakterisieren lässt.

1.3.6 Proposition. Für einen topologischer Raum (X, \mathcal{T}) sind äquivalent:

- (i) (X, \mathcal{T}) ist kompakt.
- (ii) Zu jedem Filter auf X gibt es einen in X konvergenten feineren Filter.
- (iii) Jeder Ultrafilter auf X konvergiert.

Beweis. Gelte (i), und sei \mathfrak{F} ein Filter auf X . Wegen der Filtereigenschaft hat das Mengensystem $\{\overline{F} : F \in \mathfrak{F}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, dh. der Durchschnitt von endlich vielen Mengen daraus ist nichtleer. Damit muss $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{F} \neq \emptyset$, da sonst der Übergang zu den Komplementen einen Widerspruch zur Kompaktheit ergäbe. Für ein x aus diesem Schnitt folgt $U \cap F \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $F \in \mathfrak{F}$. Somit ist

$$\mathfrak{G} := \{G \subseteq X : \exists U \in \mathfrak{U}(x), F \in \mathfrak{F} : U \cap F \subseteq G\}$$

ein Filter, der sicher $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{F}$ sowie $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{U}(x)$ erfüllt, womit $\mathfrak{G} \rightarrow x$.

Gilt (ii), und ist \mathfrak{F} ein Ultrafilter auf X , so stimmt jede konvergente Verfeinerung von \mathfrak{F} mit \mathfrak{F} überein; also gilt (iii).

Gelte nun (iii), und sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von X . Gäbe es keine endliche Teilüberdeckung, so hätte das aus abgeschlossenen Mengen bestehende Mengensystem $\mathcal{M} := \{O^c : O \in \mathcal{V}\}$ die endlichen Durchschnittseigenschaft. Insbesondere wäre damit

$$\mathfrak{G} := \{G \subseteq X : \exists n \in \mathbb{N}; M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M} : M_1 \cap \dots \cap M_n \subseteq G\}$$

ein Filter auf X . Ist nun $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{G} (\supseteq \mathcal{M})$ gemäß Lemma 1.3.3 ein Ultrafilter, und ist x eine gemäß Voraussetzung existierende Grenzwert davon, dh. $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}(x)$, so folgt insbesondere $U \cap M \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{U}(x) (\subseteq \mathfrak{F})$ und alle $M \in \mathcal{M} (\subseteq \mathfrak{F})$, und in Folge der Widerspruch

$$x \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \overline{M} = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \left(\bigcup_{O \in \mathcal{V}} O \right)^c = \emptyset.$$

□

Nach diesen Vorbereitungen ist der Beweis des Satzes von Tychonoff nicht mehr schwierig.

Beweis (von Satz 1.3.1). Wir setzen

$$X := \prod_{i \in I} X_i \quad \text{und} \quad \mathcal{T} := \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i,$$

und bezeichnen mit $\pi_i : X \rightarrow X_i$ die Projektion auf die i -te Komponente. Da \mathcal{T} die Produkttopologie ist, ist $\pi_i : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ stets stetig.

Setzt man voraus, dass (X, \mathcal{T}) kompakt ist, so ist jeder Raum (X_i, \mathcal{T}_i) als stetiges Bild eines kompakten Raumes ebenfalls kompakt.

Für die Umkehrung sei nun vorausgesetzt, dass (X_i, \mathcal{T}_i) für jedes $i \in I$ kompakt ist. Sei \mathfrak{F} ein Ultrafilter auf X . Für jedes $i \in I$ folgt aus Lemma 1.3.4, dass $\pi_i(\mathfrak{F})$ ein Ultrafilter auf X_i ist.

Nach Proposition 1.3.6 konvergiert $\pi_i(\mathfrak{F})$ gegen einen Punkt $x_i \in X_i$. Setzen wir $x := (x_i)_{i \in I} (\in X)$, so wollen wir zeigen, dass \mathfrak{F} gegen x konvergiert.

Betrachte eine Menge der Gestalt $U = \prod_{i \in I} U_i$ wobei $U_i \in \mathfrak{U}(x_i)$, $i \in I$, und $U_i = X_i$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$. Da $\pi_i(\mathfrak{F})$ gegen x_i konvergiert, gilt $U_i \in \pi_i(\mathfrak{F})$ für alle $i \in I$, und daher $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathfrak{F}$. Sind $i_1, \dots, i_n \in I$ jene Indizes mit $U_i \neq X_i$, dann folgt $U = \bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \in \mathfrak{F}$.

Da die Mengen U von dieser Gestalt eine Umgebungsbasis von x bezüglich der Produkttopologie bilden, folgt $\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathfrak{F}$.

□

1.4 Finale Topologie

1.4.1 Satz. Sei X eine Menge, seien (Y_i, \mathcal{T}_i) , $i \in I$, topologische Räume und $f_i : Y_i \rightarrow X$, $i \in I$, Abbildungen. Dann existiert genau eine Topologie \mathcal{T} auf X mit der Eigenschaft:

(FI₁) \mathcal{T} ist die feinste Topologie auf X , sodass alle Abbildungen $f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X, \mathcal{T})$, $i \in I$, stetig sind.

Diese Topologie heißt finale Topologie bezüglich der f_i . Sie ist gegeben durch

(FI₂) $\mathcal{T} = \{O \subseteq X : f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i \text{ für alle } i \in I\}$,

und erfüllt:

(FI₃) Ist (Y, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow Y$, so ist $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{O})$ stetig genau dann, wenn alle Abbildungen

$$f \circ f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (Y, \mathcal{O}), \quad i \in I,$$

stetig sind.

Beweis. Wir betrachten die durch (FI₂) definierte Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Es gilt

$$f_i^{-1}(O_1 \cap \dots \cap O_n) = f_i^{-1}(O_1) \cap \dots \cap f_i^{-1}(O_n)$$

und

$$f_i^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} O_j\right) = \bigcup_{j \in J} f_i^{-1}(O_j).$$

Sind also $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ bzw. $O_j \in \mathcal{T}, j \in J$, so folgt, da die \mathcal{T}_i Topologien sind, $O_1 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{T}$ und $\bigcup_{j \in J} O_j \in \mathcal{T}$. D.h. \mathcal{T} erfüllt (O2), (O3). Wegen $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f_i^{-1}(X) = Y_i$ gilt auch (O1) für \mathcal{T} .

Definitionsgemäß gilt $f_i^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}_i$, womit alle $f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ stetig sind. Ist \mathcal{T}' eine Topologie auf X , sodass alle f_i stetig sind, so folgt $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$ für alle $O \in \mathcal{T}'$, also $O \in \mathcal{T}$. Also gilt $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, und \mathcal{T} erfüllt (FI₁). Klarerweise gibt es höchstens eine Topologie mit der Eigenschaft (FI₁).

Sei \mathcal{T} die finale Topologie bezüglich der f_i , und sei $f : X \rightarrow Y$. Ist f stetig, so ist auch $f \circ f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{O})$ als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig. Sei umgekehrt $f \circ f_i$ stetig für alle i . Dann gilt

$$f_i^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O})) = (f \circ f_i)^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}_i, \quad i \in I,$$

und wir erhalten $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}$, d.h. f stetig. □

1.4.2 Bemerkung. Die Finale Topologie ist die einzige Topologie auf X , die (FI₃) erfüllt. Um das einzusehen, sei \mathcal{T}' eine weitere Topologie auf X mit der Eigenschaft (FI₃).

Da die Abbildung $\text{id}_X : (X, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ trivialerweise stetig ist, folgt aus (FI₃) angewandt auf \mathcal{T}' , dass alle $\text{id}_X \circ f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ stetig sind. Aus (FI₁) folgt $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

Für $\text{id}_X : (X, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ sind andererseits alle Abbildungen $\text{id}_X \circ f_i = f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ stetig. Mit (FI₃) angewandt auf \mathcal{T}' folgt die Stetigkeit von $\text{id}_X : (X, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$, und daher $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Insgesamt ist $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. //

1.4.3 Beispiel. Sei (Y, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf Y . Weiters sei $\pi : Y \rightarrow Y/\sim$ die kanonische Projektion, $\pi(x) = [x]_\sim$. Die finale Topologie auf Y/\sim bezüglich π heißt *Quotiententopologie* und wird bezeichnet als \mathcal{T}/\sim .

Ist $A \subseteq Y$, so heißt A *gesättigt* bezüglich \sim , wenn $x \in A$ die Inklusion $[x]_\sim \subseteq A$ nach sich zieht. Wegen $[x]_\sim = \pi^{-1}\{[x]_\sim\}$, wobei $[x]_\sim$ links als Teilmenge von Y und rechts als Element von Y/\sim zu verstehen ist, sind alle Mengen der Bauart $\pi^{-1}(B) = \bigcup_{[x]_\sim \in B} \pi^{-1}\{[x]_\sim\}$ mit $B \subseteq Y/\sim$ gesättigt, und A ist genau dann gesättigt, wenn $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. Somit stellt $A \mapsto \pi(A)$ eine bijektive Abbildung von allen gesättigten Teilmengen von Y auf alle Teilmengen von Y/\sim dar, wobei $B \mapsto \pi^{-1}(B)$ ihre Umkehrung ist.

Eine Menge $P \subseteq Y/\sim$ ist per definitionem genau dann offen in $(Y/\sim, \mathcal{T}/\sim)$, wenn $\pi^{-1}(P)$ offen in (Y, \mathcal{T}) ist. Insbesondere ist $O \mapsto \pi(O)$ eine Bijektion von allen gesättigten offenen Teilmengen von Y auf \mathcal{T}/\sim . Entsprechendes gilt für abgeschlossene Mengen. //

Jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ induziert auf X die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) = f(y).$$

Für $y \in [x]_{\sim} \in X/\sim$ folgt $f(x) = f(y)$. Also ist durch $g([x]_{\sim}) := f(x)$ eindeutig eine Funktion $g : X/\sim \rightarrow f(X)$ definiert, welche offenbar $g(\pi(x)) = f(x)$ für alle $x \in X$ erfüllt. Insbesondere ist $g : X/\sim \rightarrow f(X)$ surjektiv. Weil $g([x]_{\sim}) = g([y]_{\sim})$ die Beziehung $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$ und daher $x = y$ impliziert, ist $g : X/\sim \rightarrow f(X)$ sogar bijektiv, und erfüllt $f = \iota \circ g \circ \pi$, wobei $\iota : f(X) \rightarrow Y$ die Einbettungsabbildung bezeichnet.

1.4.4 Proposition. *Sei $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ eine stetige Abbildung. Mit obiger Notation ist $g : (X/\sim, \mathcal{T}/\sim) \rightarrow (f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$ stetig. Außerdem sind folgende Aussagen äquivalent*

- (i) *g ist ein Homöomorphismus von $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ auf $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$.*
- (ii) *Für jede bezüglich \sim gesättigte offene Menge $O \subseteq X$ ist $f(O)$ offen in $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$.*
- (iii) *Für jede bezüglich \sim gesättigte abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ ist $f(A)$ abgeschlossen in $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$.*

Beweis. Mit f ist auch $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$ stetig. Somit können wir $Y = f(X)$ und infolge $\iota = \text{id}_Y$ annehmen.

Die Stetigkeit von g folgt unmittelbar aus Satz 1.4.1, (FI_3) , da X/\sim die finale Topologie \mathcal{T}/\sim bzgl. π trägt und da $g \circ \pi = f$ stetig ist.

Die Funktion g ist nun genau dann Homöomorphismus, wenn noch g^{-1} stetig ist, d.h. wenn $g(P) \in \mathcal{V}$ für alle $P \in \mathcal{T}/\sim$. Nach Beispiel 1.4.3 durchläuft $\pi^{-1}(P)$ aber alle offenen und gesättigten Teilmengen von X . Zudem gilt

$$g(P) = g \circ \pi(\pi^{-1}(P)) = f(\pi^{-1}(P)),$$

woraus man sofort die Äquivalenz von (i) und (ii) erkennt. Die Äquivalenz von (i) und (iii) zeigt man entsprechend. □

Kapitel 2

Topologische Vektorräume

2.1 Topologische Vektorräume; stetige lineare Abbildungen

In der Funktionalanalysis beschäftigt man sich unter anderem mit der Theorie der topologischen Vektorräume – das sind Vektorräume, die zusätzlich mit einer „vernünftigen“ Topologie versehen sind – sowie dem Studium der (oft stetigen und/oder linearen) Abbildungen zwischen solchen.

Viele Begriffsbildungen und Sätze der Funktionalanalysis lassen sich als Verallgemeinerung von Begriffen und Aussagen der linearen Algebra und Geometrie auffassen oder sind aus solchen motiviert. Im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall spielt jedoch die Topologie eine wesentlich prominentere Rolle. Das ist hauptsächlich deshalb der Fall, weil es auf einem endlichdimensionalen Vektorraum genau eine „vernünftige“ Topologie gibt, vgl. Satz 2.2.1. Auf einem unendlichdimensionalen Vektorraum dagegen gibt es viele verschiedene Topologien. Diese Tatsache macht die Funktionalanalysis zu einem Zusammenspiel von linearer Algebra, Geometrie und Topologie. Eine wesentliche Rolle spielt auch die Maßtheorie, und das nicht nur für die theoretischen Aspekte. Sie ist auch Quelle vielfältiger Beispiele und Anwendungen.

Als erstes wollen wir klarmachen, was wir unter einer „vernünftigen“ Topologie auf einem Vektorraum verstehen. Das Mindeste, das man sich wohl erwarten wird, ist, dass die algebraischen Operationen stetig sind.

Um eine größere Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden wir uns im gesamten Skriptum, wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, immer auf Vektorräume über dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen beschränken. Fast alle Ergebnisse gelten aber genauso für Vektorräume über \mathbb{R} .

Zudem wollen wir im Folgenden für einen Vektorraum X und $A, B \subseteq X, x \in X$ mit $A + B$ immer die Menge

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

bezeichnen bzw. mit $x + A$ die Menge $\{x + a : a \in A\}$, für die klarerweise auch $x + A = A + x = \{x\} + A = A + \{x\}$ gilt.

2.1.1 Definition. Sei X ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen, und sei \mathcal{T} eine Topologie auf X . Wir sagen, (X, \mathcal{T}) ist ein *topologischer Vektorraum*, wenn gilt:

(TV1) Die Abbildung

$$+ : \begin{cases} X \times X & \rightarrow X \\ (x, y) & \mapsto x + y \end{cases}$$

ist stetig, wobei X mit der Topologie \mathcal{T} und $X \times X$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ versehen ist.

(TV2) Die Skalarmultiplikation

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{C} \times X & \rightarrow X \\ (\lambda, x) & \mapsto \lambda x \end{cases}$$

ist stetig, wobei \mathbb{C} mit der üblichen (von der euklidischen Metrik $|x - y|$ induzierten) Topologie \mathcal{E} und $\mathbb{C} \times X$ mit der Produkttopologie $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$ versehen ist.

Wir wollen weiters immer fordern, dass die Topologie \mathcal{T} Hausdorff ist, dh. es gilt das zweite Trennungsaxiom (T2); vgl. Bemerkung 2.1.10.

2.1.2 Beispiel. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und bezeichne \mathcal{T} die von der Norm induzierte Topologie. Dann ist (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum. Denn, wegen

$$\|(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)\| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|$$

gilt $U_\epsilon^X(x_1) + U_\epsilon^X(x_2) \subseteq U_{2\epsilon}(x_1 + x_2)$ womit die Addition stetig ist. Aus

$$\begin{aligned} \|\alpha x - \beta y\| &\leq \|\alpha(x - y)\| + \|(\alpha - \beta)y\| \\ &\leq |\alpha|\|x - y\| + |\alpha - \beta|\|y\| \end{aligned}$$

folgt $U_\epsilon^{\mathbb{C}}(\alpha) \cdot U_\epsilon^X(x) \subseteq U_{\epsilon(|\alpha| + \|x\| + \epsilon)}^X(\alpha x)$ und damit die Stetigkeit der Skalarmultiplikation. Hier und auch später steht $U_\epsilon(x)$ bzw. $K_\epsilon(x)$ für die offene bzw. abgeschlossene ϵ -Kugel um x in dem betreffenden metrischen Raum. Schließlich bemerke man, dass jeder metrische Raum Hausdorff ist.

Wir wollen anmerken, dass bei weitem nicht alle interessanten topologischen Vektorräume normierte Räume sind. //

2.1.3 Lemma. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum, und seien $a \in X$ sowie $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben. Dann gilt:

(i) Die Abbildungen

$$T_a : \begin{cases} X & \rightarrow X \\ x & \mapsto a + x \end{cases} \quad M_\lambda : \begin{cases} X & \rightarrow X \\ x & \mapsto \lambda x \end{cases}$$

sind Homöomorphismen. Man bezeichnet T_a auch als Translation.

(ii) Die Abbildung

$$S_a : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow X \\ \lambda & \mapsto \lambda a \end{cases}$$

ist stetig.

Beweis. Wir wollen nur die Aussagen für T_a beweisen. Die anderen Abbildungen sind analog zu behandeln. T_a lässt sich als Zusammensetzung der stetigen Abbildungen $x \in X \mapsto (a, x) \in X^2$ und $(a, x) \mapsto a + x \in X$ betrachten, und ist somit selber stetig. Wegen $T_a \circ T_{-a} = T_{-a} \circ T_a = \text{id}_X$ gilt $T_a^{-1} = T_{-a}$, womit diese Abbildung auch stetig ist. \square

2.1.4 Korollar. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum, $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ist $\mathfrak{V}(0)$ der Umgebungsfilter von 0 (bzw. eine Umgebungsbasis von 0), so ist

$$x + \mathfrak{V}(0) := \{x + \lambda V : V \in \mathfrak{V}(0)\}$$

der Umgebungsfilter von x (bzw. eine Umgebungsbasis von x). Die offenen Umgebungen von x sind dabei genau die Mengen der Form $x + \lambda U$, wobei U eine offene Nullumgebung ist.

Beweis. Da M_λ und T_x Homöomorphismen sind, bildet $T_x \circ M_\lambda$ den Umgebungsfilter von 0 (eine Umgebungsbasis von 0) auf den Umgebungsfilter von $T_x \circ M_\lambda(0) = x$ (eine Umgebungsbasis von $T_x \circ M_\lambda(0) = x$) ab. Dabei werden die offene Umgebungen genau auf die offenen Umgebungen abgebildet. \square

2.1.5 Definition. Die Teilmenge A eines Vektorraumes X heißt

- (i) *absorbierend*, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $t > 0$ gibt mit $tx \in A$.
- (ii) *symmetrisch*, wenn gilt $-A = A$, wobei $-A := \{-x : x \in A\}$.
- (iii) *kreisförmig*, wenn für alle $x \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$, auch $\lambda x \in A$ gilt.
- (iv) *konvex*, wenn gilt für alle $x, y \in A$ und $t \in [0, 1]$ auch

$$tx + (1 - t)y \in A,$$

d.h. wenn die Menge A mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält.

2.1.6 Bemerkung. Kreisförmige Mengen sind offenbar symmetrisch. Nichtleere kreisförmige Mengen enthalten immer die Null. Eine kreisförmige Teilmenge von \mathbb{C} hat genau eine der folgenden Bauweisen ($\eta > 0$)

$$\emptyset, \{0\}, U_\eta^{\mathbb{C}}(0), K_\eta^{\mathbb{C}}(0), \mathbb{C}.$$

Damit eine Teilmenge A von X konvex ist, reicht es offenbar, dass $tx + (1 - t)y \in A$ für alle $x, y \in A$ und alle $t \in (0, 1)$. Konvexe Mengen A mit $0 \in A$ erfüllen zudem $tx = tx + (1 - t)0 \in A$ für alle $x \in A$ und $t \in [0, 1]$. //

2.1.7 Lemma. In einem topologischen Vektorraum (X, \mathcal{T}) gilt:

- (i) *Der Abschluss einer konvexen (symmetrischen, kreisförmigen) Menge bzw. eines linearen Unterraumes ist konvex (symmetrisch, kreisförmig) bzw. wieder ein linearer Unterraum.*

- (ii) *Das Innere einer konvexen bzw. symmetrischen Menge ist konvex bzw. symmetrisch. Das Innere einer kreisförmigen Menge ist kreisförmig, falls 0 im Inneren liegt.*

Beweis. Um (i) zu sehen, betrachte eine beliebige Menge A und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Wegen der Stetigkeit der Vektorraumoperationen gilt

$$\alpha\overline{A} + \beta\overline{A} \subseteq \overline{(\alpha A + \beta A)}.$$

Mit geeigneter Wahl von α und β ($\alpha, \beta \in [0, 1]$ mit $\alpha + \beta = 1$ im konvexen Fall; $\alpha = -1, \beta = 0$ im symmetrischen Fall; $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| \leq 1, \beta = 0$ im kreisförmigen Fall; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ beliebig im Fall eines linearen Unterraumes) folgt $\alpha\overline{A} + \beta\overline{A} \subseteq \overline{(\alpha A + \beta A)} \subseteq \overline{A}$ und damit die entsprechenden Aussagen.

Für (ii) sei zuerst eine konvexe Menge A und $x, y \in A^\circ, t \in (0, 1)$, gegeben. Dann folgt $tx + (1-t)y \in tx + (1-t)A^\circ$. Letztere Menge ist offen und wegen der Konvexität von A in A enthalten. Also ist $tx + (1-t)y \in A^\circ$. Die Behauptung für symmetrische bzw. kreisförmige Mengen wird analog bewiesen, wobei der 0 ihre Sonderrolle zukommt, weil M_λ aus Lemma 2.1.3 nur für $\lambda \neq 0$ ein Homöomorphismus ist. □

2.1.8 Lemma. *Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum, und sei U eine Umgebung der Null. Dann gilt:*

- (i) *U ist absorbierend.*
(ii) *Sei $n \in \mathbb{N}$. Es existiert eine symmetrische Nullumgebung V mit*

$$\underbrace{V + V + \dots + V}_{n\text{-mal}} \subseteq U.$$

- (iii) *Es gibt eine kreisförmige offene Nullumgebung W mit $W \subseteq U$.*
(iv) *Ist U zusätzlich konvex, dann gibt es eine kreisförmige, offene und konvexe Nullumgebung B mit $B \subseteq U$.*

Beweis.

ad(i): Ist $x \in X$ gegeben, so gilt $S_x(0) = 0 \cdot x = 0 \in U$. Also ist nach Lemma 2.1.3, (ii), $S_x(t) = tx \in U$ für hinreichend kleine Werte von t .

ad(ii): Wegen $0 + 0 = 0$ und der Stetigkeit von $+$ bei $(0, 0)$ existieren Nullumgebungen W_1, W_2 mit $W_1 + W_2 \subseteq U$. Mit W_i ist auch $-W_i$ eine Nullumgebung, und daher gilt

$$V_2 := W_1 \cap W_2 \cap (-W_1) \cap (-W_2) \in \mathfrak{U}(0) \text{ und } -V_2 = V_2 \text{ sowie } V_2 + V_2 \subseteq U.$$

Wendet man diese Überlegung wiederum auf V_2 an, so erhält man eine symmetrische Nullumgebung V_4 mit $V_4 + V_4 + V_4 + V_4 \subseteq U$, und mit $V_3 := V_4$ wegen $0 \in V_3$ auch $V_3 + V_3 + V_3 \subseteq V_4 + V_4 + V_4 + V_4 \subseteq U$. Verföhrt man induktiv weiter, so folgt die Behauptung.

ad(iii): Sei U eine Umgebung der 0. Wegen $0 \cdot 0 = 0$ kann man wegen der Stetigkeit der skalaren Multiplikation $\delta > 0$ und $V \in \mathfrak{U}(0)$ offen so wählen, dass $\alpha V \subseteq U$ für alle $|\alpha| < \delta$. Für

$$W := \bigcup_{|\alpha| < \delta} \alpha V$$

ist $W \in \mathfrak{U}(0)$ offen, $W \subseteq U$, und $\gamma W \subseteq W$ für $|\gamma| \leq 1$.

ad(iv): Sei U eine konvexe Nullumgebung. Wähle W wie in (iii) und setze

$$A := \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U.$$

Für $|\alpha| = 1$ gilt $\alpha^{-1}W = W$, womit $W \subseteq \alpha U$. Es folgt $W \subseteq A$, was $A \in \mathfrak{U}(0)$ nach sich zieht. Klarerweise gilt $A \subseteq U$, und als Durchschnitt konvexer Mengen ist A konvex. Um die Kreisförmigkeit von A zu zeigen, sei $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| \leq 1$ gegeben, und schreibe $\gamma = r\beta$ mit $0 \leq r \leq 1$, $|\beta| = 1$. Dann gilt

$$\gamma A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha U.$$

Da die Menge U konvex ist und 0 enthält, gilt $rU \subseteq U$ für $r \in [0, 1]$, womit $\gamma A \subseteq A$. Schließlich ist $B := A^\circ$ die gesuchte Menge. \square

Wir haben in der Definition eines topologischen Vektorraumes verlangt, dass die Topologie Hausdorff ist, dass also je zwei verschiedene Punkte durch disjunkte offene Mengen getrennt werden können. Insbesondere ist auch jede einelementige Menge abgeschlossen. Mit Hilfe der Stetigkeit der algebraischen Operationen erhält man daraus eine viel stärkere Trennungseigenschaft.

2.1.9 Proposition. *Sei X ein topologischer Vektorraum, K, C disjunkte Teilmengen von X , K kompakt und C abgeschlossen. Dann existiert eine offene Umgebung V der Null, sodass*

$$(C + V) \cap (K + V) = \emptyset.$$

Beweis. Ist $K = \emptyset$, so ist für jedes V auch $K + V = \emptyset$ und die Behauptung daher trivial. Sei also $K \neq \emptyset$, und sei $x \in K$. Wegen $x \notin C$ und C abgeschlossen existiert eine symmetrische und offene Nullumgebung V_x mit $x + V_x + V_x + V_x \subseteq X \setminus C$, woraus

$$(C + V_x) \cap (x + V_x + V_x) = \emptyset \quad (2.1.1)$$

folgt. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_n \in K$ mit

$$K \subseteq (x_1 + V_{x_1}) \cup \dots \cup (x_n + V_{x_n}).$$

Für $V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$ gilt wegen (2.1.1)

$$\begin{aligned} (C + V) \cap (K + V) &\subseteq (C + V) \cap \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^n (C + V_{x_i}) \cap (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) = \emptyset. \end{aligned}$$

□

2.1.10 Bemerkung.

- (i) Wegen $K + V = \bigcup_{x \in K} (x + V)$ und $C + V = \bigcup_{x \in C} (x + V)$ sind diese Mengen offen und wegen $0 \in V$ auch Obermengen von K bzw. C . Also lassen sich in topologischen Vektorräumen kompakte Mengen von disjunkten abgeschlossenen Mengen durch offene Menge trennen.
- (ii) Da einpunktige Mengen kompakt sind, lassen sich Punkte und diese Punkte nicht enthaltende abgeschlossene Mengen durch offene Menge trennen. Also gilt in topologischen Vektorräumen immer das dritte Trennungssaxiom (T3). Insbesondere ist der topologische Vektorraum, so wie wir ihn in Definition 2.1.1 definiert haben, reguläre, dh. es gilt (T2) und (T3).
- (iii) Wie schon oben erwähnt, sind in jedem Hausdorff Raum alle einpunktigen Mengen abgeschlossen, weil sich wegen (T2) das Komplement jeder einpunktigen Menge als Vereinigung offener Mengen schreiben lässt.

Für topologische Räume mit der Eigenschaft, dass alle einpunktigen Mengen abgeschlossen sind, sagt man, dass sie das Trennungssaxiom (T1) erfüllen. Insbesondere folgt aus (T2) immer (T1). Im Allgemeinen gilt auf topologischen Räumen aber nicht die Umkehrung.

Erfüllt ein topologischer Raum aber das (T3) und das (T1), so folgt offenbar auch das (T2) und somit die Regularität.

- (iv) Sei nun X ein Vektorraum versehen mit einer Topologie \mathcal{T} , die alle in Definition 2.1.1 geforderten Eigenschaften bis auf das (T2) erfüllt, dh. einen *im Allgemeinen nicht Hausdorffschen topologischen Vektorraum* abgibt. Man überzeugt sich dann leicht davon, dass alles bisher über topologische Vektorräume Bewiesene – insbesondere Proposition 2.1.9 – auch für unser allgemeineres X richtig ist. Also kann man auch hier kompakte Mengen von disjunkten abgeschlossenen Mengen durch offene Mengen trennen. Wieder, weil alle einpunktigen Mengen kompakt sind, erfüllt (X, \mathcal{T}) das Trennungssaxiom (T3).

Stellt man an (X, \mathcal{T}) die zusätzliche Forderung, dass alle einpunktigen Mengen abgeschlossen sind, dh. das (T1), so folgt daraus wie im letzten Punkt bemerkt, dass (X, \mathcal{T}) schon das (T2) erfüllt. Damit ist (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum mit genau den Eigenschaften von Definition 2.1.1. Also ist die Forderung (T2) in Definition 2.1.1 unnötig stark, und es ergeben sich die gleichen Objekte, wenn man nur (T1) fordert.

Man beachte schließlich, dass in im Allgemeinen nicht Hausdorffschen topologischen Vektorräumen wegen Lemma 2.1.3 das (T1) schon gilt, wenn mindestens ein Punkt abgeschlossen ist.

//

Kommen wir nun zur Diskussion der strukturerhaltenden Abbildungen zwischen topologischen Vektorräumen, das sind stetige lineare Abbildungen.

2.1.11 Proposition. *Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{V}) zwei topologische Vektorräume, und sei $R : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) R ist stetig.

(ii) R ist stetig in einem Punkt von X .

Beweis. Wir müssen nur $(ii) \Rightarrow (i)$ zeigen. Sei R in x_0 stetig, und sei $x \in X$ beliebig. Es folgt

$$R(y) = R(y - x + x_0) + R(x - x_0) \quad \text{für alle } y \in X,$$

und daher $R = T_{R(x-x_0)}RT_{x_0-x}$. Dabei sind $T_{R(x-x_0)}$ und T_{x_0-x} Translationen, vgl. Lemma 2.1.3, (i). Da diese stetig sind, und da $T_{x_0-x}(x) = x_0$ ist, folgt, dass R bei x stetig ist. \square

Wendet man Proposition 2.1.11 auf $\text{id} : (X, \mathcal{T}_2) \rightarrow (X, \mathcal{T}_1)$ bzw. auch auf $\text{id} : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ mit zwei Topologien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ an, so erhalten wir

2.1.12 Korollar. Sei X ein Vektorraum, und seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X , die X zu einem topologischen Vektorraum machen. Bezeichne mit $\mathfrak{U}_1(x)$ bzw. $\mathfrak{U}_2(x)$ die Umgebungsfilter des Punktes x bzgl. \mathcal{T}_1 bzw. \mathcal{T}_2 .

Gibt es einen Punkt $x_0 \in X$, sodass $\mathfrak{U}_1(x_0) \subseteq \mathfrak{U}_2(x_0)$ bzw. $\mathfrak{U}_1(x_0) = \mathfrak{U}_2(x_0)$, so folgt schon $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ bzw. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

2.1.13 Bemerkung. Seien X, Y normierte Räume. Dann ist eine lineare Abbildung $R : X \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist. Wir bezeichnen die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen von X nach Y mit $\mathcal{B}(X, Y)$. Diese ist, versehen mit der Operatornorm $\|R\| := \sup\{\|Rx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$, ein normierter Raum. $\mathcal{B}(X, Y)$ ist sogar ein Banachraum, falls Y ein Banachraum ist. \parallel

Eine spezielle Rolle spielen *lineare Funktionale*, das sind lineare Abbildungen von X in den Skalarkörper. Für diese gilt

2.1.14 Proposition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ linear, $f \neq 0$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig.

(ii) $\ker f$ ist abgeschlossen.

(iii) $\ker f$ ist nicht dicht in X .

(iv) Es existiert eine Nullumgebung U , sodass $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt ist.

Beweis. $\ker f$ ist eine Hyperebene in X , d.h. ein linearer Unterraum mit Kodimension 1. Wegen $\overline{\ker f} \supseteq \ker f$ ist also entweder $\overline{\ker f} = \ker f$ oder $\overline{\ker f} = X$.

Damit folgt (ii) \Leftrightarrow (iii). Es gilt auch (i) \Rightarrow (ii), denn für stetiges f ist $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen.

Für (i) \Rightarrow (iv) betrachte für ein stetiges f die Menge $U := f^{-1}(U_1^{\mathbb{C}}(0))$. Diese ist offen und enthält 0, also $U \in \mathfrak{U}(0)$, und $f(U) \subseteq U_1^{\mathbb{C}}(0)$ ist offenbar beschränkt.

Für (iv) \Rightarrow (i) sei umgekehrt $U \in \mathfrak{U}(0)$ so, dass $f(U)$ in einer gewissen Kreisscheibe $U_r^{\mathbb{C}}(0)$ mit $0 < r < \infty$ enthalten ist. Für $\epsilon > 0$ gilt $\frac{\epsilon}{r}U \in \mathfrak{U}(0)$ und $f(\frac{\epsilon}{r}U) = \frac{\epsilon}{r}f(U) \subseteq U_\epsilon^{\mathbb{C}}(0)$, womit sich f als stetig bei 0 herausstellt. Wegen Proposition 2.1.11 ist f überall stetig.

Wir zeigen schließlich $(iii) \Rightarrow (iv)$. Dazu sei U eine nichtleere offene Menge mit $U \cap \ker f = \emptyset$. Wegen Korollar 2.1.4 und Lemma 2.1.8 können wir annehmen, dass $U = x_0 + W$ mit einem Punkt $x_0 \in X$ und einer kreisförmigen Nullumgebung W . Wegen der Linearität von f ist auch $f(W)$ kreisförmig.

Die kreisförmigen Teilmengen von \mathbb{C} sind aber genau die (offenen oder abgeschlossenen) Kreisscheiben mit Radius $0 \leq r < \infty$ sowie ganz \mathbb{C} . Angenommen $f(W) = \mathbb{C}$, dann gibt es $y \in W$ mit $f(y) = -f(x_0)$. Damit hätten wir den Widerspruch $x_0 + y \in (x_0 + W) \cap \ker f$. Also bildet f die Nullumgebung W in eine gewisse Kugel $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ mit $r < \infty$ ab. □

2.1.15 Bemerkung. Im Allgemeinen ist nicht jedes lineare Funktional auch stetig. Es ist aber jedes lineare Funktional $f \neq 0$ auf einem topologischem Vektorraum offen, bildet also offene Mengen auf offene Teilmengen von \mathbb{C} ab. Um das einzusehen sei $y \in X$ so, dass $f(y) \neq 0$.

Ist nun $O \subseteq X$ offen und $f(x) \in f(O)$ mit $x \in O$, so gibt es wegen der Stetigkeit der Abbildung $\lambda \mapsto x + \lambda y$ bei $\lambda = 0$ ein $\epsilon > 0$, sodass $x + \lambda y \in O$ für alle $\lambda \in \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \epsilon\}$.

Es folgt $f(x) + \lambda f(y) = f(x + \lambda y) \in f(O)$ für alle $|\lambda| < \epsilon$. Also ist die ganze offene Kreisscheibe mit Radius $\epsilon|f(y)| > 0$ um $f(x)$ in $f(O)$. //

Für einen \mathbb{C} -Vektorraum X bezeichnen wir mit X^* die Menge aller linearen Abbildungen von X in den Skalkörper \mathbb{C} , und sprechen vom *algebraischen Dualraum* von X . Entsprechend ist der algebraischen Dualraum eines \mathbb{R} -Vektorraums definiert.

2.1.16 Definition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum über \mathbb{C} . Dann bezeichnen wir mit $(X, \mathcal{T})'$ die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von X in den Skalkörper \mathbb{C} , und sprechen vom *topologischen Dualraum*[†] von (X, \mathcal{T}) .

Ist aus dem Zusammenhang klar, auf welche Topologie \mathcal{T} wir uns beziehen, dann schreiben wir auch kürzer X' und sprechen einfach vom *Dualraum*.

Die Untersuchung des Zusammenspiels zwischen dem Raum X und dem Raum X' nimmt eine wesentliche Rolle in der Funktionalanalysis ein. Auch wir werden uns oft damit beschäftigen.

2.1.17 Bemerkung. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum und X' sein Dualraum.

- (i) Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum und X' sein Dualraum. Da eine Linearkombination zweier stetiger \mathbb{C} -wertiger Funktionen wieder stetig ist, muss X' jedenfalls ein Unterraum von X^* sein. Im Allgemeinen muss X' aber nicht mit X^* übereinstimmen. Es gibt Beispiele, bei denen diese Dualräume aber doch gleich sind, zB. im Fall $\dim X < \infty$, siehe Korollar 2.2.3.

Ad hoc kann man auch nicht sagen, um wieviel größer X' im Vergleich zu $\{0\}$ ist. Tatsächlich gibt es auch Beispiele von topologischen Vektorräumen mit $X' = \{0\}$. Also gilt im Allgemeinen nur

$$\{0\} \subseteq X' \subseteq X^*.$$

[†]In vielen Lehrbüchern über Funktionalanalysis – darunter auch [R1] und [C] aus denen ein Großteil dieser Vorlesung entnommen wurde – wird genau die umgekehrte Bezeichnungweise verwendet. Dort ist X' der algebraische Dualraum und X^* der topologische Dualraum. Leider ist in dieser Beziehung die Notation in der Fachliteratur sehr uneinheitlich.

- (ii) X' trägt von vornherein keine ausgezeichnete Topologie. Wir werden später verschiedene Möglichkeiten kennenlernen, X' zu einem topologischen Vektorraum zu machen.

Ist X ein normierter Raum, so kennen wir bereits eine kanonische Möglichkeit auf X' eine Topologie zu definieren. Denn dann ist ja $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$, und daher, versehen mit der Operatornorm, sogar ein Banachraum, vgl. Bemerkung 2.1.13.

//

2.2 Endlichdimensionale Topologische Vektorräume

Zunächst bemerke, dass man auf \mathbb{C}^n die *euklidische Norm*

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n,$$

hat. Mit dieser ist \mathbb{C}^n ein Banachraum, und die induzierte Topologie (die *euklidische Topologie*) ist gerade die Produkttopologie der Euklidischen Topologie auf \mathbb{C} .

2.2.1 Satz. *Sei X ein topologischer Vektorraum. Für einen n -dimensionalen ($n \in \mathbb{N}$) linearen Unterraum Y von X gilt:*

- (i) *Jeder Isomorphismus von \mathbb{C}^n auf Y ist auch ein Homöomorphismus (von $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ auf Y mit der Spurtopologie von X).*

- (ii) *Y ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei e_1, \dots, e_n die kanonische Basis $(1, 0, \dots, 0)^T, \dots, (0, \dots, 0, 1)^T$ im \mathbb{C}^n . Für ein lineares $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow X$ gilt

$$\phi \left(\sum_{i=1}^n \beta_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi(e_i).$$

Weiters hängen die Koordinaten β_i eines Vektors $x = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ wegen $|\beta_i| \leq \|x\|_2$ stetig von x ab. Da die algebraischen Operationen in X stetig sind, hängt auch $\phi(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi(e_i)$ stetig von x ab. Also ϕ ist stetig.

Sei nun $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow Y$ linear und bijektiv. Als Bild der kompakten Teilmenge $K_1^{\mathbb{C}^n}(0) \setminus U_1^{\mathbb{C}^n}(0) := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\|_2 = 1\}$ von \mathbb{C}^n unter einer stetigen Funktion ist $K := \phi(K_1^{\mathbb{C}^n}(0) \setminus U_1^{\mathbb{C}^n}(0))$ auch kompakt. Da X das (T2) erfüllt, ist K auch abgeschlossen in X . Wegen $\ker \phi = \{0\}$ gilt $0 \in X \setminus K$. Wähle $V \in \mathcal{U}(0)$ kreisförmig und offen mit $V \subseteq X \setminus K$, und betrachte

$$E := \phi^{-1}(V \cap Y) (\subseteq \mathbb{C}^n).$$

Diese Menge ist wegen der Linearität von ϕ auch kreisförmig und erfüllt

$$E \cap K_1^{\mathbb{C}^n}(0) \setminus U_1^{\mathbb{C}^n}(0) = \phi^{-1}(V \cap Y \cap K) = \emptyset.$$

Somit muss $\|z\|_2 < 1$ für alle $z \in E$ gelten, dh. $E \subseteq U_1^{\mathbb{C}^n}(0)$.

Um die Stetigkeit von $\phi^{-1} : Y \rightarrow \mathbb{C}^n$ bei 0 zu zeigen, sei $\epsilon > 0$. Für die bezüglich der Spurtopologie in Y offene Nullumgebung $\epsilon(V \cap Y)$ gilt

$$\phi^{-1}(\epsilon(V \cap Y)) = \epsilon\phi^{-1}(V \cap Y) = \epsilon E \subseteq U_\epsilon^{\mathbb{C}^n}(0).$$

Also ist ϕ^{-1} stetig an der Stelle 0, und wegen der Linearität daher überall stetig, vgl. Proposition 2.1.11.

Für den Beweis von (ii), wähle eine lineare Bijektion $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow Y$ und wähle V wie im Beweis zu (i). Sei $p \in \overline{Y}$. Weil V absorbierend ist, gibt es zunächst ein $t > 0$ mit $tp \in V$ bzw. $p \in \frac{1}{t}V$.

Da $\frac{1}{t}V$ offen ist, ist für jede Umgebung U von p auch $U \cap \frac{1}{t}V$ eine Umgebung von p , woraus wegen $p \in \overline{Y}$ immer $U \cap \frac{1}{t}V \cap Y \neq \emptyset$ gilt. Also gilt auch $p \in \overline{Y \cap (\frac{1}{t}V)}$. Wegen

$$Y \cap (\frac{1}{t}V) = \frac{1}{t}(Y \cap V) = \phi(\frac{1}{t}E) \subseteq \phi(\frac{1}{t}U_1^{\mathbb{C}^n}(0)) \subseteq \phi(K_{\frac{1}{t}}^{\mathbb{C}^n}(0)),$$

liegt p auch im Abschluss der rechten Seite. Als Bild einer kompakten Teilmenge von \mathbb{C}^n unter einer stetigen Funktion ist die rechte Seite aber ohnehin kompakt und damit abgeschlossen. Wir schließen daher auf

$$p \in \phi(K_{\frac{1}{t}}^{\mathbb{C}^n}(0)) \subseteq Y,$$

und damit auf $Y = \overline{Y}$. □

2.2.2 Korollar. *Auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum X – insbesondere auf \mathbb{C}^n – gibt es genau eine Topologie, die diesen zu einem topologischen Vektorraum macht. Damit sind auch alle Normen auf X – insbesondere auf \mathbb{C}^n – äquivalent.* □

2.2.3 Korollar. *Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum mit $\dim X < \infty$. Dann gilt $\dim X' = \dim X$ und $X' = X^*$.*

Beweis. Für eine lineare Bijektion $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow X$ mit $n = \dim X$ – wegen Satz 2.2.1 ist ϕ gleichzeitig ein Homöomorphismus – ist $f \mapsto f \circ \phi$ eine lineare Bijektion von X' auf $(\mathbb{C}^n)'$. Da jedes Element von $(\mathbb{C}^n)^*$ eindeutig durch $x \mapsto (x, y)$ für ein eindeutiges $y \in \mathbb{C}^n$ dargestellt werden kann (vgl. auch Proposition 3.2.5), und da $x \mapsto (x, y)$ wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung stetig bzgl. $\|\cdot\|_2$ ist, gilt $(\mathbb{C}^n)' = (\mathbb{C}^n)^*$. Es folgt $\dim X' = \dim(\mathbb{C}^n)^* = n = \dim X$. Wegen $\dim X^* = n$ gilt auch $X^* = X'$. □

Im Beweis von Satz 2.2.1 spielt die Kompaktheit der Einheitskugel $\{z \in \mathbb{C}^n : \|z\|_2 = 1\}$ im \mathbb{C}^n eine wesentliche Rolle. Diese wird durch den Satz von Heine-Borel gewährleistet, der auch zeigt, dass die ganze abgeschlossene Einheitskugel $K_1^{\mathbb{C}^n} := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\|_2 \leq 1\}$ bezüglich der euklidischen Topologie kompakt ist. Wir wollen nun beweisen, dass die Existenz einer kompakten Nullumgebung bereits endlichdimensionale topologische Vektorräume charakterisiert.

2.2.4 Proposition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum. Dann existiert eine kompakte Umgebung der Null genau dann, wenn $\dim X < \infty$.

Beweis. Ist $\dim X < \infty$, dann ist wegen Korollar 2.2.2 die Topologie von X die euklidische Topologie. Wie oben bemerkt, ist somit die Einheitskugel kompakt.

Umgekehrt sei angenommen, dass $V \in \mathfrak{U}(0)$ kompakt ist. Wähle $W \in \mathfrak{U}(0)$ offen und kreisförmig mit $W \subseteq V$. Wegen $\bigcup_{x \in V} (x + \frac{1}{2}W) \supseteq V$ und wegen der Kompaktheit von V gibt es endlich viele Elemente $x_1, \dots, x_n \in V$, sodass

$$\bigcup_{k=1}^n (x_k + \frac{1}{2}W) \supseteq V \supseteq W.$$

Setzen wir $Y := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, so folgt

$$W \subseteq Y + \frac{1}{2}W \subseteq Y + \frac{1}{2}(Y + \frac{1}{2}W) = Y + \frac{1}{4}W \subseteq \dots \subseteq Y + \frac{1}{2^k}W \subseteq \dots$$

also $W \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (Y + \frac{1}{2^k}W)$.

Zudem enthält jede Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(0)$ eine Menge der Form $\frac{1}{2^k}W$ für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$. Um das einzusehen, sei $U' \in \mathfrak{U}(0)$ offen und kreisförmig mit $U' \subseteq U$. Dann ist U' als Nullumgebung absorbierend, was zusammen mit ihrer Kreisförmigkeit

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} 2^k U' = X \supseteq V$$

bedingt, wobei $2^k U' \subseteq 2^{k+1} U'$. Wegen der Kompaktheit gilt für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$, dass $2^k U' \supseteq V \supseteq W$ und infolge $U \supseteq U' \supseteq \frac{1}{2^k}W$.

Für $x \in W$ und beliebiges $U \in \mathfrak{U}(0)$ folgt mit einem $k \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{2^k}W \subseteq U$, wegen $x \in W \subseteq Y + \frac{1}{2^k}W$

$$(x + U) \cap Y \supseteq (x + \frac{1}{2^k}W) \cap Y \neq \emptyset.$$

Wir erhalten $x \in \overline{Y}$. Da Y endlichdimensional ist, gilt $Y = \overline{Y}$, und es folgt $W \subseteq Y$. Da W absorbierend ist, gilt schließlich $X = Y$. □

2.3 Einige Beispiele

2.3.1 Beispiel. Als erstes und auch durchaus fundamentales Beispiel wollen wir die aus der Maßtheorie bekannten L^p -Räume anführen.

Sei Ω eine Menge versehen mit einer σ -Algebra \mathcal{A} und μ ein positives Maß auf Ω . Weiters sei $1 \leq p < \infty$ gegeben. Dann bezeichnet $L^p(\mu)$ die Menge aller (Äquivalenzklassen von μ -f.ü. gleichen) messbaren Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, für die gilt

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dann ist $\|\cdot\|_p : L^p(\mu) \rightarrow [0, \infty)$ eine Norm und $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

Für eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichne $\|f\|_\infty$ das *essentielle Supremum* von $|f|$,

$$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \mu((|f|)^{-1}(\alpha, \infty]) = 0 \},$$

und $L^\infty(\mu)$ die Menge aller (Äquivalenzklassen μ -f.ü. gleicher) messbarer Funktionen f mit $\|f\|_\infty < \infty$. Wieder ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm und $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Der Dualraum des Raumes $L^p(\mu)$ kann explizit bestimmt werden, vgl. Vorlesung Analysis 3 bzw. Maßtheorie. Sei $1 < p < \infty$, und sei $q \in (1, \infty)$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist die Abbildung Φ , die jedem $g \in L^q(\mu)$ das lineare Funktional

$$\Phi(g)f := \int_{\Omega} fg \, d\mu, \quad f \in L^p(\mu),$$

zuordnet, ein isometrischer Isomorphismus von $L^q(\mu)$ auf $L^p(\mu)'$. Im Falle $p = 1$ gilt das unter der zusätzlichen Annahme, dass μ ein σ -endliches Maß ist.

Der Dualraum von $L^\infty(\mu)$ ist von wesentlich komplizierterer Gestalt. Er kann identifiziert werden mit gewissen endlich-additiven Mengenfunktionen auf Ω , vgl. [DS]. //

2.3.2 Beispiel. Zwei spezielle Situationen der in Beispiel 2.3.1 betrachteten Räume treten häufig auf.

- (i) Ist Ω eine Teilmenge von \mathbb{R} oder \mathbb{R}^n , und ist μ das Lebesgue-Maß auf Ω , so schreibt man auch $L^p(\Omega)$ für $L^p(\mu)$, z.B. $L^p(\mathbb{R}^2)$ oder $L^p(0, 1) := L^p([0, 1])$ o.ä.
- (ii) Ist Ω eine Menge und μ das Zählmaß auf Ω , so schreibt man auch $\ell^p(\Omega)$ für $L^p(\mu)$. Zum Beispiel ist $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$ die Menge aller komplexen Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,$$

versehen mit der Norm $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p := (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. //

2.3.3 Beispiel. Bezeichne mit c_0 den Raum aller komplexen Nullfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist c_0 ein abgeschlossener Unterraum von ℓ^∞ . Der Dualraum von c_0 kann mit ℓ^1 identifiziert werden, nämlich mit Hilfe der Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} \ell^1 & \mapsto c_0' \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto \left((x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n a_n \right) \end{cases}$$

//

2.3.4 Beispiel. Sei M eine Menge und X ein Banachraum. Eine Funktion $f : M \rightarrow X$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $R > 0$ gibt, sodass $\|f(x)\| \leq R$, $x \in M$. Die Menge aller beschränkten Funktionen von M nach X bezeichnen

wir mit $\mathfrak{B}(M, X)$. Versetzen wir den punktweise definierten Vektorraum $\mathfrak{B}(M, X)$ zu einem Vektorraum. Für $f \in \mathfrak{B}(M, X)$ bezeichne

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in M} \|f(x)\|$$

die *Supremumsnorm* von f . Dann ist $(\mathfrak{B}(M, X), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Man verwechsle diese Terminologie nicht mit der Bezeichnung „beschränkt“ im Kontext linearer Abbildungen. Leider wird hier das gleiche Wort für unterschiedliche Dinge verwendet. Eine von Null verschiedene lineare Abbildung ist in dem gerade definierten Sinne niemals beschränkt. //

2.3.5 Beispiel. Sei K ein kompakter Hausdorff-Raum und bezeichne $C(K)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : K \rightarrow \mathbb{C}$. Weiters sei wieder

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|, \quad f \in C(K),$$

die Supremumsnorm. Wegen der Kompaktheit von K gilt $\|f\|_\infty := \max_{x \in K} |f(x)|$. $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathfrak{B}(K, \mathbb{C})$ und als solcher ein Banachraum. //

2.3.6 Beispiel. Sei L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Bezeichne mit $C_0(L)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : L \rightarrow \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger. Dabei verstehen wir unter dem *Träger* $\text{supp } f$ einer Funktion f , die Menge $\text{supp } f := \{\overline{x \in L : f(x) \neq 0}\}$ definiert. Wieder ist

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in L} |f(x)|, \quad f \in C_0(L),$$

eine Norm und stimmt mit $\max_{x \in L} |f(x)|$ überein. Für nicht kompakte L ist $(C_0(L), \|\cdot\|_\infty)$ jedoch nicht vollständig. //

2.3.7 Beispiel. Sei wieder L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Bezeichne mit $C_0(L)$ den Raum aller stetigen Funktionen auf L , die im Unendlichen verschwinden, d.h. für die folgendes gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subseteq L$, sodass $|f(x)| < \epsilon$ für alle $x \notin K$.

Ist $f \in C_0(L)$, so nimmt $|f|$ in L ein Maximum an, wir können also $C_0(L)$ mit der Supremumsnorm versehen. $C_0(L)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathfrak{B}(L, \mathbb{C})$ und als solcher ein Banachraum. //

2.3.8 Beispiel. Sei L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Die Menge aller komplexwertigen regulären Borelmaße auf L sei bezeichnet mit $M_{reg}(L)$; siehe Bemerkung 7.1.3. Versieht man $M_{reg}(L)$ mit

$$\|\mu\| := |\mu|(L),$$

wobei $|\mu|$ die Totalvariation (vgl. Bemerkung 7.1.3) von μ bedeutet, so erhält man einen Banachraum $(M_{reg}(L), \|\cdot\|)$, den *Raum der komplexen Borelmaße* auf L . //

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung immer wieder den folgenden tiefliegenden Satz verwenden, ihn aber hier nicht beweisen. Der Beweis kann in der Fachliteratur nachgelesen werden, siehe [R2, Theorem 2.14, Theorem 6.19].

2.3.9 Satz (Darstellungssatz von Riesz-Markov). *Sei L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Dann ist $C_0(L)' \cong M_{reg}(L)$. Genauer ist die Abbildung $\Phi : M_{reg}(L) \rightarrow C_0(L)'$, die einem regulären komplexen Borelmaß μ das durch*

$$\Phi(\mu)f := \int_L f d\mu, \quad f \in C_0(L),$$

definierte lineare Funktional $\Phi(\mu)$ zuordnet, ein isometrischer Isomorphismus von $M_{reg}(L)$ auf $C_0(L)'$.

Betrachtet man den Raum $C_0(L)_{\mathbb{R}}$ aller reellwertigen, stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden, als Banachraum über \mathbb{R} , so lässt sich sein Dualraum entsprechend mit dem Raum aller signierten Borelmaße mit Werten in \mathbb{R} auf L identifizieren.

2.3.10 Beispiel. Sei Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{R} , und bezeichne mit $C^\infty(\Omega)$ die Menge aller beliebig oft stetig-differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Wähle eine Folge $K_i, i \in \mathbb{N}$, kompakter Mengen mit $K_i \subseteq K_{i+1}^\circ$, sodass $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$, und definiere

$$p_N(f) := \max \{ |f^{(k)}(x)| : x \in K_N, k < N \}.$$

Dann ist

$$d(f, g) := \max_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} \frac{p_N(f - g)}{1 + p_N(f - g)}, \quad f, g \in C^\infty(\Omega)$$

eine Metrik auf $C^\infty(\Omega)$. Man kann zeigen, dass $C^\infty(\Omega)$ mit dieser Metrik d ein vollständiger metrischer Raum ist, der mit der von d induzierten Topologie ein topologischer Vektorraum abgibt. Diese Metrik wird nicht von einer Norm induziert. //

2.3.11 Beispiel. Sei $0 < p < 1$ und bezeichne mit $L^p(0, 1)$ jene Lebesguemessbaren Funktionen $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, für die gilt

$$\Delta f := \int_{(0,1)} |f(t)|^p d\lambda(t) < \infty.$$

Man kann nun zeigen, dass $d(f, g) := \Delta(f - g)$ eine Metrik auf $L^p(0, 1)$ definiert, wobei $L^p(0, 1)$ bezüglich dieser Metrik vollständig ist. Weiters kann man zeigen, dass es keine Norm auf $L^p(0, 1)$ gibt, welche die von dieser Metrik kommende Topologie induziert. Weiters ist $L^p(0, 1), 0 < p < 1$, mit dieser Topologie ein topologischer Vektorraum, der einige recht pathologische Eigenschaften hat, wie etwa $L^p(0, 1)' = \{0\}$. //

2.4 Unterräume, Faktorräume, Produkträume

Als erstes beschäftigen wir uns mit initialen Konstruktionen.

2.4.1 Proposition. Sei X ein Vektorraum, seien (X_i, \mathcal{T}_i) , $i \in I$, topologische Vektorräume, und seien $R_i : X \rightarrow X_i$, $i \in I$ Abbildungen. Sei vorausgesetzt, dass jede Abbildung R_i linear ist, und dass $\bigcap_{i \in I} \ker R_i = \{0\}$. Dann wird X mit der initialen Topologie bezüglich der Familie R_i , $i \in I$, ein topologischer Vektorraum.

Beweis. Wegen der Linearität von R_i kommutieren folgende zwei Diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{+} & X \\ R_i \times R_i \downarrow & & \downarrow R_i \\ X_i \times X_i & \xrightarrow{+} & X_i \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times X & \xrightarrow{\cdot} & X \\ \text{id} \times R_i \downarrow & & \downarrow R_i \\ \mathbb{C} \times X_i & \xrightarrow{\cdot} & X_i \end{array}$$

Da die Abbildung $R_i \times R_i$ sowie die Addition auf X_i stetig sind, folgt mit der universellen Eigenschaft der initialen Topologie, dass auch die Addition auf X stetig ist. Genauso erhält man aus dem zweiten Diagramm die Stetigkeit der skalaren Multiplikation.

Wir müssen noch die Trennungseigenschaft Hausdorff zeigen. Nach Bemerkung 2.1.10, (ii), reicht es nachzuweisen, dass einpunktige Mengen abgeschlossen sind. Voraussetzungsgemäß gilt $\bigcap_{i \in I} \ker R_i = \{0\}$, womit $\{0\}$ Schnitt von abgeschlossenen Mengen ist, weil die R_i ja alle stetig sind. Da $t \mapsto t + x$ für jedes $x \in X$ ein Homöomorphismus ist, ist auch $\{x\}$ abgeschlossen. \square

2.4.2 Korollar.

- (i) Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum und sei Y ein linearer Unterraum von X . Dann ist Y , versehen mit der Spurtopologie \mathcal{T}_Y von (X, \mathcal{T}) , ebenfalls ein topologischer Vektorraum.
- (ii) Sind (X_i, \mathcal{T}_i) , $i \in I$, topologische Vektorräume, so ist $X := \prod X_i$ versehen mit der Produkttopologie $\mathcal{T} := \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ ebenfalls ein topologischer Vektorraum. \square

2.4.3 Bemerkung. Lässt man in Proposition 2.4.1 die Voraussetzung $\bigcap_{i \in I} \ker R_i = \{0\}$ weg, so verliert man nur die Trennungseigenschaft Hausdorff. Die Voraussetzung der Linearität der Abbildungen R_i dagegen ist wesentlich. Die initiale Topologie bezüglich einer beliebigen Familie von Abbildungen in topologische Vektorräume muss im Allgemeinen die algebraischen Operationen nicht stetig machen.

Tatsächlich kann man ein zur initialen Topologie analoges Konzept aufbauen, indem man nicht die größte Topologie auf X betrachtet bezüglich derer alle R_i stetig sind, sondern die größte Topologie, die die algebraischen Operationen stetig macht und bezüglich derer alle R_i stetig sind. Man zeigt dann analog, dass eine solche stets existiert, und entsprechende Eigenschaften hat. //

Als nächstes diskutieren wir Unterräume und Produkträume von normierten Räumen.

2.4.4 Proposition. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und Y ein linearer Unterraum von X .

(i) Die Abbildung

$$\|\cdot\|_Y : \begin{cases} Y & \rightarrow [0, \infty) \\ y & \mapsto \|y\|_X \end{cases}$$

ist eine Norm auf Y . Die von $\|\cdot\|_Y$ auf Y induzierte Topologie ist die Spurtopologie der von $\|\cdot\|_X$ auf X induzierten Topologie.

(ii) Für einen Banachraum $(X, \|\cdot\|_X)$ ist Y genau dann abgeschlossen in X , wenn $(Y, \|\cdot\|_Y)$ vollständig ist.

Beweis. Klarerweise erfüllt $\|\cdot\|_Y$ die Axiome für eine Norm. Die ϵ -Kugeln $\{y \in Y : \|y - y_0\|_Y < \epsilon\}$ bilden eine Umgebungsbasis von y_0 in $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Die Kugeln $\{x \in X : \|x - y_0\|_X < \epsilon\}$ eine von y_0 in $(X, \|\cdot\|_X)$. Nun gilt

$$\{y \in Y : \|y - y_0\|_Y < \epsilon\} = \{x \in X : \|x - y_0\|_X < \epsilon\} \cap Y.$$

Um die zweite Aussage einzusehen, sei eine Cauchy-Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(Y, \|\cdot\|_Y)$ gegeben. Dann ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine solche in $(X, \|\cdot\|_X)$. Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ vollständig, so gibt es ein $x \in X$ mit $y_n \rightarrow x$ bzgl. $\|\cdot\|_X$. Da Y abgeschlossen ist, ist $x \in Y$ und auch $y_n \rightarrow x$ bzgl. $\|\cdot\|_Y$.

Ist umgekehrt $(Y, \|\cdot\|_Y)$ vollständig und gilt $y_n \rightarrow x$ für eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Y und einem $x \in X$, so ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar eine Cauchy-Folge in $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und daher in Y konvergent gegen ein $y \in Y$. Wegen der Eindeutigkeit der Grenzwerte in X folgt $x = y \in Y$. □

2.4.5 Proposition. Seien X und Y normierte Räume.

(i) Versieht man $X \times Y$ mit der Summennorm

$$\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|, \quad (x, y) \in X \times Y, \quad (2.4.1)$$

oder mit der Maximumsnorm

$$\|(x, y)\|_\infty := \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad (x, y) \in X \times Y, \quad (2.4.2)$$

so sind $(X \times Y, \|\cdot\|)$ und $(X \times Y, \|\cdot\|_\infty)$ normierte Räume. Die beiden Normen sind äquivalent, und die von ihnen induzierte Topologie ist gleich der Produkttopologie.

(ii) Sind X und Y Banachräume, so auch $X \times Y$.

Beweis. Dass die Gleichungen (2.4.1) und (2.4.2) Normen definieren, ist offensichtlich. Diese sind äquivalent, denn

$$\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|x\| + \|y\| \leq 2 \cdot \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Daher induzieren sie auch dieselbe Topologie. Nun gilt $U_\epsilon^{\|\cdot\|_\infty}(x_0, y_0) = U_\epsilon^{\|\cdot\|}(x_0) \times U_\epsilon^{\|\cdot\|}(y_0)$, also ist die von $\|\cdot\|_\infty$ induzierte Topologie gleich der Produkttopologie.

Ist $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $X \times Y$, so sind $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in X bzw. Y . Sie haben also Grenzwerte x bzw. y , und daher gilt auch $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

□

Hat man unendlich viele Faktoren, so ist die Situation bei normierten Räumen tatsächlich komplizierter. Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen. Schließlich wollen wir auch Faktorräume diskutieren.

2.4.6 Proposition. *Sei X ein topologischer Vektorraum und N ein abgeschlossener linearer Unterraum. Der Faktorraum X/N sei mit der finalen Topologie von der kanonischen Projektion $\pi : X \rightarrow X/N$ versehen. Dann ist X/N ein topologischer Vektorraum. Die Projektion π ist offen; sie bildet also offene Mengen auf offene Mengen ab.*

Beweis. Für ein offenes $O \subseteq X$ ist auch

$$\pi^{-1}(\pi(O)) = O + N = \bigcup_{x \in N} (x + O)$$

offen, d.h. $\pi(O)$ offen in X/N .

Seien $x + N, y + N \in X/N$, und W eine offene Umgebung von $(x + y) + N$ in X/N . Wegen der Stetigkeit von $+$ können wir offene Umgebungen $x + V_1, y + V_2$ von x bzw. y in X so wählen, dass $(x + V_1) + (y + V_2) \subseteq \pi^{-1}(W)$. Dann sind $\pi(x + V_1), \pi(y + V_2)$ offene Umgebungen von $x + N$ bzw. $y + N$, wobei $\pi(x + V_1) + \pi(y + V_2) \subseteq W$. Somit ist die Addition in X/N stetig. Analog zeigt man, dass auch die skalare Multiplikation stetig ist.

Wegen der Abgeschlossenheit von N und wegen $\pi^{-1}(\pi(N)) = N$ ist die einpunktige Mengen $\{0 + N\}$ in X/N abgeschlossen. In Bemerkung 2.1.10 haben wir gesehen, dass damit die Topologie auf X/N automatisch Hausdorff ist. □

2.4.7 Korollar. *Sei X ein topologischer Vektorraum, N, F lineare Unterräume. Ist N abgeschlossen und F endlichdimensional, so ist auch $N + F$ abgeschlossen.*

Beweis. Betrachte X/N , dann ist $\pi(F)$ ein endlichdimensionaler Unterraum und wegen Satz 2.2.1 abgeschlossen in X/N . Also ist $N + F = \pi^{-1}(\pi(F))$ abgeschlossen in X . □

2.4.8 Bemerkung. Die finale Topologie einer Familie von linearen Abbildungen von topologischen Vektorräumen in einen Vektorraum X muss diesen im Allgemeinen nicht zu einem topologischen Vektorraum machen. //

2.4.9 Proposition. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und N ein abgeschlossener linearer Unterraum.*

(i) *Die Abbildung*

$$\|x + N\|_{X/N} := d(x, N) = \inf \{\|x - z\| : z \in N\} \quad (2.4.3)$$

ist eine Norm – die sogenannte Faktorraumnorm – auf X/N . Diese induziert die finale Topologie bezüglich der kanonischen Projektion $\pi : X \rightarrow X/N$.

(ii) Ist $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum, dann ist auch $(X/N, \|\cdot\|_{X/N})$ ein solcher.

Beweis.

ad(i): $\|\cdot\|_{X/N}$ ist tatsächlich eine Norm, denn für $x, y \in X, z_1, z_2 \in N$, gilt

$$\|(x+y) + N\|_{X/N} \leq \|x+y+(z_1+z_2)\| \leq \|x+z_1\| + \|y+z_2\|.$$

Da z_1, z_2 beliebig waren, folgt

$$\|(x+y) + N\|_{X/N} \leq \|x+N\|_{X/N} + \|y+N\|_{X/N}.$$

Weiters gilt

$$\|\lambda x + z\| = |\lambda| \cdot \|x + \lambda^{-1}z\| \quad \text{für } x \in X, z \in N, \lambda \neq 0.$$

Wegen $\lambda^{-1}N = N$ folgt $\|\lambda x + N\|_{X/N} = |\lambda| \cdot \|x + N\|_{X/N}$. Offensichtlich gilt $0 \leq \|N\|_{X/N} = \|0 + N\|_{X/N} \leq \|0\| = 0$.

Ist $\|x + N\|_{X/N} = 0$, so gibt es eine Folge $z_n \in N$ mit $\|x + z_n\| \rightarrow 0$, d.h. $-x \in \overline{N}$. Da N abgeschlossen ist, folgt $x \in N$.

Wir zeigen als nächstes, dass die Norm $\|\cdot\|_{X/N}$ die finale Topologie bezüglich π induziert. Da $\pi : (X, \mathcal{T}_{\|\cdot\|}) \rightarrow (X/N, \mathcal{T}_{\text{fin}})$ stetig, offen und surjektiv ist, bildet π den Umgebungsfiler $\mathfrak{U}_X(0)$ bzgl. $(X, \mathcal{T}_{\|\cdot\|})$ auf den Umgebungsfiler $\mathfrak{U}_{X/N}(0)$ bzgl. $(X/N, \mathcal{T}_{\text{fin}})$ ab. Eine Basis von $\mathfrak{U}_X(0)$ ist durch die Kugeln $U_r^X(0)$, $r > 0$, gegeben. Daher ist $\{\pi(U_r^X(0)) : r > 0\}$ eine Basis von $\mathfrak{U}_{X/N}(0)$.

Für $x \in X$ gilt aber $\|x + N\|_{X/N} = \inf\{\|x + z\| : z \in N\} < r$ genau dann, wenn es ein $z \in N$ gibt, sodass $\|x + z\| < r$. Somit gilt

$$\pi(\underbrace{\{x \in X : \|x\| < r\}}_{=U_r^X(0)}) = \underbrace{\{x + N \in X/N : \|x + N\|_{X/N} < r\}}_{=U_r^{X/N}(0)}. \quad (2.4.4)$$

Somit haben die finale Topologie und die von $\|\cdot\|_{X/N}$ auf X/N induzierte Topologie die gleichen Nullumgebungen. Da beide X/N zu einem topologischen Vektorraum machen, folgt deren Gleichheit.

ad(ii): Sei nun zusätzlich vorausgesetzt, dass X vollständig ist, und sei eine Cauchy-Folge $(x_n + N)_{n \in \mathbb{N}}$ in X/N gegeben. Wähle eine Teilfolge $(x_{n_k} + N)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\|(x_{n_{k+1}} + N) - (x_{n_k} + N)\|_{X/N} < 2^{-k}$.

Wir definieren nun rekursiv für alle $k \in \mathbb{N}$ Repräsentanten $y_k \in x_{n_k} + N$, sodass $\|y_{k+1} - y_k\| < 2^{-k}$. Dazu setze $y_1 = x_{n_1}$. Sind $y_1, \dots, y_k \in X$ mit besagten Eigenschaften, so folgt aus

$$\begin{aligned} 2^{-k} &> \|(x_{n_k} + N) - (x_{n_{k+1}} + N)\|_{X/N} \\ &= \|(y_k - x_{n_{k+1}}) + N\|_{X/N} = \inf\{\|(y_k - x_{n_{k+1}}) + z\| : z \in N\} \end{aligned}$$

die Existenz eines $z \in N$ mit $\|(y_k - x_{n_{k+1}}) + z\| < 2^{-k}$. Setzen wir $y_{k+1} = x_{n_{k+1}} - z$, so ist die geforderte Ungleichung erfüllt. Wegen $(l \leq m)$

$$\|y_m - y_l\| = \left\| \sum_{k=l}^{m-1} (y_{k+1} - y_k) \right\| \leq \sum_{k=l}^{m-1} \|y_{k+1} - y_k\| < \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^{l-1}}$$

ist $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Somit existiert ein $y \in X$, sodass $y_k \rightarrow y$. Wegen der Stetigkeit von π folgt $x_{n_k} + N = \pi(y_k) \rightarrow \pi(y)$. Da $(x_n + N)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, schließt man daraus leicht, dass auch $x_n + N \rightarrow \pi(y)$. \square

2.5 Vervollständigung normierter Räume

Es ist eine wichtige Tatsache, dass man jeden normierten Raum vervollständigen kann, d.h. ihn in einen Banachraum dicht einbetten.

Die Rolle, die in der Diskussion metrischer Räume die gleichmäßig stetigen Abbildungen gespielt haben, kommt in der Situation normierter Räume den beschränkten linearen Operatoren zu. Um einen zu Satz 1.1.1 analogen Fortsetzungssatz für beschränkte lineare Operatoren herzuleiten, brauchen wir folgendes Lemma.

2.5.1 Lemma. *Seien $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ normierte Räume. Weiters sei $D \subseteq X$ ein dichter linearer Unterraum von X und $T : D \rightarrow Y$ linear und beschränkt, dh. $T \in \mathcal{B}(D, Y)$. Ist $F : X \rightarrow Y$ eine stetige Fortsetzung von T , so ist F automatisch linear und beschränkt mit gleicher Abbildungsnorm, dh. $\|F\| = \|T\|$.*

Beweis. Betrachte die stetigen Abbildungen $(x, y) \mapsto F(x + y)$ und $(x, y) \mapsto F(x) + F(y)$ von $X \times X$ nach Y . Diese stimmen auf der in $X \times X$ (versehen etwa mit der Summennorm) dichten Menge $D \times D$ überein. Daher stimmen sie überall überein. Genauso zeigt man, dass $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in X$ gilt. Also ist F linear.

Auch die Abbildungen $\phi_1 : x \mapsto \|F(x)\|$ und $\phi_2 : x \mapsto \|T\| \cdot \|x\|$ von X nach \mathbb{R} sind stetig genauso wie $\phi_3 : x \mapsto \max(\phi_1(x), \phi_2(x))$. Auf der dichten Teilmenge D gilt $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ und daher $\phi_2(x) = \phi_3(x)$. Also stimmen ϕ_2 und ϕ_3 auf D und daher auch auf ganz X überein. Das bedeutet aber gerade $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ für alle $x \in X$, bzw. $\|F(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ für alle $x \in X$, womit $F \in \mathcal{B}(X, Y)$ und $\|F\| = \|T\|$. □

2.5.2 Satz. *Seien $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ normierte Räume, und sei $(Y, \|\cdot\|)$ vollständig. Weiters sei $D \subseteq X$ ein dichter linearer Unterraum von X und $T \in \mathcal{B}(D, Y)$.*

↪ Dann existiert genau eine lineare und beschränkte Abbildung $F : X \rightarrow Y$ mit $F|_D = T$. Diese hat dieselbe Norm wie T .

↪ Ist T linear und isometrisch, dh. $\|Tx\| = \|x\|$ für $x \in D$ – offensichtlich ist dann T beschränkt – so ist auch F isometrisch.

↪ Ist auch $(X, \|\cdot\|)$ vollständig, $T(D) \subseteq Y$ dicht, T injektiv und so, dass $T^{-1} : T(D) \rightarrow X$ beschränkt, so ist $F : X \rightarrow Y$ bijektiv und die nach dem ersten Punkt existierende eindeutige beschränkte Fortsetzung $G : Y \rightarrow X$ von $T^{-1} : T(D) \rightarrow X$ stimmt mit F^{-1} überein.

Beweis. Da für lineare Abbildungen aus der Beschränktheit die gleichmäßige Stetigkeit folgt (und umgekehrt), folgt die erste Aussage sofort aus Satz 1.1.1 und Lemma 2.5.1.

Die zweite Behauptung folgt auch aus Satz 1.1.1, wenn man bedenkt, dass wegen $d(Tx, Ty) = \|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\|$ und $\|Tx\| = d(0, Tx)$ für lineare Abbildungen der Begriff isometrisch bzgl. der Norm und isometrisch bzgl. der von der Norm induzierten Metrik dasselbe bedeutet.

Auch die dritte Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 1.1.1. □

2.5.3 *Bemerkung.* Mit fast dem selben Beweis zeigt man, dass Lemma 2.5.1 und Satz 2.5.2 auch für konjugiert lineare Abbildungen gilt. //

Manchmal ist es praktisch, eine etwas abstraktere Formulierung von Satz 2.5.2 zu verwenden.

2.5.4 Korollar. *Seien $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ normierte Räume, und sei $(Y, \|\cdot\|)$ vollständig. Weiters sei $D \subseteq X$ ein dichter linearer Unterraum von X . Dann ist die Einschränkung $\phi : F \mapsto F|_D$ ein isometrischer Isomorphismus von $\mathcal{B}(X, Y)$ auf $\mathcal{B}(D, Y)$.*

Beweis. Die Einschränkungsabbildung ϕ ist injektiv, da D dicht in X ist. Die Aussage, dass ϕ surjektiv ist, bedeutet gerade, dass sich jeder Operator $T \in \mathcal{B}(D, Y)$ zu einem Operator in $\mathcal{B}(X, Y)$ fortsetzen lässt. Die Aussage, dass ϕ isometrisch ist, bedeutet gerade, dass die Fortsetzung die gleiche Norm wie T hat. □

Wir kommen nun zu Vervollständigungen. Das Konzept ist ganz analog wie bei metrischen Räumen.

2.5.5 Definition. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Ein Paar bestehend aus einem normierten Raum $(\hat{X}, \|\cdot\|)$ und einer Abbildung $\iota : X \rightarrow \hat{X}$ heißt eine *Vervollständigung* von $(X, \|\cdot\|)$, wenn gilt:

(V_{nor}1) $(\hat{X}, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

(V_{nor}2) ι ist linear und isometrisch, d.h. es gilt $\|\iota(x)\| = \|x\|$, $x \in X$.

(V_{nor}3) $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$, wobei der Abschluss bezüglich $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ zu verstehen ist.

Zwei Vervollständigungen $\langle (\hat{X}_1, \|\cdot\|_1, \iota_1) \rangle$ und $\langle (\hat{X}_2, \|\cdot\|_2, \iota_2) \rangle$ von $(X, \|\cdot\|)$ heißen *isomorph*, wenn es einen isometrischen Isomorphismus $\varphi : \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}_2$ gibt, sodass $\iota_2 = \varphi \circ \iota_1$ gilt, d.h. dass man das Diagramm (1.1.3) hat.

Wir diskutieren wieder zuerst die Eindeutigkeit einer Vervollständigung. Dies erhalten wir einfach aus Satz 2.5.2.

2.5.6 Korollar. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind je zwei Vervollständigungen von $(X, \|\cdot\|)$ isomorph.*

Beweis. Seien $\langle (\hat{X}_1, \|\cdot\|_1, \iota_1) \rangle$ und $\langle (\hat{X}_2, \|\cdot\|_2, \iota_2) \rangle$ Vervollständigungen von $(X, \|\cdot\|)$. Weiters bezeichne $d = (d_1, d_2)$ die von $\|\cdot\|$ ($\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$) erzeugte Metrik. Man sieht unmittelbar, dass dann $\langle (\hat{X}_1, d_1, \iota_1) \rangle$ und $\langle (\hat{X}_2, d_2, \iota_2) \rangle$ Vervollständigungen von (X, d) im Sinne metrischer Vervollständigungen sind.

Nach Korollar 1.1.3 gibt es eine isometrische Bijektion $\varphi : \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}_2$ (im Sinne von Metrik) mit $\varphi \circ \iota_1 = \iota_2$. Da dabei ι_1 injektiv ist, gilt $\varphi|_{\iota_1(X)} = \iota_2 \circ \iota_1^{-1}$ als Abbildung von $\iota_1(X)$ nach \hat{X}_2 . Da $\iota_1(X) \subseteq \hat{X}_1$ dicht ist, folgt aus der Linearität von $\iota_2 \circ \iota_1^{-1}$ mit Lemma 2.5.1, dass φ auch linear ist. □

Aus den gleichen Gründen wie bei metrischen Räumen ist klar, dass wir keine bessere Eindeutigkeitsaussage erwarten können. Nun kommen wir zur Existenz von Vervollständigungen.

2.5.7 Satz. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann existiert eine Vervollständigung $\langle (\hat{X}, \|\cdot\|), \iota \rangle$ von $(X, \|\cdot\|)$.

Beweis.

Definition von \hat{X} und ι : Sei d die von der Norm $\|\cdot\|$ auf X induzierte Metrik, d.h. $d(x, y) := \|x - y\|$, und sei $\langle (\hat{X}, \hat{d}), \iota \rangle$ eine Vervollständigung des metrischen Raumes (X, d) .

Definition einer Addition $\hat{+}$ auf \hat{X} : Bezeichne die auf X gegebene Addition mit $+$: $X \times X \rightarrow X$. Weiters seien alle auftretenden direkten Produkte metrischer Räume (X_1, d_1) und (X_2, d_2) mit der Summenmetrik $d_\Sigma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ versehen, und wir erinnern uns, dass die von dieser Metrik induzierte Topologie gerade die Produkttopologie der von den Metriken d_1 und d_2 induzierten Topologien ist.

Betrachte die Abbildung

$$f : \begin{cases} \iota(X) \times \iota(X) & \rightarrow \hat{X} \\ (\hat{x}, \hat{y}) & \mapsto \iota(\iota^{-1}(\hat{x}) + \iota^{-1}(\hat{y})) \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \hat{d}(f(\hat{x}, \hat{y}), f(\hat{x}', \hat{y}')) &= \hat{d}(\iota(\iota^{-1}(\hat{x}) + \iota^{-1}(\hat{y})), \iota(\iota^{-1}(\hat{x}') + \iota^{-1}(\hat{y}'))) \\ &= d(\iota^{-1}(\hat{x}) + \iota^{-1}(\hat{y}), \iota^{-1}(\hat{x}') + \iota^{-1}(\hat{y}')) = \|(\iota^{-1}(\hat{x}) + \iota^{-1}(\hat{y})) - (\iota^{-1}(\hat{x}') + \iota^{-1}(\hat{y}'))\| \\ &\leq \|\iota^{-1}(\hat{x}) - \iota^{-1}(\hat{x}')\| + \|\iota^{-1}(\hat{y}) - \iota^{-1}(\hat{y}')\| = d(\iota^{-1}(\hat{x}), \iota^{-1}(\hat{x}')) + d(\iota^{-1}(\hat{y}), \iota^{-1}(\hat{y}')) \\ &= \hat{d}(\hat{x}, \hat{x}') + \hat{d}(\hat{y}, \hat{y}') = d_\Sigma((\hat{x}, \hat{y}), (\hat{x}', \hat{y}')). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass f gleichmäßig stetig ist. Nun ist $\iota(X)$ dicht in \hat{X} , und daher auch $\iota(X) \times \iota(X)$ dicht in $\hat{X} \times \hat{X}$. Da \hat{X} vollständig ist, existiert eine stetige Fortsetzung $\hat{+} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \hat{X}$.

Definition einer skalaren Multiplikation $\hat{\cdot}$ auf \hat{X} : Bezeichne die auf X gegebene skalare Multiplikation mit \cdot : $\mathbb{C} \times X \rightarrow X$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachte die Abbildung

$$m_\lambda : \begin{cases} \iota(X) & \rightarrow \hat{X} \\ \hat{x} & \mapsto \iota(\lambda \cdot \iota^{-1}(\hat{x})) \end{cases}$$

Für $\hat{x}, \hat{y} \in \iota(X)$ gilt

$$\hat{d}(m_\lambda(\hat{x}), m_\lambda(\hat{y})) = d(\lambda \cdot \iota^{-1}(\hat{x}), \lambda \cdot \iota^{-1}(\hat{y})) = |\lambda| \|\iota^{-1}(\hat{x}) - \iota^{-1}(\hat{y})\|.$$

Also ist m_λ gleichmäßig stetig und hat somit eine stetige Fortsetzung

$$\hat{m}_\lambda : \hat{X} \rightarrow \hat{X}.$$

Somit ist eine Funktion $\hat{\cdot} : \mathbb{C} \times \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ wohldefiniert durch

$$\lambda \hat{\cdot} \hat{x} := \hat{m}_\lambda(\hat{x}).$$

\hat{X} ist Vektorraum und ι linear: Seien $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gilt nach der Definition von $\hat{+}$ und $\hat{\cdot}$ als Fortsetzungen von f bzw. m_λ ,

$$\iota(x) \hat{+} \iota(y) = f(\iota(x), \iota(y)) = \iota(x + y), \quad \lambda \hat{\cdot} \iota(x) = m_\lambda(\iota(x)) = \iota(\lambda \cdot x). \quad (2.5.1)$$

Die algebraische Rechenregeln übertragen sich nun von X auf \hat{X} durch Stetigkeit: Nach der obigen Rechnung gilt für $\hat{x}, \hat{y} \in \iota(X)$

$$\hat{x} \hat{+} \hat{y} = \iota(\iota^{-1}\hat{x} + \iota^{-1}\hat{y}), \quad \lambda \hat{\cdot} \hat{x} = \iota(\lambda \cdot \iota^{-1}\hat{x}).$$

Also erfüllen $\hat{+}$ und $\hat{\cdot}$ die Vektorraumaxiome auf der dichten Teilmenge $\iota(X)$. Wegen der Stetigkeit setzen sie sich auf ganz \hat{X} fort. Wir wollen das am Beispiel des Distributivgesetzes genauer ausführen.

Für festes λ sind die Abbildungen $(\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \lambda \hat{\cdot} (\hat{x} \hat{+} \hat{y}) = \hat{m}_\lambda(\hat{x} \hat{+} \hat{y})$ und $(\hat{x}, \hat{y}) \mapsto (\lambda \hat{\cdot} \hat{x}) \hat{+} (\lambda \hat{\cdot} \hat{y}) = \hat{m}_\lambda(\hat{x}) \hat{+} \hat{m}_\lambda(\hat{y})$ als Zusammensetzungen stetiger Funktionen selber stetig auf $\hat{X} \times \hat{X}$. Auf der dichten Teilmenge $\iota(X) \times \iota(X)$ stimmen sie wegen (2.5.1) und der Tatsache, dass das Distributivgesetz für X gilt, überein. Also stimmen sie auf ganz $\hat{X} \times \hat{X}$ überein.

Die Beziehung (2.5.1) besagt schließlich nichts anderes, als dass ι linear ist.

Definition der Norm $\|\cdot\|$ auf \hat{X} : Durch $\|\hat{x}\| := \hat{d}(\hat{x}, \iota(0))$ ist eine stetige nicht-negative Funktion $\|\cdot\| : \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Da $\iota(0)$ das Nullelement des Vektorraumes \hat{X} ist, haben wir $\|\hat{x}\| > 0$ für $\hat{x} \neq 0$. Es gilt

$$\|\iota(x)\| = \hat{d}(\iota(x), \iota(0)) = d(x, 0) = \|x\| \quad \text{für alle } x \in X. \quad (2.5.2)$$

Wir sehen, dass $\|\cdot\|$ auf der dichten Teilmenge $\iota(X)$ die Eigenschaften

$$\|\hat{x} \hat{+} \hat{y}\| \leq \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|, \quad \|\lambda \hat{\cdot} \hat{x}\| = |\lambda| \|\hat{x}\|$$

hat. Wegen der Stetigkeit übertragen sich diese auf ganz \hat{X} , womit sich $\|\cdot\|$ als Norm herausstellt.

Wegen (2.5.2) ist ι isometrisch bzgl. der Normen. Deshalb stimmt auf $\iota(X) \times \iota(X)$ die von $\|\cdot\|$ auf \hat{X} induzierte Metrik mit \hat{d} überein. Wieder aus Dichtheits bzw. Stetigkeitsgründen gilt dann $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \|\hat{x} - \hat{y}\|$ für alle $(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{X} \times \hat{X}$. Schließlich ist $(\hat{X}, \|\cdot\|)$ damit ein Banachraum. □

2.5.8 Beispiel. Sind auf einem Vektorraum X zwei nicht-äquivalente Normen gegeben, so können Vervollständigungen bezüglich dieser gänzlich unterschiedlich aussehen. Betrachte zum Beispiel den Vektorraum aller Polynome $\mathbb{C}[x]$ und die beiden Normen

$$\|p\|_\infty := \max_{x \in [0,1]} |p(x)|, \quad \|p\|_2 := \left(\int_0^1 |p(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p \in \mathbb{C}[x].$$

Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist $(\langle C([0,1]), \|\cdot\|_\infty \rangle, \iota)$ eine Vervollständigung von $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$. Jedoch ist $(\langle L^2([0,1]), \|\cdot\|_2 \rangle, \iota)$ eine Vervollständigung von $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_2)$. Dabei bezeichnet ι jeweils die natürliche Abbildung von $\mathbb{C}[x]$ in $C([0,1])$ bzw. $L^2([0,1])$. //

2.5.9 Beispiel.

- (i) Sei L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Dann ist $(C_0(L), \|\cdot\|_\infty)$ die Vervollständigung von $(C_{00}(L), \|\cdot\|_\infty)$

- (ii) Betrachte den lokalkompakten Hausdorff-Raum \mathbb{R}^n und auf diesem das Lebesgue-Maß. Dann können wir auf $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ auch die L^p -Norm betrachten. Alle diese Normen geben verschiedene Topologien auf $C_{00}(\mathbb{R}^n)$. Man kann zeigen, dass $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$, dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt. Anders ausgedrückt, kann man also sagen, dass $L^p(\mathbb{R}^n)$ die Vervollständigung von $(C_{00}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$ ist.

//

Kapitel 3

Hilberträume

3.1 Räume mit innerem Produkt

3.1.1 Definition. Sei H ein Vektorraum. Eine Abbildung $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *inneres Produkt*, oder auch *Skalarprodukt*, wenn gilt

(IP1) $(x, x) > 0$ für alle $x \in H \setminus \{0\}$.

(IP2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ für alle $x, y \in H$.

(IP3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ für alle $x, y, z \in H$, und $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}, x, y \in H$.

Ein inneres Produkt ist also eine positiv definite Sesquilinearform.

Einige unmittelbare Folgerungen aus diesen Axiomen sind:

$\rightsquigarrow (0, y) = 0, y \in H$.

\rightsquigarrow Für jedes $y \in H$ ist die Abbildung

$$f_y : \begin{cases} H & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto (x, y) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

linear.

\rightsquigarrow Es gilt $(z, x + y) = (z, x) + (z, y)$ für alle $x, y, z \in H$, und $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}, x, y \in H$.

Da stets $(x, x) \geq 0$ ist, können wir eine Abbildung $\|\cdot\| : H \rightarrow [0, \infty)$ definieren als

$$\|x\| := (x, x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } x \in H.$$

Dann gilt $\|x\| > 0$ für $x \in H \setminus \{0\}$ und

$$\|\alpha x\| = (\alpha x, \alpha x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha}} \cdot (x, x)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{C}, x \in H.$$

3.1.2 Proposition. Sei H ein Vektorraum und sei (\cdot, \cdot) ein inneres Produkt auf H . Dann gelten für $x, y \in H$:

- (i) Schwarzsche Ungleichung: $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, wobei aus der Gleichheit, die lineare Abhängigkeit von x und y folgt.

- (ii) Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- (iii) Parallelogrammregel: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
- (iv) Polarformel: $4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2$.
- (v) Satz von Pythagoras: Ist $(x, y) = 0$, so gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- (vi) Es ist $(x, y) = 0$ genau dann, wenn $\|y\| \leq \|\lambda x + y\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis.

ad(i): Setze $A := \|x\|^2$, $B := |(x, y)|$, $C := \|y\|^2$, und sei $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ so, dass $\alpha(y, x) = B$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - t\alpha y, x - t\alpha y) = (x, x) - t\alpha(y, x) - t\bar{\alpha}(x, y) + t^2(y, y) \\ &= A - 2tB + t^2C. \end{aligned}$$

Ist $C = 0$, so muss auch $B = 0$ sein. Außerdem bedingt $C = 0$ die Gleichung $y = 0$, womit x und y linear abhängig sind. Anderenfalls gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$A - 2tB + t^2C = C\left(t - \frac{B}{C}\right)^2 - \frac{B^2}{C} + A \geq 0.$$

Für $t = \frac{B}{C}$ erhalten wir $AC - B^2 \geq 0$. Außerdem folgt aus $AC - B^2 = 0$, dass $(x - t\alpha y, x - t\alpha y) = A - 2tB + t^2C = 0$, für diesen Wert von t ; also gilt $x = \frac{B}{C}\alpha y$.

ad(ii): Es gilt

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + \underbrace{(x, y) + (y, x)}_{=2\operatorname{Re}(x, y) \leq 2|(x, y)|} + (y, y) \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

ad(iii): Durch addieren der Gleichungen

$$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y, x \pm y) = (x, x) \pm (x, y) \pm (y, x) + (y, y)$$

folgt $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(x, x) + 2(y, y)$.

ad(iv): Die Polarformel ergibt sich durch Addition folgender vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \pm\|x \pm y\|^2 &= \pm(x \pm y, x \pm y) = \pm(x, x) + (x, y) + (y, x) + \pm(y, y), \\ \pm i\|x \pm iy\|^2 &= \pm(x \pm iy, x \pm iy) = \pm i(x, x) + (x, y) - (y, x) + \pm i(y, y). \end{aligned}$$

ad(v): Wegen

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2, \quad (3.1.2)$$

impliziert $(x, y) = 0$ stets $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

ad(vi): Ist $(x, y) = 0$, so ist auch $(\lambda x, y) = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$\|\lambda x + y\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2.$$

Gilt umgekehrt $\|y\|^2 \leq \|y + \lambda x\|^2$ für jedes λ , so folgt aus (3.1.2)

$$|\lambda|^2\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda(x, y)) \geq 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, so gewählt, dass $\alpha(x, y) = -|(x, y)|$. Die obige Beziehung mit $\lambda := t\alpha$, $t > 0$, ergibt dann

$$t^2 \|x\|^2 \geq 2t |(x, y)| \geq 0 \quad \text{für alle } t > 0.$$

Dividiert man durch t , und bildet den Limes $t \rightarrow 0$, so folgt $|(x, y)| = 0$. \square

3.1.3 Bemerkung. Beim Beweis der Polarformel wurde nur verwendet, dass (\cdot, \cdot) sesquilinear ist. Der selbe Beweis zeigt also, dass allgemein für eine Sesquilinearform $[\cdot, \cdot]$ auf einem Vektorraum X über \mathbb{C} für alle $x, y \in X$

$$4[x, y] = [x + y, x + y] - [x - y, x - y] + i[x + iy, x + iy] - i[x - iy, x - iy]. \quad (3.1.3)$$

//

Wir erkennen aus Proposition 3.1.2 insbesondere, dass $\|\cdot\| : H \rightarrow [0, \infty)$ eine Norm auf H ist. Jeder Vektorraum mit innerem Produkt ist also in natürlicher Weise auch ein normierter Raum. Wenn wir von topologischen oder metrischen Eigenschaften eines Raumes H mit innerem Produkt sprechen, so beziehen wir uns, wenn nicht explizit anders gesagt, immer auf die Topologie bzw. Metrik die von dieser Norm induziert wird.

Eine wichtige Folgerung aus der Schwarzschen Ungleichung ist folgende Aussage. Um Paare vom Skalarprodukt unterscheiden zu können, schreiben wir im Folgenden $(x; y)$ für geordnete Paare.

3.1.4 Korollar. *Sei $H \times H$ mit einer Norm versehen, welche die Produkttopologie induziert, z.B. mit der Summennorm*

$$\|(x; y)\| := \|x\| + \|y\|, \quad (x; y) \in H \times H.$$

Für jedes $r > 0$ gilt für die abgeschlossene Kugel $K_r(0)$ in H , dass die Abbildung

$$(\cdot, \cdot)|_{K_r(0) \times K_r(0)} : K_r(0) \times K_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$$

gleichmäßig stetig ist. Die Abbildung $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig, womit für jedes feste $y \in H$ die Abbildung $f_y : x \mapsto (x, y)$ aus (3.1.1) ein Element von H' .

Beweis. Seien $(x_1; y_1), (x_2; y_2) \in K_r(0) \times K_r(0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| &\leq |(x_1, y_1 - y_2)| + |(x_1 - x_2, y_2)| \\ &\leq \|x_1\| \cdot \|y_1 - y_2\| + \|x_1 - x_2\| \cdot \|y_2\| \\ &\leq r(\|y_1 - y_2\| + \|x_1 - x_2\|). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Also ist $(\cdot, \cdot)|_{K_r(0) \times K_r(0)}$ gleichmäßig stetig bezüglich der Summennorm. Wegen

$$K_r(0) \supseteq U_r(0), \quad \bigcup_{r>0} U_r(0) \times U_r(0) = H \times H,$$

sowie der Tatsache, dass Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, folgt die Stetigkeit von $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$. Insbesondere ist daher die Abbildung f_y stetig. \square

3.1.5 *Bemerkung.* Man beachte, dass wegen

$$\max(\|x\|, \|y\|) \leq \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \leq \|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x\|, \|y\|)$$

die Normen $\max(\|x\|, \|y\|)$, $\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ sowie $\|x\| + \|y\|$ auf dem Vektorraum $H \times H$ äquivalent sind. Sie erzeugen also die selbe Topologie.

Andererseits wird durch $((x_1; x_2), (y_1; y_2)) := (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ ein inneres Produkt auf $H \times H$ definiert. Man zeigt unschwer, dass die von diesem Produkt induzierte Norm gerade $\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ ist. //

Genauso wie im Kontext der normierten oder metrischen Räume die vollständigen besonders interessant sind, spielen auch unter allen Räume mit innerem Produkt die vollständigen eine ausgezeichnete Rolle.

3.1.6 Definition. Sei H ein Raum mit innerem Produkt. Ist H vollständig, d.h. $(H, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum, so heißt H ein *Hilbertraum*.

Als erstes wollen wir uns überlegen, dass jeder Raum mit innerem Produkt dicht in einen Hilbertraum eingebettet werden kann.

3.1.7 Definition. Sei H ein Raum mit innerem Produkt (\cdot, \cdot) . Ein Paar $(\hat{H}, (\cdot, \cdot))$ bestehend aus einem Raum \hat{H} mit innerem Produkt (\cdot, \cdot) zusammen mit einer Abbildung $\iota : H \rightarrow \hat{H}$, heißt eine *Hilbertraum Vervollständigung* von $(H, (\cdot, \cdot))$, wenn gilt:

(V_{Hil}1) $(\hat{H}, (\cdot, \cdot))$ ist ein Hilbertraum.

(V_{Hil}2) ι ist linear und isometrisch, d.h. $(\iota x, \iota y) = (x, y)$, $x, y \in H$.

(V_{Hil}3) $\overline{\iota(H)} = \hat{H}$, wobei der Abschluss bezüglich der Norm des Hilbertraumes \hat{H} zu verstehen ist.

Zwei Vervollständigungen $\langle (\hat{H}_1, (\cdot, \cdot)_1), \iota_1 \rangle$ und $\langle (\hat{H}_2, (\cdot, \cdot)_2), \iota_2 \rangle$ von $(H, (\cdot, \cdot))$ heißen *isomorph*, wenn es einen isometrischen Isomorphismus $\varphi : \hat{H}_1 \rightarrow \hat{H}_2$ gibt, sodass $\iota_2 = \varphi \circ \iota_1$.

3.1.8 Proposition. Sei H ein Raum mit innerem Produkt (\cdot, \cdot) . Dann besitzt $(H, (\cdot, \cdot))$ eine, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte, Hilbertraum Vervollständigung.

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ die von (\cdot, \cdot) auf H induzierte Norm, und bezeichne mit $\langle (\hat{H}, \|\cdot\|), \iota \rangle$ die bis auf Isomorphie eindeutige Vervollständigung des normierten Raumes $(H, \|\cdot\|)$.

Wir definieren auf $\hat{H} \times \hat{H}$ eine \mathbb{C} -wertige Funktion durch

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2), \quad x, y \in \hat{H}.$$

Da das Skalarmultiplizieren, das Addieren und die Normfunktion stetig sind, ist auch $\langle \cdot, \cdot \rangle : \hat{H} \times \hat{H} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Man sieht sofort, dass $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$. Außerdem gilt wegen der Polarformel, der Linearität von ι und der Sesquilinearität von (\cdot, \cdot) für feste $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und jedes feste $y \in \iota(H)$ auf der dichten Teilmenge $\iota(H) \times \iota(H) \subseteq \hat{H} \times \hat{H}$

$$\begin{aligned} \langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle &= (\iota^{-1}(\alpha x_1 + \beta x_2), \iota^{-1}(y)) \\ &= \alpha(\iota^{-1}(x_1), \iota^{-1}(y)) + \beta(\iota^{-1}(x_2), \iota^{-1}(y)) = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit gilt diese Gleichheit auch auf $\hat{H} \times \hat{H}$. Halten wir nun $x_1, x_2 \in \hat{H} \times \hat{H}$ fest und betrachten obige Gleichheit für variables y , so gilt die Gleichheit zunächst auf $\iota(H)$ und wieder wegen der Dichtheit und der Stetigkeit auf ganz \hat{H} .

Also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linear im ersten Argument und wegen $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ auch konjugiert linear im zweiten Argument.

Schließlich prüft man unmittelbar nach, dass $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ für $x \in \hat{H}$, womit sich $(\hat{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ als ein Hilbertraum herausstellt.

Sind $\langle (H_1, (\cdot, \cdot)_1), \iota_1 \rangle$ und $\langle (H_2, (\cdot, \cdot)_2), \iota_2 \rangle$ zwei Hilbertraum Vervollständigungen von $(H, (\cdot, \cdot))$, so sind $\langle (H_1, \|\cdot\|_1), \iota_1 \rangle$ und $\langle (H_2, \|\cdot\|_2), \iota_2 \rangle$ zwei Vervollständigungen des normierten Raumes $(H, \|\cdot\|)$. Daher existiert ein isometrischer Isomorphismus φ zwischen den normierten Räumen H_1 und H_2 mit $\iota_2 = \varphi \circ \iota_1$. Wegen der Polarformel, ist dieser auch isometrisch bezüglich der inneren Produkte $(\cdot, \cdot)_1$ und $(\cdot, \cdot)_2$. □

Das wohl fundamentalste Beispiel für einen Hilbertraum ist der Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen.

3.1.9 Beispiel. Sei μ ein positives Maß auf einem Messraum (Ω, \mathcal{A}) . Dann ist

$$(f, g) := \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu,$$

ein Skalarprodukt am Raum $L^2(\mu) := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$. Die von (\cdot, \cdot) induzierte Norm ist gerade die L^2 -Norm

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in L^2(\mu).$$

Insbesondere ist $(L^2(\mu), (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum. Man spricht vom Raum der *quadratisch integrierbaren Funktionen*. //

3.1.10 Beispiel. Ist in Beispiel 3.1.9 Ω eine Menge A , die σ -Algebra \mathcal{A} die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ und ist μ das Zählmaß auf A , so schreiben wir anstelle von $L^2(d\mu)$ meist $\ell^2(A)$, und sprechen vom Hilbertraum der *quadratisch summierbaren Folgen*. Schreibt man die Funktionen $x : A \rightarrow \mathbb{C}$ als Tupel $x = (x_{\alpha})_{\alpha \in A}$, wobei $x_{\alpha} = x(\alpha)$, so folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz leicht, dass

$$\ell^2(A) = \left\{ (x_{\alpha})_{\alpha \in A} : \sum_{\alpha \in A} |x_{\alpha}|^2 < \infty \right\},$$

wobei $\sum_{\alpha \in A} |x_{\alpha}|^2 := \sup_{I \in \mathcal{I}} \sum_{\alpha \in I} |x_{\alpha}|^2$. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ bezeichnet dabei die Menge aller endlichen Teilmengen von A . Man erkennt leicht, dass die Endlichkeit dieser Summe, bedeutet, dass $x_{\alpha} \neq 0$ für nur abzählbar viele $\alpha \in A$ und dass die entsprechende Reihe über diese abzählbar vielen α endlichen Grenzwert hat.

Das innere Produkt lässt sich nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz als

$$(x, y) = \sum_{\alpha \in A} x_{\alpha} \bar{y}_{\alpha}, \quad x = (x_{\alpha})_{\alpha \in A}, y = (y_{\alpha})_{\alpha \in A} \in \ell^2(A),$$

schreiben, wobei diese Summe als Grenzwert der absolut konvergenten Reihe $\sum_{\alpha \in A, x_\alpha \neq 0, y_\alpha \neq 0} x_\alpha \overline{y_\alpha}$ interpretiert werden kann. Insbesondere gilt $(x, e_\alpha) = x_\alpha$, wobei e_α jenes Element aus $\ell^2(A)$ ist, für das $e_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ gilt.

Schließlich ist noch wichtig, dass für $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \ell^2(A)$ das Netz

$$\left(\sum_{\alpha \in I} x_\alpha e_\alpha \right)_{I \in \mathcal{I}},$$

gegen $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ bzgl. $\|\cdot\|$ konvergiert, wobei $\mathcal{I} (\subseteq \mathcal{P}(A))$ versehen mit \subseteq als gerichtete Menge betrachtet wird. Für dieses Grenzverhalten schreiben wir auch

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha = (x_\alpha)_{\alpha \in A}.$$

Um das einzusehen, wähle $\epsilon > 0$ und sei $I_0 \in \mathcal{I}$ so, dass

$$\sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 < \epsilon + \sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|^2$$

für $I = I_0$. Offenbar gilt diese Ungleichung auch für alle $I \supseteq I_0$. Für solche I folgt dann mit $f = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$, dh. $f(\alpha) = x_\alpha$,

$$\begin{aligned} \|(x_\alpha)_{\alpha \in A} - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha e_\alpha\|^2 &= \int_A |f - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha e_\alpha|^2 d\mu \\ &= \int_{A \setminus I} |f|^2 d\mu = \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 - \sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|^2 < \epsilon. \end{aligned}$$

//

Ist $n \in \mathbb{N}$ und $A := \{1, \dots, n\}$, so hat man $\ell^2(A) = \mathbb{C}^n$ und

$$(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n,$$

also das übliche euklidische Skalarprodukt.

3.2 Orthogonalität

Die Geometrie eines Raumes mit innerem Produkt ist reichhaltiger als die eines allgemeinen normierten Raumes; zum Beispiel gilt ja die Parallelogrammregel. Nun charakterisiert diese Regel sogar Räume mit innerem Produkt. Ein fundamentales Konzept in Räumen mit innerem Produkt, welches in allgemeinen normierten Räumen nicht existiert, ist das der Orthogonalität.

3.2.1 Definition. Sei H ein Vektorraum mit innerem Produkt (\cdot, \cdot) . Zwei Elemente $x, y \in H$ heißen *orthogonal*, wenn $(x, y) = 0$ gilt. Man schreibt in diesem Fall $x \perp y$.

Ist $E \subseteq H$ eine Teilmenge, so heißt

$$E^\perp := \{x \in H : x \perp y, \text{ für alle } y \in E\}$$

das *orthogonale Komplement* von E .

↪ Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Raum mit innerem Produkt, und sei $E \subseteq H$. Dann kann man E^\perp auch anschreiben als

$$E^\perp = \bigcap_{y \in E} \{y\}^\perp = \bigcap_{y \in E} \ker f_y.$$

Da jedes Funktional f_y stetig und linear ist, ist E^\perp stets ein abgeschlossener linearer Unterraum von H .

↪ Es gilt

$$E^\perp (= \bigcap_{y \in E} \ker f_y) = (\bigcap_{y \in \overline{E}} \ker f_y)^\perp, \quad (3.2.1)$$

Dabei ist die Inklusion „ \supseteq “ trivial. Um die umgekehrte Inklusion einzusehen, sei $x \in \ker f_y$, $y \in E$. Da die Abbildung $y \mapsto (x, y)$ stetig ist, folgt $(x, y) = 0$ sogar für alle $y \in \overline{E}$.

↪ Seien M_i , $i \in I$, Teilmengen von H . Dann gilt

$$\bigcap_{i \in I} M_i^\perp = \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right)^\perp = \left(\text{span} \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right) \right)^\perp. \quad (3.2.2)$$

3.2.2 Definition. Sind M und N lineare Unterräume eines linearen Raumes X , so schreiben wir $X = M \dot{+} N$, wenn gilt $M + N = X$, $M \cap N = \{0\}$. Man spricht in diesem Fall von einer *direkten Summe*.

Ist auf X ein inneres Produkt gegeben und gilt zusätzlich $M \perp N$, so schreibt man $X = M \oplus N$ und spricht von einer *orthogonalen Summe*.

Für einen Vektorraum X sei an das Konzept einer *Projektion* aus der Linearen Algebra erinnert. Das ist eine lineare Abbildung $P : X \rightarrow X$, für die $P^2 = P$ gilt. Es gelten folgende Eigenschaften:

↪ Ist P eine Projektion, so ist auch $I - P$ eine Projektion.

↪ $\text{ran } P = \ker(I - P)$, $\ker P = \text{ran}(I - P)$.

↪ $\text{ran } P \dot{+} \ker P = X$.

↪ Sind A, B Unterräume von X mit $A \dot{+} B = X$, so gibt es eine eindeutige Projektion P mit $A = \text{ran } P$, $B = \ker P$. Wir sehen also, dass die Projektionen auf X genau den Zerlegungen des Raumes X in eine direkte Summe entsprechen.

Ist auf X ein inneres Produkt gegeben, so heißt P eine *orthogonale Projektion*, wenn $\ker P \perp \text{ran } P$.

↪ Für eine orthogonale Projektion P gilt stets

$$(Px, y) = (Px, Py) = (x, Py), \quad (x, y) = (Px, Py) + ((I - P)x, (I - P)y).$$

↪ Eine Projektion P ist genau dann orthogonal, wenn

$$(Px, y) = (x, Py) \quad \text{für alle } x, y \in X. \quad (3.2.3)$$

- ↪ Ist P eine orthogonale Projektion, so ist auch $I - P$ orthogonal.
- ↪ Orthogonale Projektionen sind stetig. Tatsächlich gilt für eine orthogonale Projektion P

$$\|Px\|^2 \leq \|Px\|^2 + \|(I - P)x\|^2 = \|x\|^2,$$

und daher $\|P\| \leq 1$. Für $x \in \text{ran } P$ gilt stets $Px = x$. Ist $P \neq 0$, so hat man also sogar $\|P\| = 1$.

- ↪ Für jede orthogonale Projektion P sind $\ker P$ und $\text{ran } P$ abgeschlossene Unterräume.
- ↪ Sind A, B Unterräume von X mit $A \oplus B = X$, so ist die Projektion P mit $A = \text{ran } P$, $B = \ker P$, orthogonal. Man nennt P auch die *orthogonale Projektion von X auf A* . Wir sehen also, dass die orthogonalen Projektionen auf X genau den Zerlegungen des Raumes X in eine orthogonale Summe entsprechen.

3.2.3 Satz. Sei H ein Hilbertraum. Dann gilt:

- (i) Sei $E \subseteq H$ eine nichtleere, konvexe, und abgeschlossene Teilmenge von H . Dann gibt es zu jedem $x \in H$ ein eindeutiges Element $p_E(x) \in E$ mit minimalen Abstand zu x , daher

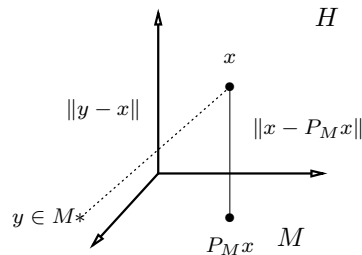
$$\|x - p_E(x)\| = d(x, E) := \inf\{\|y - x\| : y \in E\}.$$

Insbesondere ist dieses Infimum ein Minimum.

- (ii) Die Abbildung $p_E : H \rightarrow E (\subseteq H)$ ist stetig mit $p_E|_E = \text{id}_E$.
- (iii) Sei M ein abgeschlossener Unterraum von H . Dann gilt

$$H = M \oplus M^\perp,$$

und die dazugehörige orthogonale Projektion P_M mit $\text{ran } P_M = M$ und $\ker P_M = M^\perp$ stimmt mit p_M überein.



Beweis.

ad (i): Setze $d := d(x, E)$. Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irgendeine Folge von Elementen aus E mit $\|y_n - x\| \rightarrow d$. Da E konvex ist, gilt stets $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in E$, und daher

$$\|y_n + y_m - 2x\|^2 \geq 4d^2.$$

Nach der Parallelogrammregel gilt

$$\|y_n + y_m - 2x\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 \rightarrow 4d^2, \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Also folgt $\|y_n + y_m - 2x\|^2 \rightarrow 4d^2$ und $\|y_n - y_m\|^2 \rightarrow 0$. Wir sehen, dass $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, die wegen der Vollständigkeit von H gegen ein $y \in H$ konvergiert. Da E abgeschlossen ist, gilt $y \in E$. Klarerweise ist $\|y - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\| = d$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien $z, y \in E$ mit $\|z - x\| = \|y - x\| = d$ gegeben. Dann ist $\frac{1}{2}(z + y) \in E$, also $\|z + y - 2x\|^2 \geq 4d^2$, und $\|z + y - 2x\|^2 + \|z - y\|^2 = 2\|z - x\|^2 + 2\|y - x\|^2 = 4d^2$. Es folgt $\|z - y\| = 0$, also $z = y =: p_E(x)$.

ad(ii): Wegen der Stetigkeit von $x \mapsto d(x, E)$ folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ in H , dass $\|p_E(x_n) - x\| \rightarrow d(x, E) = d$. Nach dem ersten Beweisteil folgt $p_E(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_E(x_n)$. Für $x \in E$ gilt offensichtlich $p_E(x) = x$.

ad(iii): Für $x \in M \cap M^\perp$ gilt $(x, x) = 0$ und damit $M \cap M^\perp = \{0\}$. Um $M + M^\perp = H$ zu zeigen, sei $x \in H$ gegeben. Nach dem ersten Beweisteil gilt für jedes feste $m \in M$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|x - p_M(x)\| = d(x, M) \leq \|x - p_M(x) + \lambda m\|,$$

weil ja $\lambda m - p_M(x) \in M$. Mit Proposition 3.1.2, (vi), folgt $m \perp (x - p_M(x))$. Da $m \in M$ beliebig war, folgt $x - p_M(x) \in M^\perp$ und $x = p_M(x) + (x - p_M(x)) \in M + M^\perp$. □

3.2.4 Korollar. *Sei H ein Hilbertraum. Ist M ein linearer Unterraum, so gilt $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.*

Beweis. Ist $x \in M$, so ist $x \perp M^\perp$, also $x \in M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp$. Weiters ist $M^{\perp\perp}$ abgeschlossen und damit $\overline{M} \subseteq M^{\perp\perp}$. Nun gilt

$$\overline{M} + M^\perp = H = M^\perp + M^{\perp\perp},$$

da $\overline{M}^\perp = M^\perp$. Wir schließen, dass \overline{M} kein echter Unterraum von $M^{\perp\perp}$ sein kann. □

Satz 3.2.3 impliziert auch, dass sich der Dualraum eines Hilbertraumes in besonders einfacher Weise beschreiben lässt. Das ist die Aussage des folgenden *Darstellungssatzes von Riesz-Fischer*. Man verwechsle diese elementare Aussage nicht mit dem tiefliegenden Satz 2.3.9, welcher auch von seiner Natur her anders geartet ist. Leider werden diese beiden Sätze in der Literatur mit dem gleichen Namen bedacht.

Sei H ein Raum mit innerem Produkt (\cdot, \cdot) . Für $y \in H$ bezeichne f_y wieder das Funktional $f_y(x) := (x, y)$, $x \in H$. Wir haben schon gesehen, dass stets $f_y \in H'$ gilt. Aus Satz 3.2.3 folgt nun, dass bereits jedes stetige lineare Funktional von dieser Form ist.

3.2.5 Proposition. *Sei H ein Hilbertraum. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : \begin{cases} H & \rightarrow & H' \\ y & \mapsto & f_y \end{cases}$$

eine isometrische und konjugiert-lineare Bijektion von H auf H' .

Beweis. Wie wir bereits gesehen haben, ist für jedes $y \in H$ die Abbildung f_y ein stetiges lineares Funktional. Die Schwarzsche Ungleichung zeigt weiters, dass stets $|f_y(x)| = |(x, y)| \leq \|y\| \|x\|$, dass also $\|f_y\| \leq \|y\|$. Wegen $|f_y(y)| = (y, y) = \|y\|^2$, gilt sogar $\|f_y\| = \|y\|$. Als isometrische Abbildung ist Φ natürlich auch injektiv. Die Tatsache, dass Φ konjugiert-linear ist, ist klar aus den Eigenschaften eines Skalarproduktes.

Der wesentliche Schritt ist zu zeigen, dass Φ surjektiv ist. Sei dazu $f \in H'$ gegeben. Ist $f = 0$, so wähle $y = 0$. Sei also $f \neq 0$ und damit $\ker f \neq H$. Da f stetig ist, ist $\ker f$ abgeschlossen, und wir erhalten

$$\ker f \oplus (\ker f)^\perp = H.$$

Insbesondere existiert $z \in H, z \neq 0$, mit $z \perp \ker f$. Da stets $f(x)z - f(z)x \in \ker f$ gilt, folgt

$$f(x)(z, z) - f(z)(x, z) = 0,$$

d.h.

$$f(x) = \left(x, \frac{\overline{f(z)}z}{(z, z)} \right) \quad \text{für alle } x \in H. \quad \square$$

Sei H ein Raum mit innerem Produkt (\cdot, \cdot) . Eine Abbildung $[\cdot, \cdot] : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Sesquilinearform*, wenn

$$[x + y, z] = [x, z] + [y, z], \quad [x, y + z] = [x, y] + [x, z] \quad \text{für } x, y \in H,$$

$$[\alpha x, y] = \alpha[x, y], \quad [x, \alpha y] = \overline{\alpha}[x, y] \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{C}, x, y \in H.$$

Eine Sesquilinearform $[\cdot, \cdot]$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt mit

$$|[x, y]| \leq C \|x\| \|y\| \quad \text{für alle } x, y \in H. \quad (3.2.4)$$

Beispiele beschränkter Sesquilinearformen erhält man mit Hilfe beschränkter linearer Operatoren: Sei $G \in \mathcal{B}(H)$, und betrachte die Abbildung $[x, y] := (Gx, y)$. Diese ist klarerweise eine Sesquilinearform und es gilt

$$|[x, y]| = |(Gx, y)| \leq \|Gx\| \|y\| \leq \|G\| \|y\| \|x\| \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Aus Proposition 3.2.5 folgt nun, dass auf einem Hilbertraum bereits jede beschränkte Sesquilinearform von dieser Gestalt ist.

3.2.6 Proposition (Lax-Milgram). *Sei H ein Hilbertraum. Ist $[\cdot, \cdot] : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte Sesquilinearform, so existiert ein eindeutiger Operator $G \in \mathcal{B}(H)$ mit*

$$[x, y] = (Gx, y) \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Die kleinstmögliche Konstante, die man in (3.2.4) verwenden kann ist $\|G\|$.

Beweis. Sei $[\cdot, \cdot]$ eine beschränkte Sesquilinearform, und sei C eine beliebige Konstante, für die (3.2.4) gilt. Für $x \in H$ betrachte die Abbildung

$$L_x : \begin{cases} H & \rightarrow \mathbb{C} \\ y & \mapsto [x, y] \end{cases}$$

Dann ist L_x linear und erfüllt $|L_x(y)| = |[x, y]| \leq C \|x\| \cdot \|y\|$, d.h. $\|L_x\| \leq C \|x\|$. Wie man aus der Definition sieht, gilt $L_{x_1+x_2} = L_{x_1} + L_{x_2}$ und $L_{\alpha x} = \overline{\alpha} L_x$.

Also ist die Abbildung $\Psi : x \mapsto L_x$ eine konjugiert lineare Abbildung von H in H' , und erfüllt $\|\Psi x\| \leq C\|x\|$.

Sei Φ wie in Proposition 3.2.5, und definiere $G := \Phi^{-1} \circ \Psi$. Dann ist $G : H \rightarrow H$ linear und erfüllt $\|Gx\| \leq C\|x\|$ für alle $x \in H$. Also ist $G \in \mathcal{B}(H)$, wobei $\|G\| \leq C$. Weiters haben wir nach den Definitionen von L_x , Ψ und Φ

$$(Gx, y) = \overline{(y, Gx)} = \overline{\Phi(Gx)(y)} = \overline{\Psi(x)(y)} = \overline{L_x(y)} = [x, y] \quad \text{für } x, y \in H.$$

Wegen der Schwarzschen Ungleichung gilt die Beziehung (3.2.4) mit der Konstanten $\|G\|$. Außerdem gilt $\|G\| \leq C$ für jedes $C \geq 0$, für das auch (3.2.4) gilt. Also ist $\|G\|$ tatsächlich die kleinstmögliche Konstante, die man in (3.2.4) verwenden kann.

Die Eindeutigkeit gilt, da aus $(Gx, y) = (\tilde{G}x, y)$ bzw. $((G - \tilde{G})x, y) = 0$ für alle $x, y \in H$ zunächst $(G - \tilde{G})x \in H^\perp = \{0\}$ für alle $x \in H$ und damit $G = \tilde{G}$ folgt. □

Der Operator G in Proposition 3.2.6 heißt auch der *Gram-Operator* der Sesquilinearform $[\cdot, \cdot]$ bezüglich (\cdot, \cdot) .

3.3 Orthonormalsysteme

3.3.1 Definition. Sei H ein Hilbertraum. Eine Teilmenge $M \subseteq H$ heißt *Orthonormalsystem* oder kurz *ONS*, wenn für alle $u, v \in A$

$$(u, v) = \begin{cases} 1 & , \quad u = v \\ 0 & , \quad u \neq v \end{cases}$$

Ein Orthonormalsystem M heißt *Orthonormalbasis* oder kurz *ONB*, wenn es kein echt größeres Orthonormalsystem gibt, d.h. wenn für jedes Orthonormalsystem \tilde{M} mit $\tilde{M} \supseteq M$ bereits $\tilde{M} = M$ gilt. Eine Orthonormalbasis nennt man ein auch *vollständiges Orthonormalsystem*.

Man beachte, dass ein Orthonormalsystem stets linear unabhängig ist, da aus $\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0$ immer

$$\lambda_l = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k, u_l \right) = 0 \quad \text{für } l = 1, \dots, n,$$

folgt. Obwohl der Begriff Orthonormalbasis an den Begriff Basis eines Vektorraumes erinnert, sind Orthonormalbasen nur für endlichdimensionale Hilberträume tatsächlich Vektorraumbasen.

In der linearen Algebra kann eine Basis eines \mathbb{C} -Vektorraumes dazu verwendet werden, zu zeigen, dass jeder Vektorraum X isomorph zu einem Vektorraum von ganz spezieller Gestalt ist, nämlich zu dem Vektorraum aller Tupel $(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ mit der Eigenschaft, dass alle bis auf endlich viele x_i gleich Null sind. Hier ist I die Mächtigkeit einer Basis von X . Genauso können wir den Begriff der Orthonormalbasis verwenden um zu zeigen, dass jeder Hilbertraum isomorph zu gewissen Hilberträumen spezieller Gestalt ist. Es wird sich herausstellen, dass diese „Prototypen“ die Hilberträume $\ell^2(A)$ sind.

Als erstes wollen wir zeigen, dass es stets Orthonormalbasen gibt.

3.3.2 Lemma. *Sei H ein Hilbertraum und sei M ein Orthonormalsystem. Dann existiert eine Orthonormalbasis \tilde{M} mit $\tilde{M} \supseteq M$. Insbesondere existieren also Orthonormalbasen.*

Beweis. Betrachte die Menge \mathcal{M} aller Orthonormalsysteme N mit $N \supseteq M$. Diese ist mit der mengentheoretischen Inklusion geordnet. Wir überprüfen die Voraussetzung des Lemmas von Zorn.

Zunächst ist \mathcal{M} nicht leer, denn $M \in \mathcal{M}$. Ist \mathcal{N} eine totalgeordnete nicht leere Teilmenge von \mathcal{M} , so betrachten wir $\tilde{N} := \bigcup_{N \in \mathcal{N}} N$. Sind $u_1, u_2 \in \tilde{N}$, so existieren $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ mit $u_1 \in N_1$ und $u_2 \in N_2$. Da \mathcal{N} totalgeordnet ist, gilt entweder $N_1 \subseteq N_2$ oder $N_2 \subseteq N_1$. Im ersten Fall gehören u_1 und u_2 beide zu N_2 , woraus $(u_1, u_2) = 0$ oder $(u_1, u_2) = 1$ folgt, je nachdem ob $u_1 \neq u_2$ oder $u_1 = u_2$. Im zweiten Fall schließt man genauso. Also ist \tilde{N} ein Orthonormalsystem. Offenbar ist \tilde{N} eine obere Schranke von \mathcal{N} .

Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element \tilde{M} in \mathcal{M} . Klarerweise ist \tilde{M} auch maximal in der Menge aller Orthonormalsysteme. \square

3.3.3 Satz. *Sei H ein Hilbertraum, $M = \{u_\alpha : \alpha \in A\}$ ein nicht leeres Orthonormalsystem mit $u_\alpha \neq u_\beta$ für $\alpha \neq \beta$, und setze $E := \overline{\text{span}\{u_\alpha : \alpha \in A\}}$. Für $x \in H$ definiere*

$$\hat{x} : \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{C} \\ \alpha & \mapsto (x, u_\alpha)_H \end{cases}$$

Dann

- (i) gilt $\hat{x} \in \ell^2(A)$ für alle $x \in H$;
- (ii) ist die Abbildung $\hat{\cdot} : x \mapsto \hat{x}$ eine lineare und surjektive Abbildung von H auf $\ell^2(A)$ mit Abbildungsnorm eins; insbesondere gilt

$$\|\hat{x}\|_{\ell^2(A)} \leq \|x\|_H, \quad x \in H; \quad (3.3.1)$$

- (iii) gilt $\hat{\cdot} = \hat{\cdot}|_E \circ P_E$, wobei P_E die orthogonale Projektion von H auf E ist;
- (iv) gilt $\ker(\hat{\cdot}) = E^\perp$ und die Einschränkung $\hat{\cdot}|_E$ von $\hat{\cdot}$ auf E ist eine lineare und isometrische Bijektion von E auf $\ell^2(A)$;
- (v) gilt

$$P_E x = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) u_\alpha, \quad x \in H, \quad (3.3.2)$$

wobei diese Summe als Grenzwert des Netzes $(\sum_{\alpha \in I} \hat{x}(\alpha) u_\alpha)_{I \in \mathcal{I}}$ zu interpretieren ist, wobei $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ die Menge aller endlichen Teilmengen gerichtet durch \subseteq ist.

Beweis. Die Menge $D := \text{span}\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ ist eine dichte Teilmenge des Hilbertraumes E . Die Abbildung $\hat{\cdot}|_D : D \rightarrow \ell^2(A)$ bildet ein Element $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{\alpha_k} \in D$ auf \hat{x} ab, wobei

$$\hat{x}(\alpha) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_{\alpha_k}, u_\alpha \right) = \begin{cases} \lambda_k & , \alpha = \alpha_k, k = 1, \dots, n, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\|x\|_H^2 &= \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_{\alpha_k}, \sum_{l=1}^n \lambda_l u_{\alpha_l} \right)_H \\ &= \sum_{k,l=1}^n \lambda_k \overline{\lambda_l} (u_{\alpha_k}, u_{\alpha_l})_H = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 = \|\hat{x}\|_{\ell^2(A)}^2.\end{aligned}$$

Also ist $\hat{\cdot}|_D$ isometrisch.

Für $x = u_\beta$ folgt aus (3.3.3), dass $\hat{u}_\beta = (\alpha \mapsto \delta_{\alpha\beta}) = e_\beta$. Insbesondere ist das Bild von D unter $\hat{\cdot}|_D$ die lineare Hülle aller e_β , $\beta \in A$ in $\ell^2(A)$ und damit genau die Menge aller Elemente $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \ell^2(A)$, für die alle bis auf endlich viele x_α gleich Null sind. Diese Menge ist dicht in $\ell^2(A)$, vgl. Beispiel 3.1.10. Nach Satz 2.5.2 besitzt $\hat{\cdot}|_D$ eine bijektive und isometrische Fortsetzung $F : E \rightarrow \ell^2(A)$.

Sei $\alpha \in A$ festgehalten. Für jedes $x \in E$ gilt

$$(x, u_\alpha)_H = (Fx, Fu_\alpha)_{\ell^2(A)} = (Fx, \hat{u}_\alpha)_{\ell^2(A)} = (Fx, e_\alpha)_{\ell^2(A)} = (Fx)(\alpha).$$

Also ist $Fx = \hat{x}$ für alle $x \in E$.

Wegen $u_\alpha = P_E u_\alpha \in E$ gilt für jedes $x \in H$

$$\widehat{P_E x}(\alpha) = (P_E x, u_\alpha)_H = (x, u_\alpha)_H = \hat{x}(\alpha),$$

und damit $\widehat{P_E x} = \hat{x}$. Insbesondere ist damit (i) und auch (iii) gezeigt.

Aus (iii) folgt auch die Linearität von $\hat{\cdot}$ sowie $\|\hat{\cdot}\| \leq 1$. Da $\hat{\cdot}|_E = F$ isometrisch ist, schließen wir von (iii) auch auf (iv). Wegen $\|\hat{x}\|_{\ell^2(A)} = \|x\|_H$ für $x \in E \neq \{0\}$ gilt sogar $\|\hat{\cdot}\| = 1$.

Da $\hat{\cdot}$ den Bildraum E von P_E isometrisch auf $\ell^2(A)$ abbildet, gilt die Reihendarstellung (3.3.2) in H genau dann, wenn im $\ell^2(A)$ die Darstellung

$$\hat{x} = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) \hat{u}_\alpha$$

gilt. Wegen $\hat{u}_\alpha = e_\alpha$ folgt das unmittelbar aus der entsprechenden Feststellung in Beispiel 3.1.10. □

Die Zahlen $\hat{x}(\alpha)$ in Satz 3.3.3 nennt man die *Fourier-Koeffizienten* von x bezüglich des Orthonormalsystems M . Die Ungleichung in (3.3.1) heißt auch *Besselsche Ungleichung*. Die Summe in (3.3.2) kann auch als klassische H -wertige Reihe interpretiert werden, wenn man nur über die $\alpha \in A$ summiert, für die $\hat{x}(\alpha) \neq 0$ gilt. In der Tat, sind das wegen (3.3.1) nur immer höchstens abzählbar viele.

3.3.4 Korollar. *Sei H ein Hilbertraum und $M = \{u_\alpha : \alpha \in A\}$ ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:*

- (i) M ist eine Orthonormalbasis.
- (ii) $D := \text{span}\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ ist dicht in H .
- (iii) $\|\hat{x}\|_{\ell^2(A)} = \|x\|_H$ für alle $x \in H$.
- (iv) $(\hat{x}, \hat{y})_{\ell^2(A)} = (x, y)_H$ für alle $x, y \in H$.

(v) Für alle $x \in H$ gilt

$$x = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) u_{\alpha}. \quad (3.3.4)$$

Beweis. Ist D nicht dicht in H ist, so folgt $E := \overline{D} \neq H$. Wegen Satz 3.2.3, (ii), gilt daher $E^{\perp} \neq \{0\}$. Für jedes $u \in E^{\perp}$ mit $\|u\| = 1$ ist $M \cup \{u\}$ ein Orthonormalsystem, welches M echt umfasst. Somit gilt (i) \Rightarrow (ii).

Ist M keine Orthonormalbasis, so existiert ein Orthonormalsystem $\tilde{M} \supsetneq M$. Jedes $u \in \tilde{M} \setminus M$ erfüllt $0 \neq u \perp M$, womit $0 \neq u \in E^{\perp}$ und daher $E \neq H$. Also gilt auch (ii) \Rightarrow (i).

D ist genau dann dicht, wenn $E = H$. Nach Satz 3.3.3 ist die Abbildung $\hat{\cdot}$ genau dann auf ganz H isometrisch, wenn $E = H$. Also gilt (ii) \Leftrightarrow (iii). Die Äquivalenz von (iii) und (iv) folgt unmittelbar aus der Polarformel.

Ist M eine Orthonormalbasis, d.h. $E = H$, so ist $P_E = I$. Die Darstellung (3.3.4) folgt also aus (3.3.2). Umgekehrt folgt aus (3.3.4), dass $E = \overline{D} = H$. \square

Die Beziehung (iii) heißt auch *Parsevalsche Gleichung*, und die Reihe in (3.3.4) nennt man die *Fourierreihe* bezüglich der Orthonormalbasis M .

Als Vorbereitung für die kommenden Beispiele wollen wir mit $\frac{1}{2\pi}\lambda$ das normierte Lebesgue-Maß auf $[0, 2\pi)$ bezeichnen, wobei $[0, 2\pi)$ mit der σ -Algebra aller in diesem Intervall enthaltenen Borelmengen aus \mathfrak{B} versehen ist. Bekannterweise ist

$$\psi : \begin{cases} [0, 2\pi) & \rightarrow \mathbb{T} (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}) \\ t & \mapsto e^{it} \end{cases}$$

eine in beide Richtungen messbare Bijektion, wenn wir \mathbb{T} mit der σ -Algebra aller in \mathbb{T} enthaltenen Borelmengen aus \mathfrak{B}_2 versehen.

Das normierte Bogenmaß μ auf \mathbb{T} ist das normierte Oberflächenmaß und stimmt mit $(\frac{1}{2\pi}\lambda)^{\psi}$ überein, wobei $(\frac{1}{2\pi}\lambda)^{\psi}(B) = (\frac{1}{2\pi}\lambda)(\psi^{-1}(B)) = \frac{\lambda(\psi^{-1}(B))}{2\pi}$. Somit ist

$$\Psi : \begin{cases} L^2(\mathbb{T}, \mu) & \rightarrow L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\lambda) \\ f & \mapsto f \circ \psi \end{cases}$$

ein isometrischer Isomorphismus. Dabei gilt $\Psi(z \mapsto z^m) = (t \mapsto e^{imt})$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Weiters ist $\Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}))$ offenbar der Raum aller komplexwertigen, auf $[0, 2\pi]$ stetig fortsetzbaren Funktionen mit an 0 und 2π übereinstimmenden Werten. Somit gilt offenbar $C_{00}(0, 2\pi) \subseteq \Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}))$, wenn man sich die Funktionen f aus $C_{00}(0, 2\pi)$ auf $[0, 2\pi)$ durch $f(0) = 0$ stetig fortgesetzt denkt.

Die lineare Hülle in $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ aller Funktionen der Bauart $\mathbb{T} \ni z \mapsto z^m$, $m \in \mathbb{Z}$, ergibt die Menge aller trigonometrischen Polynome $\mathbb{T} \ni z \mapsto p(z)$. Diese sind nach dem Satz von Stone-Weierstraß dicht in $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ bzgl. der Supremumsnorm, weil die trigonometrischen Polynome eine unter Konjugieren abgeschlossene, 1 enthaltende und Punkte trennende Algebra abgeben. Da $\Psi : C(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \rightarrow \Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}))$ auch isometrisch bzgl. der jeweiligen Supremumsnormen ist, muss auch die lineare Hülle aller Funktion $[0, 2\pi) \ni t \mapsto e^{imt}$, $m \in \mathbb{Z}$, dicht in $\Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}))$ sein.

Da $C_{00}(0, 2\pi) (\subseteq \Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C})))$ dicht bzgl. $\|\cdot\|_2$ in $L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\lambda)$ liegt, muss auch $\Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}))$ diese Eigenschaft haben. Wegen $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_{\infty}$ auf $\Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}))$

ist sogar die lineare Hülle aller Funktion $[0, 2\pi) \ni t \mapsto e^{imt}$, $m \in \mathbb{Z}$, dicht in $L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\lambda)$ bzgl. $\|\cdot\|_2$.

Wenden wir wieder Ψ^{-1} an, so sehen wir, dass auch der Raum der trigonometrischen Polynome in $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ dicht liegt.

3.3.5 Beispiel. Wir wollen zeigen, dass die Menge $M := \{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ ist. Die Tatsache, dass M ein Orthonormalsystem ist, folgt aus

$$\int_{\mathbb{T}} z^n \overline{z^m} d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi)} (e^{it})^n \overline{(e^{it})^m} d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} 1 & , n = m \\ 0 & , n \neq m \end{cases}$$

Oben haben wir gesehen, dass $\text{span } M$ dicht in $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ ist, womit M gemäß Korollar 3.3.4 eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ ist. //

Klarerweise bleiben alle Ergebnisse über Orthonormalsystems bei isometrischen Isomorphismen erhalten, also kann man die Aussagen von Beispiel 3.3.5 auch in den $L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\lambda)$ transportieren. Tut man dies, so erhält man gerade die klassische L^2 -Theorie der *Fourierreihen*. Wegen ihrer großen historischen Bedeutung, und da gerade solche speziellen Reihenentwicklungen in vielen Anwendungen auftreten, wollen wir dies explizit formulieren.

3.3.6 Beispiel. Die Menge $M := \{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\lambda)$. Ist für $f \in L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\lambda)$ eine Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ definiert als

$$\phi_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

so gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\phi_n|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n e^{inx} = f(x),$$

wobei die Konvergenz der Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n e^{inx}$ im Sinne der L^2 -Norm zu verstehen ist.

Schreibt man $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ und fasst entsprechende Terme in der Fourierreihe zusammen, so erhält man ihre, vielleicht bekanntere, Gestalt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

mit

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Die Konvergenz der Reihe ist wieder im Sinne der L^2 -Norm zu verstehen. //

Um Orthonormalsysteme zu konstruieren, verwendet man das *Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt*. Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine linear unabhängige Teilmenge des Hilbertraumes H . Dann definiert man induktiv

$$u_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|},$$

$$v_n := x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, u_i) u_i, \quad u_n := \frac{v_n}{\|v_n\|}.$$

Man rechnet leicht nach, dass dann $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem ist, und dass für alle N

$$\text{span}\{u_1, \dots, u_N\} = \text{span}\{x_1, \dots, x_N\}.$$

Ist $\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in H , so erhält man auf dieser Art also eine Orthonormalbasis von H .

3.3.7 Beispiel. Betrachte den Hilbertraum $L^2(-1, 1)$. Dann ist die Menge $\{1, x, x^2, \dots\}$ eine linear unabhängige Menge, und $\text{span}\{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist dicht in H . Mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Verfahrens erhalten wir also eine Orthonormalbasis $\{b_0, b_1, b_2, \dots\}$ von $L^2(-1, 1)$. Tatsächlich ergibt sich

$$b_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei P_n das n -te *Legendre-Polynom*

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

bezeichnet. //

3.3.8 Beispiel. Betrachte die Menge

$$H^2 := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Da für eine quadratisch summierbare Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mindestens 1 ist, ist H^2 ein Vektorraum bestehend aus Funktionen auf der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = U_1^{\mathbb{C}}(0)$. Versieht man H^2 mit dem inneren Produkt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n},$$

so ist die Abbildung $\Phi : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein isometrischer Isomorphismus von H^2 auf $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Damit wird also H^2 ein Hilbertraum, man spricht vom *Hardy-Raum am Einheitskreis*.

Für $z_0 \in \mathbb{D}$, setze $K_{z_0}(z) := \frac{1}{1 - \overline{z_0}z}$. Dann gilt $K_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_0^n} z^n$, also ist $K_{z_0} \in H^2$. Weiters sehen wir, dass

$$(f, K_{z_0})_{H^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \overline{(z_0^n)} = f(z_0), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2, \quad z_0 \in \mathbb{D}.$$

Es ist also jedes *Punktauswertungsfunktional*

$$\chi_{z_0} : \begin{cases} H^2 & \rightarrow \mathbb{C} \\ f & \mapsto f(z_0) \end{cases}$$

stetig. //

Kapitel 4

Vollständigkeit

Die Gültigkeit vieler wichtiger Sätze der Analysis hängt wesentlich davon ab, dass die betrachteten Systeme vollständig sind. Als Beispiel seien nur die „unvollständigen Systeme“ der rationalen Zahlen genannt oder das Riemannsche Integral. Beide sind denkbar unpraktisch im Vergleich zu ihren „vollständigen“ Äquivalenten, den reellen Zahlen und dem Lebesgue-Integral. Wir wollen in diesem Kapitel die Auswirkungen der Vollständigkeit im Kontext der normierten Räume untersuchen.

4.1 Der Satz von Baire

Die Grundlage für alle Sätze dieses Kapitels bildet der folgende

4.1.1 Satz (von Baire). *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und seien $V_n, n \in \mathbb{N}$, offene und dichte Teilmengen von X . Dann ist auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ dicht in X .*

Beweis. Eine Teilmenge von X ist genau dann dicht, wenn sie mit jeder nichtleeren offenen Menge nichtleeren Schnitt hat. Sei eine nichtleere offene Teilmenge W von X gegeben. Wir müssen also zeigen, dass $W \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$ ist. Bezeichne wieder $U_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

Wir konstruieren induktiv Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $0 < r_n < \frac{1}{n}$ und

$$W \supseteq \frac{V_1}{\cup} \supseteq \frac{V_2 \cap V_1}{\cup} \supseteq \frac{V_3 \cap V_2 \cap V_1}{\cup} \supseteq \dots$$

Da V_1 dicht ist, ist $V_1 \cap W \neq \emptyset$ und als Durchschnitt zweier offener Mengen auch offen. Also existieren $x_1 \in X, 0 < r_1 < 1$, sodass $\overline{U_{r_1}(x_1)} \subseteq V_1 \cap W$.

Sei $n \geq 2$, und seien x_{n-1}, r_{n-1} , bereits definiert. Da V_n dicht und offen ist, ist $V_n \cap \overline{U_{r_{n-1}}(x_{n-1})} \neq \emptyset$ und offen. Daher existieren $x_n \in X$ und $0 < r_n < \frac{1}{n}$ mit $\overline{U_{r_n}(x_n)} \subseteq V_n \cap \overline{U_{r_{n-1}}(x_{n-1})}$.

Sind $i, j \geq n$, so liegen x_i und x_j beide in $\overline{U_{r_n}(x_n)}$, also ist

$$d(x_i, x_j) \leq \frac{2}{n} \quad \text{für alle } i, j \geq n.$$

Somit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X . Da X vollständig ist, existiert $x \in X$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Da für $i \geq n$ sicher $x_i \in \overline{U_{r_n}(x_n)}$ gilt, folgt auch $x \in \overline{U_{r_n}(x_n)}$. Daher ist

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_{r_n}(x_n)} \subseteq W \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n,$$

insbesondere ist also $W \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$. □

Oft ist die Signifikanz des Satzes von Baire das folgende Korollar.

4.1.2 Korollar. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und seien $V_n, n \in \mathbb{N}$, offene und dichte Teilmengen von X . Dann ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$.* □

4.1.3 Bemerkung. Geht man im Satz von Baire zu den Komplementen über, so erhält man wegen $\overline{A_n^c} = (A_n^\circ)^c$ folgende Umformulierung.

Ist $A_n, n \in \mathbb{N}$ eine Folge abgeschlossener Mengen mit leerem Inneren, so hat auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ leeres Inneres. //

4.1.4 Bemerkung. Der Satz von Baire wird oft auch *Baire'scher Kategoriensatz* genannt. Das hat folgenden Grund.

Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Kann M als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen geschrieben werden, so heißt sie *von 1. Kategorie in X* . Dabei nennen wir eine Menge $E \subseteq X$ *nirgends dicht*, wenn \overline{E} keine nichtleeren offenen Mengen enthält. Oft werden Mengen von 1. Kategorie auch *mager* genannt. Ist die Menge M nicht von 1. Kategorie in X , so heißt sie *von 2. Kategorie in X* .

Geht man in Satz 4.1.1 zu den Komplementen über, so erhält man, dass jeder vollständige metrische Raum in sich selbst von 2. Kategorie ist. //

4.2 Der Satz von Banach-Steinhaus

Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Dann heißt M eine G_δ -Menge, wenn M als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen dargestellt werden kann.

4.2.1 Satz (von Banach-Steinhaus). *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, und sei $R_i : X \rightarrow Y$, $i \in I$, eine Familie beschränkter linearer Operatoren. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen.*

- (i) *Es existiert eine Konstante $C \in [0, +\infty)$, sodass $\|R_i\| \leq C$ für alle $i \in I$.*
- (ii) *Es existiert eine dichte G_δ -Menge $M \subseteq X$, sodass $\sup_{i \in I} \|R_i x\| = \infty$ für alle $x \in M$.*

Beweis. Setze

$$V_n := \bigcup_{i \in I} \{x \in X : \|R_i x\| > n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aus der Stetigkeit der R_i folgt die der Funktionen $x \mapsto \|R_i x\|$, womit die V_n als Vereinigung offener Mengen offen ist. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Eine der Mengen V_n ist nicht dicht in X : In diesem Fall gibt es dann $N \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$ und $r > 0$, sodass $K_r(x_0) \cap V_N = \emptyset$. Also gilt

$$\|R_i(x_0 + x)\| \leq N, \quad \text{für alle } i \in I, x \in K_r(0).$$

Wir erhalten

$$\|R_i x\| \leq \|R_i(x_0 + x)\| + \|R_i x_0\| \leq 2N, \quad \text{für alle } x \in K_r(0),$$

und daher $\|R_i\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|R_i x\| \leq \frac{2N}{r}$.

2. Jede der Mengen V_n ist dicht in X : Nach dem Satz von Baire ist auch $M := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ dicht. Offenbar ist diese Menge eine G_δ -Menge. Für jedes $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ gilt aber $\sup_{i \in I} \|R_i x\| = \infty$. □

Der Satz von Banach-Steinhaus wird oft in der folgenden Form angewendet.

4.2.2 Korollar (Principle of uniform boundedness). *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, und sei $R_i : X \rightarrow Y$, $i \in I$, eine Familie beschränkter linearer Operatoren. Ist die Familie $\{R_i : i \in I\}$ punktweise beschränkt, d.h. gilt für jedes feste $x \in X$*

$$\sup_{i \in I} \|R_i x\| = C_x < +\infty,$$

so ist die Familie gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$\sup_{i \in I} \|R_i\| = C < +\infty.$$

Beweis. Wäre $\{R_i : i \in I\}$ nicht gleichmäßig beschränkt, so existierte sogar eine dichte G_δ -Menge von Punkten x mit $\sup_{i \in I} \|R_i x\| = \infty$. □

4.2.3 Korollar. *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $R_n : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge beschränkter linearer Operatoren. Existiert für jedes $x \in X$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n x \in Y$, so ist die durch*

$$R : \begin{cases} X & \rightarrow Y \\ x & \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} R_n x \end{cases}$$

definierte Abbildung linear und beschränkt.

Beweis. Dass R linear ist, folgt aus der Linearität des Grenzwertes. Aus der Konvergenz der Folge $(R_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|R_n x\| < \infty$ für jedes $x \in X$. Damit gilt nach dem Satz von Banach-Steinhaus $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|R_n\| =: C < \infty$. Es folgt

$$\|R x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n x\| \leq C \|x\|.$$

□

4.3 Der Satz von der offenen Abbildung

Seien X, Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$. Dann heißt f eine *offene Abbildung*, wenn für jede in X offene Menge O auch $f(O)$ in Y offen ist.

4.3.1 Satz (von der offenen Abbildung). *Seien X und Y Banachräume und $R : X \rightarrow Y$ eine surjektive und beschränkte lineare Abbildung. Dann ist R offen.*

Im Beweis verwenden wir die folgende Umformulierung der Eigenschaft einer Abbildung offen zu sein.

4.3.2 Lemma. *Seien X und Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ linear. Dann ist T genau dann offen, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $T(U_1^X(0)) \supseteq U_\delta^Y(0)$.*

Beweis. Ist T offen, so ist $T(U_1^X(0))$ eine offene Menge, die das Element $T(0) = 0$ enthält. Daher gibt es eine gewisse Kugel $U_\delta^Y(0)$, welche in $T(U_1^X(0))$ enthalten ist.

Umgekehrt sei angenommen, dass $T(U_1^X(0)) \supseteq U_\delta^Y(0)$ mit einem $\delta > 0$, und sei eine offene Menge $O \subseteq X$ gegeben. Ist $O = \emptyset$, so ist trivialerweise $T(O) = \emptyset$ offen. Anderenfalls sei $y \in T(O)$ gegeben, und wähle $x \in O$ mit $T(x) = y$. Da O offen ist, gibt es $r > 0$, sodass $U_r^X(x) \subseteq O$. Nun gilt $U_r^X(x) = x + rU_1^X(0)$, und daher

$$T(O) \supseteq T(U_r^X(x)) = T(x) + rT(U_1^X(0)) \supseteq y + rU_\delta^Y(0) = U_{r\delta}^Y(y).$$

Da $y \in T(O)$ beliebig war, ist $T(O)$ offen. □

Ein weiterer Beweisteil ist folgendes Lemma.

4.3.3 Lemma. *Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, und sei $T : X \rightarrow Y$ eine beschränkte lineare Abbildung. Wenn $\overline{T(U_1^X(0))} \supseteq U_1^Y(0)$, so gilt schon $T(U_1^X(0)) \supseteq U_1^Y(0)$.*

Beweis. Aus unserer Voraussetzung folgt $\overline{T(U_1^X(0))} \supseteq \overline{U_1^Y(0)} = K_1^Y(0)$. Durch Normieren sieht man, dass es damit insbesondere zu jedem $y \in Y$ und $\epsilon > 0$ ein $x \in X$ gibt mit

$$\|x\| \leq \|y\| \quad \text{und} \quad \|y - Tx\| < \epsilon.$$

Sei $y_1 \in U_1^Y(0)$ gegeben. Wähle $\epsilon_n > 0$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < 1 - \|y_1\|$, und $x_1 \in X$ mit $\|x_1\| \leq \|y_1\|$ und $\|y_1 - Tx_1\| < \epsilon_1$.

Startend mit y_1 und x_1 konstruieren wir nun induktiv Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Y bzw. X . Sind für $n \geq 1$ die Elemente y_n und x_n bereits definiert, so setzen wir $y_{n+1} := y_n - Tx_n$ und wählen $x_{n+1} \in X$ mit $\|x_{n+1}\| \leq \|y_{n+1}\|$ und $\|y_{n+1} - Tx_{n+1}\| < \epsilon_{n+1}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\|x_{n+1}\| \leq \|y_{n+1}\| = \|y_n - Tx_n\| < \epsilon_n,$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \|x_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \leq \|y_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < 1.$$

Da X vollständig ist, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent. Klarerweise liegt ihr Grenzwert x in $U_1^X(0)$. Wegen $y_n \rightarrow 0$ erhalten wir

$$Tx = T\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N Tx_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (y_n - y_{n+1}) = y_1,$$

also ist $y_1 \in T(U_1^X(0))$. □

Beweis (von Satz 4.3.1). Aus $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k^X(0)$ und aus der Surjektivität von R folgt $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} R(U_k^X(0)) = R(X) = Y$. Wir erhalten

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{R(U_k^X(0))}^c \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} R(U_k^X(0))^c = \emptyset.$$

Da Y vollständig ist, gibt es wegen dem Satz von Baire ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\overline{R(U_k^X(0))}^c$ nicht dicht ist, dh. $W \cap \overline{R(U_k^X(0))}^c = \emptyset$ bzw. $W \subseteq \overline{R(U_k^X(0))}$ für ein offenes $W \neq \emptyset$, $W \subseteq Y$.

Wegen $-W \subseteq -\overline{R(U_k^X(0))} = \overline{-R(U_k^X(0))} = \overline{R(U_k^X(0))}$, wegen der Stetigkeit der Addition und wegen $U_k^X(0) + U_k^X(0) \subseteq U_{2k}^X(0)$ folgt

$$W - W \subseteq \overline{R(U_k^X(0))} + \overline{R(U_k^X(0))} \subseteq \overline{R(U_{2k}^X(0))}.$$

Da $W - W$ eine offene Nullumgebung ist, muss ein $\eta > 0$ geben, sodass $U_\eta^Y(0) \subseteq W - W \subseteq \overline{R(U_{2k}^X(0))}$. Nun wenden wir Lemma 4.3.3 mit $T = \frac{2k}{\eta}R$ an und erhalten $U_{\frac{\eta}{2k}}^Y(0) \subseteq R(U_1^X(0))$. Nach Lemma 4.3.2 ist R offen. □

Eine später öfters verwendete Folgerung ist:

4.3.4 Korollar. *Seien X, Y Banachräume und $R : X \rightarrow Y$ eine bijektive lineare Abbildung. Ist R stetig, so ist auch die Inverse R^{-1} stetig.*

Beweis. R besitzt eine Inverse, die klarerweise linear ist. Nach Satz 4.3.1 ist R offen und damit R^{-1} stetig. □

4.3.5 Bemerkung. Seien X, Y normierte Räume und $R : X \rightarrow Y$ linear. Die Tatsache, dass R injektiv ist zusammen mit der Beschränktheit von $R^{-1} : R(X) \rightarrow X$, ist dann äquivalent zur Existenz eines reellen $a > 0$ mit

$$a\|x\| \leq \|Rx\| \quad \text{für alle } x \in X, \quad (4.3.1)$$

wie man leicht mit Hilfe der Substitution $x = R^{-1}y$ erkennt. In diesem Fall ist die Abbildungsnorm von $R^{-1} : R(X) \rightarrow X$ kleiner oder gleich $\frac{1}{a}$. //

4.3.6 Lemma. *Ist $R : X \rightarrow Y$ linear und beschränkt und gilt (4.3.1), so ist $R(X)$ genau dann ein Banachraum, wenn X ein solcher ist. In dem Fall ist $R(X)$ abgeschlossen in Y .*

Beweis. In der Tat folgt aus der Beschränktheit von R zusammen mit (4.3.1), dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X diese in X genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn $(Rx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y ist und dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gegen ein x genau dann konvergiert, wenn $(Rx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $R(X)$ gegen ein y konvergiert.

Da vollständige Teilmengen metrischer Räume immer abgeschlossen sind, erhalten wir auch die letzte Behauptung. □

4.4 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$, dann heißt

$$\text{graph } f := \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

der *Graph* von f . Ganz im Allgemeinen gilt die folgende Feststellung.

4.4.1 Lemma. *Seien X, Y topologische Räume, Y Hausdorff, und sei $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist der Graph von f abgeschlossen in $X \times Y$.*

Beweis. Sei Ω das Komplement des Graphen von f in $X \times Y$. Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$, sodass also $f(x_0) \neq y_0$. Wähle disjunkte Umgebungen V, W in Y von y_0 bzw. $f(x_0)$. Dann existiert eine Umgebung U von x_0 in X , sodass $f(U) \subseteq W$. Also liegt die Umgebung $U \times V$ von (x_0, y_0) ganz in Ω . □

Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig. Man kann dazu leicht Gegenbeispiele konstruieren. Es ist eine interessante Tatsache, dass für lineare Abbildungen zwischen Banachräumen die Umkehrung doch stimmt.

4.4.2 Satz (vom abgeschlossenen Graphen). *Seien X, Y Banachräume und sei $R : X \rightarrow Y$ linear. Ist der Graph von R abgeschlossen in $X \times Y$, so ist R stetig.*

Beweis. Der Graph G von R ist ein abgeschlossener linearer Unterraum des Banachraumes $X \times Y$ mit der Summennorm $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$, also selbst ein Banachraum. Betrachte die Projektion auf die erste Komponente

$$\pi_1 : \begin{cases} X \times Y & \rightarrow X \\ (x, y) & \mapsto x \end{cases}$$

Dann ist π_1 stetig und linear. Also ist auch $\pi_1|_G$ stetig und linear. Nun ist $\pi_1|_G$ injektiv, denn $(x, Rx), (y, Ry) \in G$ und $x = y$ impliziert $Rx = Ry$. Weiters ist $\pi_1|_G$ surjektiv, denn für jedes $x \in X$ ist $(x, Rx) \in G$. Nach Korollar 4.3.4, ist $(\pi_1|_G)^{-1} : X \rightarrow G$ stetig.

Sei $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ die Projektion auf die zweite Komponente. Genauso wie π_1 ist π_2 stetig und linear. Der Operator R lässt sich nun schreiben als

$$R = \pi_2 \circ (\pi_1|_G)^{-1}.$$

□

4.4.3 *Bemerkung.* Seien X, Y metrische Räume, und $F : X \rightarrow Y$. Dann ist graph F genau dann abgeschlossen, wenn gilt:

Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in X$, für die die beiden Limiten $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $y := \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ existieren, gilt $y = F(x)$.

Man beachte den Unterschied zur Folgencharakterisierung der Stetigkeit. Die Abbildung F ist genau dann stetig, wenn gilt:

Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in X$, für die der Limes $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existiert, existiert auch der Limes $y := \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ und es gilt $y = F(x)$. //

Wir geben eine oft nützliche Anwendung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen. Eine Menge M von linearen Funktionalen heißt dabei *punktetrennend*[†], wenn $\bigcap_{f \in M} \ker f = \{0\}$. Man beachte dass, wegen der Linearität der Funktionale aus M , die Menge M genau dann punktettrennend ist, wenn

$$\forall x, y \in X, x \neq y \exists f \in M : f(x) \neq f(y).$$

4.4.4 Korollar. Seien X, Y Banachräume, sei $R : X \rightarrow Y$ linear, und sei $M \subseteq Y'$ eine punktettrennende Menge von stetigen, linearen Funktionalen auf Y . Gilt für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in X$, mit $\|x_n\| \rightarrow 0$, dass $f(Rx_n) \rightarrow 0$ für alle $f \in M$, so ist R stetig.

Beweis. Sei $x_n \rightarrow x$ und $Rx_n \rightarrow y$. Ist $f \in M$, so ist $f(R(x_n - x)) \rightarrow 0$. Also $f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(Rx_n) = f(Rx)$. Da M punktettrennend ist, folgt $y = Rx$. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist R stetig. □

[†]Man verwechsle diesen Begriff nicht mit der Terminologie einer punktettrennenden Algebra wie sie beim Satz von Stone-Weierstraß auftritt

Kapitel 5

Lokalkonvexe Vektorräume

In diesem Kapitel werden wir uns mit topologischen Vektorräumen beschäftigen, die einer zusätzlichen geometrischen Bedingung genügen. Es stellt sich heraus, dass diese für viele „gute“ Eigenschaften verantwortlich zeichnet. Insbesondere sichert sie, dass es hinreichend viele stetige lineare Funktionale gibt, um von Eigenschaften des Dualraumes Rückschlüsse auf Eigenschaften des Ausgangsraumes zu ziehen.

5.0.1 Definition. Ein topologischer Vektorraum (X, \mathcal{T}) heißt *lokalkonvex*, wenn es eine Umgebungsbasis der Null gibt, die aus konvexen Mengen besteht.

5.0.2 Beispiel.

- (i) Alle normierten Räume sind lokalkonvex. In der Tat bilden die ϵ -Kugeln $U_\epsilon(0) = \{x \in X : \|x\| < \epsilon\}$ eine Umgebungsbasis der Null. Zudem sind diese wegen

$$\|tx + (1-t)y\| \leq \|tx\| + \|(1-t)y\| = t \cdot \|x\| + (1-t)\|y\|$$

für alle $t \in [0, 1]$ konvex.

- (ii) Der Raum $C^\infty(\Omega)$ aus Beispiel 2.3.10 ist lokalkonvex. Wie schon einmal festgehalten, wird seine Topologie aber nicht von einer Norm induziert.
- (iii) Sei $0 < p < 1$, dann ist der Raum $L^p(0, 1)$ aus Beispiel 2.3.11 nicht lokalkonvex.

//

5.0.3 Bemerkung.

- (i) In einem lokalkonvexen Vektorraum gibt es gemäß Lemma 2.1.8 sogar eine Umgebungsbasis der Null bestehend aus konvexen, offenen und kreisförmigen Mengen.
- (ii) Sei X ein Vektorraum, (X_i, \mathcal{T}_i) , $i \in I$, eine Familie lokalkonvexer Vektorräume, und seien $R_i : X \rightarrow X_i$, $i \in I$, lineare Abbildungen mit $\bigcap_{i \in I} \ker R_i = \{0\}$ bzw. äquivalent dazu

$$\forall x, y \in X, x \neq y \exists i \in I : R_i(x) \neq R_i(y).$$

Dann ist X mit der initialen Topologie \mathcal{T} bezüglich der Familie von Abbildungen

$$R_i : X \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i), \quad i \in I,$$

ein lokalkonvexer Vektorraum.

Um dies zu sehen, sei zunächst daran erinnert, dass die Mengen der Bauart $R_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \cdots \cap R_{i_m}^{-1}(O_{i_m})$ mit $m \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_m \in I$ und $O_{i_1} \in \mathcal{T}_{i_1}, \dots, O_{i_m} \in \mathcal{T}_{i_m}$ eine Basis der Topologie \mathcal{T} abgeben.

Daraus erkennt man leicht, dass für Nullumgebungsbasen $\mathfrak{V}_i(0)$ von (X_i, \mathcal{T}_i) die Menge der Mengen der Bauart

$$\bigcap_{l=1}^n R_{i_l}^{-1}(V_{i_l}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad i_l \in I, \quad V_{i_l} \in \mathfrak{V}_{i_l}(0),$$

eine Nullumgebungsbasis von (X, \mathcal{T}) ist. Sind nun alle Mengen aus allen $\mathfrak{V}_i(0)$ konvex, so folgt aus der Linearität der R_i unmittelbar, dass diese Nullumgebungsbasis von (X, \mathcal{T}) auch aus konvexen Mengen besteht.

Wir erhalten insbesondere, dass Unterräume und direkte Produkte lokalkonvexer Vektorräume wieder lokalkonvex sind.

(iii) Sei M ein abgeschlossener linearer Unterraum eines lokalkonvexen Vektorraumes X , und betrachte X/M versehen mit der finalen Topologie bezüglich der kanonischen Projektion $\pi : X \rightarrow X/M$, vgl. Proposition 2.4.6. Dann ist X/M ein lokalkonvexer Vektorraum.

Um dies zu sehen, sei U eine Nullumgebung in X/M . Dann ist $\pi^{-1}(U)$ eine Nullumgebung in X . Wähle eine konvexe Nullumgebung V in X mit $V \subseteq \pi^{-1}(U)$. Dann ist $\pi(V)$ konvex, eine Nullumgebung in X/M , und enthalten in U .

//

5.1 Seminormen, Minkowski–Funktionale

Wir werden zeigen, dass die Topologie eines lokalkonvexen Raumes, obwohl sie nicht notwendigerweise von einer Norm kommen muß, doch in recht ähnlicher Weise erzeugt werden kann.

5.1.1 Definition. Sei X ein Vektorraum, $p : X \rightarrow [0, \infty)$. Dann heißt p eine *Seminorm*, wenn gilt:

- (i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $x, y \in X$.
- (ii) $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$, $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Klarerweise ist jede Norm auf X auch eine Seminorm. Umgekehrt ist eine Seminorm $p : X \rightarrow [0, \infty)$ eine Norm genau dann, wenn $p(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$ gilt.

5.1.2 Lemma. Sei p eine Seminorm auf X und $N(p) := \{x \in X : p(x) = 0\}$. Dann gilt:

- (i) $p(0) = 0$.

(ii) Dreiecksungleichung nach unten: $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.

(iii) $N(p)$ ist ein linearer Unterraum von X .

(iv) Mit $X_p := X/N(p)$ ist die Funktion $\|\cdot\|_p : X_p \rightarrow [0, \infty)$, die der Restklasse $x + N(p)$ die Zahl $p(x)$ zuweist, wohldefiniert und eine Norm.

Beweis.

ad(i): Es gilt $0 = 0 \cdot x$, also folgt $p(0) = p(0 \cdot x) = |0|p(x) = 0$.

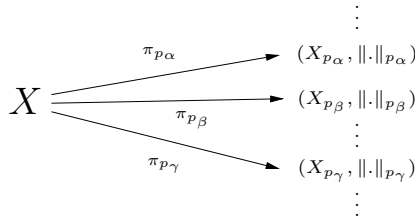
ad(ii): Es ist $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$, also $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$. Genauso erhält man $p(y) - p(x) \leq p(y - x)$. Nun gilt $p(x - y) = p[(-1)(y - x)] = p(y - x)$, also folgt (ii).

ad(iii): Seien $x, y \in X$ mit $p(x) = p(y) = 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann folgt $0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|p(x) + |\beta|p(y) = 0$.

ad(iv): Wegen (ii) ist $\|x + N(p)\|_p$ wohldefiniert. Die Eigenschaft Seminorm zu sein überträgt sich unmittelbar von p auf $\|\cdot\|_p$. Außerdem ist $\|x + N(p)\|_p = p(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in N(p)$ bzw. $x + N(p) = 0 + N(p)$. \square

5.1.3 Definition. Sei X ein Vektorraum und M eine Familie von Seminormen auf X . Dann heißt M *separierend*, wenn $\bigcap_{p \in M} N(p) = \{0\}$.

5.1.4 Satz. Sei X ein Vektorraum und sei M eine separierende Familie von Seminormen auf X . Für $p \in M$ seien $N(p)$ und $\|\cdot\|_p : X_p \rightarrow [0, \infty)$ definiert wie in Lemma 5.1.2, sodass also $(X_p, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Raum ist. Weiters bezeichne mit $\pi_p : X \rightarrow X_p$ die kanonische Projektion, und mit \mathcal{T}_M die initiale Topologie auf X bezüglich der Abbildungen $\pi_p, p \in M$, wobei die X_p mit der von $\|\cdot\|_p$ erzeugten Topologie versehen sind.



Dann ist (X, \mathcal{T}_M) ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Eine Nullumgebungsbasis von (X, \mathcal{T}_M) bestehend aus konvexen Mengen ist gegeben durch

$$\mathfrak{B}(0) := \left\{ \bigcap_{i=1}^m V(p_i, \epsilon_i) : m \in \mathbb{N}, p_i \in M, \epsilon_i > 0 \right\}, \quad (5.1.1)$$

wobei $V(p, \epsilon) := \{x \in X : p(x) < \epsilon\}$. Schließlich konvergiert ein Netz $(x_j)_{j \in J}$ in X bzgl. \mathcal{T}_M gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn $p(x_j - x) \xrightarrow{j \in J} 0$ für alle $p \in M$.

Beweis. Die Abbildungen π_p sind linear, und $\bigcap_{p \in M} \ker \pi_p = \bigcap_{p \in M} N(p) = \{0\}$. Nach Proposition 2.4.1 ist (X, \mathcal{T}_M) ein topologischer Vektorraum, welcher gemäß Bemerkung 5.0.3, (ii) lokalkonvex ist.

Eine Umgebungsbasis der Null im normierten Raum $(X_p, \|\cdot\|_p)$ ist gegeben durch die Kugeln $U_\epsilon^{X_p}(0) := \{x \in X_p : \|x\|_p < \epsilon\}$, $\epsilon > 0$. Daher ist

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^m \pi_{p_i}^{-1}(U_{\epsilon_i}^{X_{p_i}}(0)) : m \in \mathbb{N}, p_i \in M, \epsilon_i > 0 \right\}$$

eine Nullumgebungsbasis in (X, \mathcal{T}_M) , vgl. Bemerkung 5.0.3, (ii). Wegen $\pi_p^{-1}(U_\epsilon^{X_p}(0)) = V(p, \epsilon)$ ist das gerade das im Satz angegebene System $\mathfrak{V}(0)$ von Teilmengen von X .

Da \mathcal{T}_M die initiale Topologie bzgl. der Abbildungen π_p ist, konvergiert ein Netz $(x_j)_{j \in J}$ gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn $\pi_p(x_j) \rightarrow \pi_p(x)$, $j \in J$ für alle $p \in M$. Da X_p ein normierter Raum ist, wobei $\|x + N(p)\|_p = p(x)$, ist letzteres zu $p(x_j - x) \xrightarrow{j \in J} 0$ für alle $p \in M$ äquivalent. □

5.1.5 Beispiel. Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist die Familie $\{\|\cdot\|\}$ eine separierende Familie von Seminormen. Die im Sinne von Satz 5.1.4 induzierte Topologie ist die Normtopologie. //

5.1.6 Bemerkung. Hat man eine Familie M von Seminormen auf X gegeben, so zeigt man unschwer, dass alle Seminormen aus M bzgl. \mathcal{T}_M stetig sind. Man könnte nun auch die initiale Topologie bezüglich der Familie M als Abbildungen von X nach \mathbb{R} betrachten. Diese Topologie ist gröber als \mathcal{T}_M , macht X im Allgemeinen aber nicht zu einem topologischen Vektorraum, vgl. Bemerkung 2.4.3. //

Es ist eine nichttriviale Tatsache, dass jeder lokalkonvexe Vektorraum durch die in Satz 5.1.4 angegebene Konstruktion entsteht. Um diese Aussage zu formulieren, benötigen wir den Begriff des Minkowski-Funktional. Man beachte im Folgenden, dass nichtleere, absorbierende Teilmengen immer 0 enthalten.

5.1.7 Definition. Sei A eine nichtleere, absorbierende Teilmenge eines Vektorraumes X . Wir definieren eine Abbildung $\mu_A : X \rightarrow [0, \infty)$ als

$$\mu_A(x) := \inf \left\{ t > 0 : \frac{1}{t}x \in A \right\}.$$

Die Abbildung μ_A heißt das *Minkowski-Funktional* von A .

5.1.8 Lemma. Sei A eine nichtleere, absorbierende Teilmenge eines Vektorraumes X .

(i) Es gilt $A \subseteq \{x \in X : \mu_A(x) \leq 1\}$.

(ii) Es gilt $\mu_A(0) = 0$ sowie

$$\mu_{\frac{1}{r}A}(x) = \mu_A(rx) = r\mu_A(x) \quad \text{für alle } x \in X, r > 0.$$

(iii) Ist A zusätzlich konvex, so gilt

$$\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

(iv) Ist A kreisförmig, dann gilt

$$\mu_A(\lambda x) = |\lambda| \mu_A(x) \quad \text{für alle } x \in X, \lambda \in \mathbb{C}.$$

(v) Für konvexes A gilt $\{x \in X : \mu_A(x) < 1\} \subseteq A$.

(vi) Ist A konvex und offen bezüglich irgendeiner Topologie auf X , die X zu einem topologischen Vektorraum macht, so gilt sogar

$$\{x \in X : \mu_A(x) < 1\} = A.$$

(vii) Für ein konvexes und kreisförmiges A ist μ_A eine Seminorm.

Beweis.

ad(i): Für $x \in A$ ist $1^{-1}x = x \in A$, also $\mu_A(x) \leq 1$.

ad(ii): $\mu_A(0) = 0$ folgt unmittelbar wegen $0 \in A$. Die behauptete Gleichung folgt aus

$$\begin{aligned} \underbrace{\inf \left\{ t > 0 : \frac{1}{t}x \in \frac{1}{r}A \right\}}_{=\mu_{\frac{1}{r}A}(x)} &= \inf \left\{ t > 0 : \frac{1}{t}(rx) \in A \right\} = \inf \left\{ t > 0 : \frac{r}{t}x \in A \right\} \\ &= \inf \left\{ rs > 0 : \frac{1}{s}x \in A \right\} = \inf r \underbrace{\left\{ s > 0 : \frac{1}{s}x \in A \right\}}_{=r\mu_A(x)}. \end{aligned}$$

ad(iii): Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $t \leq \mu_A(x) + \epsilon$, und $s \leq \mu_A(y) + \epsilon$ mit $t^{-1}x, s^{-1}y \in A$. Damit ist auch

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t} \cdot \frac{x}{t} + \frac{s}{s+t} \cdot \frac{y}{s} \in A,$$

also $\mu_A(x+y) \leq s+t \leq \mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

ad(iv): Die Beziehung $\mu_A(\lambda x) = |\lambda| \mu_A(x)$ ist wegen (ii) äquivalent zu $\mu_A(x) = \mu_A\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}x\right)$. Da A kreisförmig ist, ist $t^{-1} \cdot \frac{\lambda}{|\lambda|}x \in A$ genau dann, wenn $t^{-1}x \in A$.

ad(v): Ist $\mu_A(x) < 1$, so folgt $t^{-1}x \in A$ für ein $t \in (0, 1)$. Da A konvex ist und die Null enthält, folgt $x = t \cdot (t^{-1}x) + (1-t)0 \in A$.

ad(vi): Sei A konvex und offen bezüglich irgendeiner Topologie auf X , die X zu einem topologischen Vektorraum macht. Für $x \in A$ gilt, da A offen und die skalare Multiplikation stetig ist, $(1-\delta, 1+\delta) \cdot x \subseteq A$ für ein gewisses $\delta \in (0, 1)$. Wegen (i) gilt daher

$$(1-\delta, 1+\delta) \cdot \mu_A(x) = \mu_A((1-\delta, 1+\delta) \cdot x) \subseteq [0, 1],$$

womit $\mu_A(x) < 1$ sein muss. Also gilt $A \subseteq \{x \in X : \mu_A(x) < 1\}$. Die umgekehrte Inklusion folgt aus (v).

ad(vii): Dieser Punkt folgt aus (ii), (iii). □

Als Hauptsatz über lokalkonvexe Vektorräume gilt

5.1.9 Satz. Sei (X, \mathcal{T}) ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, und sei \mathfrak{W} eine Umgebungsbasis der Null, die aus konvexen und kreisförmigen Mengen besteht. Dann ist die Familie

$$M := \{\mu_W : W \in \mathfrak{W}\}$$

der Minkowski-Funktionale eine separierende Familie von Seminormen auf X und es gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$.

Beweis. Da \mathcal{T} Hausdorff ist, existiert zu jedem $x \in X \setminus \{0\}$ eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(0)$ mit $x \notin U$. Daher gibt es auch ein $W \in \mathfrak{W}$ mit $x \notin W$. Aus Lemma 5.1.8, (v), folgt $\mu_W(x) \geq 1$. Zusammen mit Lemma 5.1.8, (vii), folgt, dass M eine separierende Familie von Seminormen ist.

Um $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ nachzuweisen, reicht es gemäß Korollar 2.1.12 zu zeigen, dass $\mathfrak{U}^{\mathcal{T}_M}(0) = \mathfrak{U}^{\mathcal{T}}(0)$. Für $W \in \mathfrak{W}$ und $\epsilon > 0$ gilt wegen Lemma 5.1.8, (i) und (ii),

$$\frac{\epsilon}{2}W \subseteq \{x \in X : \frac{2}{\epsilon}\mu_W(x) \leq 1\} \subseteq \{x \in X : \mu_W(x) < \epsilon\} = V(\mu_W, \epsilon).$$

Da wegen (5.1.1) endliche Schnitte von Mengen der Bauart $V(\mu_W, \epsilon)$ eine Umgebungsbasis von $\mathfrak{U}^{\mathcal{T}_M}(0)$ abgeben, folgt $\mathfrak{U}^{\mathcal{T}_M}(0) \subseteq \mathfrak{U}^{\mathcal{T}}(0)$.

Ist umgekehrt $W \in \mathfrak{W}$, so ist nach Lemma 5.1.8, (v), $V(\mu_W, 1) \subseteq W$, also $W \in \mathfrak{U}^{\mathcal{T}_M}(0)$. □

5.1.10 Beispiel. Seien $(X_1, \|\cdot\|_1)$ und $(X_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Ist $x \in X_1$ festgehalten, so ist die Abbildung

$$p_x : \begin{cases} \mathcal{B}(X_1, X_2) & \rightarrow [0, \infty) \\ T & \mapsto \|T(x)\|_2 \end{cases}$$

eine Seminorm auf $\mathcal{B}(X_1, X_2)$. Ist $p_x(T) = 0$ für alle $x \in X_1$, so heißt das gerade $T = 0$, womit die Familie $\{p_x : x \in X_1\}$ separierend ist. Die von $\{p_x : x \in X_1\}$ auf $\mathcal{B}(X_1, X_2)$ erzeugte Topologie \mathcal{T}_s macht also $\mathcal{B}(X_1, X_2)$ zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum. Sie heißt die *starke Operatortopologie*.

Für ein Netz $(T_i)_{i \in I}$ von Operatoren $T_i \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$ gilt

$$T_i \xrightarrow{\mathcal{T}_s} T \iff T_i x \xrightarrow{\|\cdot\|_2} T x \quad \text{für alle } x \in X_1.$$

In diesem Fall schreibt man auch $T_i \xrightarrow{s} T$.

Die Topologie \mathcal{T}_s ist gröber als die von der Operatornorm induzierte Topologie. Tatsächlich bedeutet Konvergenz in der Operatornorm gleichmäßige Konvergenz auf der Einheitskugel von X_1 , wogegen Konvergenz bezüglich \mathcal{T}_s punktweise Konvergenz bedeutet. Genauer gilt

$$T_i \xrightarrow{\|\cdot\|} T \iff \forall \epsilon > 0 \exists i_0 \in I \forall i \geq i_0 \forall x \in U_1^{X_1}(0) : \|T_i(x) - T(x)\|_2 \leq \epsilon$$

$$T_i \xrightarrow{s} T \iff \forall x \in U_1^{X_1}(0) \forall \epsilon > 0 \exists i_0 \in I \forall i \geq i_0 : \|T_i(x) - T(x)\|_2 \leq \epsilon$$

Fasst man $\mathcal{B}(X_1, X_2)$ in geeigneter Weise als Unterraum des Produktes $\prod_{x \in X_1} X_2$ auf, so ist \mathcal{T}_s gerade die Produkttopologie. //

5.2 Die Sätze von Hahn-Banach

Die Sätze von Hahn-Banach beschäftigen sich mit der Existenz stetiger linearer Funktionale, insbesondere mit der Fortsetzbarkeit linearer Funktionale, die zunächst nur auf einem Unterraum gegeben sind. Ist X ein Vektorraum, M ein linearer Unterraum, und ist $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ ein lineares Funktional, so existieren stets lineare Funktionale $F : X \rightarrow \mathbb{C}$, die f fortsetzen, d.h. mit $F|_M = f$. Dazu ergänze man einfach eine Basis von M zu einer von X . Nichttrivial wird die Frage nach der Existenz von Fortsetzungen dann, wenn man zusätzliche Forderungen an f und F stellt wie z.B. Stetigkeit.

Wir arbeiten normalerweise immer über dem Skalkörper \mathbb{C} . Für den Beweis des Satzes von Hahn-Banach ist es praktisch, Vektorräume über \mathbb{C} auch als Vektorräume über \mathbb{R} zu betrachten.

Ist nämlich X ein \mathbb{C} -Vektorraum, so ist trivialerweise X auch ein \mathbb{R} -Vektorraum, nämlich mit den gleichen Operationen, wobei die skalare Multiplikation auf \mathbb{R} eingeschränkt wird. Ein lineares Funktional auf dem \mathbb{C} -Vektorraum X erfüllt (per definitionem) die Relationen

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \text{für alle } x, y \in X, \alpha \in \mathbb{C}. \quad (5.2.1)$$

Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und erfüllt f die Relationen (5.2.1), wobei anstatt „für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ “ nur mehr „für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ “ gefordert wird, so nennt man f ein \mathbb{R} -lineares Funktional auf X .

5.2.1 Lemma. *Für einen \mathbb{C} -Vektorraum X gilt:*

(i) *Ist f ein \mathbb{C} -lineares Funktional auf X , so ist $u(x) := \operatorname{Re} f(x)$ ein \mathbb{R} -lineares Funktional, und es gilt*

$$f(x) = u(x) - iu(ix) \quad \text{für alle } x \in X. \quad (5.2.2)$$

(ii) *Ist u ein \mathbb{R} -lineares Funktional auf X , und definiert man $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Formel (5.2.2), so ist f ein \mathbb{C} -lineares Funktional und es gilt $u = \operatorname{Re} f$.*

(iii) *Ist X normierter Raum und stehen f und u in der Beziehung (5.2.2), so gilt*

$$\|f\| = \|u\| := \sup\{|u(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Beweis.

ad (i): Ist $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt

$$u(x+y) = \operatorname{Re} f(x+y) = \operatorname{Re}(f(x) + f(y)) = \operatorname{Re} f(x) + \operatorname{Re} f(y) = u(x) + u(y),$$

$$u(\alpha x) = \operatorname{Re} f(\alpha x) = \operatorname{Re}(\alpha f(x)) = \alpha \cdot \operatorname{Re} f(x) = \alpha u(x).$$

Für jede komplexe Zahl w gilt $w = \operatorname{Re} w - i \operatorname{Re}(iw)$, also ist

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re}(if(x)) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) = u(x) - iu(ix).$$

ad (ii): Da u \mathbb{R} -linear ist, ist auch die durch (5.2.2) definierte Funktion f \mathbb{R} -linear. Weiters gilt

$$f(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = if(x),$$

woraus $f((\xi + i\eta)x) = (\xi + i\eta)f(x)$ für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ folgt.

ad(iii): Für jede komplexe Zahl gilt $|\operatorname{Re} w| \leq |w|$, womit stets $|u(x)| \leq |f(x)|$ und infolge $\|u\| \leq \|f\|$. Umgekehrt, sei $x \in X$ und wähle $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, sodass $\alpha f(x) = |f(x)|$. Aus

$$|f(x)| = f(\alpha x) = \operatorname{Re} f(\alpha x) = u(\alpha x) \leq \|u\| \cdot \|\alpha x\| = \|u\| \cdot \|x\|,$$

folgt schließlich $\|f\| \leq \|u\|$. □

Der erste Satz vom Hahn-Banach-Typ ist eine Aussage über die beschränkte Fortsetzbarkeit von linearen Funktionalen in Vektorräumen über dem Skalkörper \mathbb{R} . Er ist rein algebraisch und bildet die Grundlage der folgenden Sätze.

5.2.2 Satz (Hahn-Banach, reell). *Sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum, M ein linearer Unterraum von X , und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ linear. Weiters sei $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{für alle } x, y \in X, \lambda \geq 0, \quad (5.2.3)$$

und gelte $f(x) \leq p(x)$, $x \in M$. Dann existiert ein lineares $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F|_M = f$ und

$$-p(-x) \leq F(x) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in X. \quad (5.2.4)$$

Beweis.

Schritt 1: Betrachte die Menge \mathcal{M} aller linearen Fortsetzungen g von f auf einem linearen Unterraum $M_g \supseteq M$ von X , die $g(x) \leq p(x)$ für alle $x \in M_g$ erfüllen, dh. alle linearen g mit

$$g : M_g \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } X \supseteq M_g \supseteq M, g|_M = f \quad \text{und } g(x) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in M_g.$$

Betrachten wir (den Graph von) g als Relation zwischen X und \mathbb{R} , dh. als Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$, so ist diese Relation sogar ein linearer Unterraum. Zudem ist $\mathcal{M} (\subseteq \mathcal{P}(X \times \mathbb{R}))$ mit der Halbordnung \subseteq versehen.

Offenbar bedeutet $g_1 \subseteq g_2$ nicht anderes als, dass g_2 eine Fortsetzung von g_1 ist. Wir werden das Lemma von Zorn auf \mathcal{M} anwenden. Dazu überprüfen wir die nötigen Voraussetzungen. Zunächst ist die Menge \mathcal{M} nichtleer, denn $f \in \mathcal{M}$. Sei nun \mathcal{N} eine nichtleere total geordnete Teilmenge von \mathcal{M} und setze

$$h := \bigcup_{g \in \mathcal{N}} g (\subseteq X \times \mathbb{R}).$$

Als Vereinigung einer total geordneten Menge von linearen Unterräumen ist auch h ein linearer Unterraum von $X \times \mathbb{R}$.

Nun enthält h kein Paar der Form $(0, \alpha)$ mit $\alpha \neq 0$, da ein solches Paar auch in einem $g \in \mathcal{N}$ enthalten wäre, was aber $g(0) = \alpha$ bedeuten würde. Wegen der Linearität kann es daher nicht sein, dass $(x, \alpha), (x, \beta) \in h$ mit $\alpha \neq \beta$. Das bedeutet, dass h der Graph einer linearen Abbildung

$$h : M_h \rightarrow \mathbb{R}$$

ist. Für $(x, \alpha) \in h$ und ein geeignetes $g \in \mathcal{N}$ mit $(x, \alpha) \in g$ gilt auch $h(x) = \alpha = g(x) \leq p(x)$. Damit liegt h in \mathcal{M} , und h ist offenbar eine obere Schranke von \mathcal{N} .

Schritt 2: Nach dem Lemma von Zorn existieren in \mathcal{M} maximale Elemente. Sei F ein solches. Angenommen es wäre $M_F \neq X$. Dann wähle $x_1 \in X \setminus M_F$ und setze

$$M_1 := \text{span}\{M_F, x_1\} = \{x + \lambda x_1 : x \in M_F, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Wegen

$$F(x) + F(y) = F(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - x_1) + p(y + x_1)$$

erhalten wir

$$F(x) - p(x - x_1) \leq p(y + x_1) - F(y) \quad \text{für alle } x, y \in M_F.$$

Setzt man $\alpha := \sup\{F(x) - p(x - x_1) : x \in M_F\}$, so folgt daraus

$$F(y) + \alpha \leq p(y + x_1) \quad \text{für alle } y \in M_F. \quad (5.2.5)$$

Wegen der Definition von α gilt auch

$$F(x) - \alpha \leq p(x - x_1) \quad \text{für alle } x \in M_F. \quad (5.2.6)$$

Definiere ein lineares Funktional h auf M_1 ($=: M_h$) durch

$$h(x + \lambda x_1) := F(x) + \lambda \alpha \quad \text{für } x \in M_F, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Offenbar ist $h|_{M_F} = F$. Wir zeigen, dass $h(x + \lambda x_1) \leq p(x + \lambda x_1)$, $x \in M_F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Für $\lambda = 0$ ist dies richtig, da $F \leq p$.

Für $\lambda > 0$ ersetzen wir in (5.2.5) y durch $\frac{x}{\lambda}$ und multipliziere mit λ . Es folgt $h(x + \lambda x_1) \leq p(x + \lambda x_1)$.

Für $\lambda < 0$ verwende (5.2.6) anstelle von (5.2.5), ersetze dort x durch $\frac{x}{\lambda}$, und multipliziere mit $-\lambda$, um abermals $h(x + \lambda x_1) \leq p(x + \lambda x_1)$ zu erhalten.

Es folgt im Widerspruch zur Maximalität von F , dass $h \in \mathcal{M}$ mit $F \subsetneq h$. Also muss $M_F = X$ gelten, und wir haben mit F eine Fortsetzung von f auf ganz X gefunden, die der Beziehung $F \leq p$ genügt.

Schritt 3: Es bleibt die linke Ungleichung in (5.2.4) zu zeigen. Diese folgt aber einfach, denn aus $F \leq p$ und der Linearität von F erhält man

$$-p(-x) \leq -F(-x) = F(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

□

Mit Hilfe von Lemma 5.2.1 können wir dieses Ergebnis leicht auf den Fall eines \mathbb{C} -Vektorraumes übertragen.

5.2.3 Satz (Hahn-Banach, komplex). *Sei X ein \mathbb{C} -Vektorraum, M ein linearer Unterraum von X , und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ linear. Weiters sei $p : X \rightarrow [0, \infty)$ eine Seminorm auf X , und gelte $|f(x)| \leq p(x)$, $x \in M$. Dann existiert lineares $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F|_M = f$ und*

$$|F(x)| \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Beweis. Für das \mathbb{R} -lineare Funktional $u(x) := \operatorname{Re} f(x)$, $x \in M$ gilt

$$u(x) \leq |f(x)| \leq p(x).$$

Als Seminorm erfüllt p insbesondere die Voraussetzungen (5.2.3). Nach Satz 5.2.2 hat u eine \mathbb{R} -lineare Fortsetzung $U : X \rightarrow \mathbb{R}$, mit $-p(-x) \leq U(x) \leq p(x)$, $x \in X$. Gemäß Lemma 5.2.1 ist dann $F(x) := U(x) - iU(ix)$ ein \mathbb{C} -lineares Funktional mit $U = \operatorname{Re} F$. Wieder wegen Lemma 5.2.1 haben wir

$$F(x) = U(x) - iU(ix) = u(x) - iu(ix) = f(x) \quad \text{für alle } x \in M,$$

d.h. $F|_M = f$. Schließlich sei für $x \in X$ eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, so gewählt, dass $\lambda F(x) = |F(x)|$. Dann folgt

$$|F(x)| = F(\lambda x) = U(\lambda x) \leq p(\lambda x) = p(x).$$

□

In einem normierten Raum lassen sich auch Norm-Eigenschaften mittels stetiger linearer Funktionale ausdrücken.

5.2.4 Korollar. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $X \neq \{0\}$. Dann gilt:*

- (i) *Ist $x_0 \in X$, so existiert $f \in X'$ mit $\|f\| = 1$ und $f(x_0) = \|x_0\|$. Insbesondere gilt*

$$\|x_0\| = \sup \{ |f(x_0)| : f \in X', \|f\| = 1 \}. \quad (5.2.7)$$

In der Tat ist dieses Supremum ein Maximum.

- (ii) *Ist M ein linearer Unterraum von X versehen mit der Norm $\|\cdot\|$, und ist $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ ein bezüglich $\|\cdot\|_M$ stetiges lineares Funktional auf M , so existiert $F \in X'$ mit $F|_M = f$ und $\|F\|_{X'} = \|f\|_{M'}$.*

Beweis.

ad(i): Wegen der Definition der Abbildungsnorm gilt immer \geq in (5.2.7).

Für $x_0 \neq 0$ setze $p(x) := \|x\|$, $M := \operatorname{span}\{x_0\}$, und definiere $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ als $f(\alpha x_0) := \alpha \cdot \|x_0\|$. Nach Satz 5.2.3 existiert $F \in X'$ mit $F|_M = f$ und $|F(x)| \leq \|x\|$, $x \in X$, also $\|F\| \leq 1$. Wegen $F(x_0) = \|x_0\|$ gilt sogar $\|F\| = 1$ und daher Gleichheit in (5.2.7).

Für $x_0 = 0$ folgt aus dem gerade erledigten Fall angewandt auf irgendein Element von $X \neq \{0\}$ ungleich Null die Existenz eines $f \in X'$ mit $\|f\| = 1$, womit beide Seiten von (5.2.7) Null ergeben.

ad(ii): Setze $p(x) := \|f\|_{M'} \cdot \|x\|$ und wende Satz 5.2.3 an. Das erhaltene $F \in X'$ erfüllt $F|_M = f$, und $|F(x)| \leq \|f\|_{M'} \cdot \|x\|$ für alle $x \in X$, womit $\|F\|_{X'} \leq \|f\|_{M'}$. Die umgekehrte Ungleichung $\|F\|_{X'} \geq \|f\|_{M'}$ ist offensichtlich.

□

Von großer Bedeutung ist die folgende geometrische Variante, manchmal auch *Trennungssatz von Hahn-Banach* genannt.

5.2.5 Satz (Hahn-Banach, geometrisch). *Sei X ein topologischer Vektorraum, und seien $A, B \subseteq X$ disjunkt, nichtleer und konvex. Dann gilt:*

- (i) *Ist A offen, so existieren $f \in X'$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\operatorname{Re} f(x) < \gamma \leq \operatorname{Re} f(y) \quad \text{für alle } x \in A, y \in B.$$

(ii) Sei zusätzlich X lokalkonvex. Ist A kompakt und B abgeschlossen, so existieren $f \in X'$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\operatorname{Re} f(x) \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \operatorname{Re} f(y) \quad \text{für alle } x \in A, y \in B.$$

Beweis.

ad(i): Seien $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ festgehalten und setze $x_0 := b_0 - a_0$ sowie

$$C := A - B + x_0 = \{x - y + x_0 : x \in A, y \in B\}.$$

Dann ist C offen und konvex, und $0 \in C$, womit C absorbierend ist. Ist μ_C das Minkowski-Funktional von C , so erfüllt μ_C nach Lemma 5.1.8, (ii) und (iii), die Voraussetzungen (5.2.3). Wegen $A \cap B = \emptyset$ gilt $x_0 \notin C$, und nach Lemma 5.1.8, (v), daher $\mu_C(x_0) \geq 1$.

Sei $M := \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$, und definiere ein \mathbb{R} -lineares Funktional g auf M durch $g(tx_0) := t$, $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$g(tx_0) = t \leq t\mu_C(x_0) = \mu_C(tx_0) \quad \text{für } t \geq 0,$$

$$g(tx_0) = t < 0 \leq \mu_C(tx_0) \quad \text{für } t < 0,$$

womit $g(x) \leq \mu_C(x)$ für alle $x \in M$. Nach Satz 5.2.2 existiert ein \mathbb{R} -lineares Funktional $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u|_M = g$ und $-\mu_C(-x) \leq u(x) \leq \mu_C(x)$, $x \in X$.

Für $a \in A$ und $b \in B$ gilt

$$u(a) - u(b) + 1 = u(a - b + x_0) \leq \mu_C(a - b + x_0) < 1,$$

denn $a - b + x_0 \in C$ und C ist konvex und offen, vgl. Lemma 5.1.8, (vi). Es folgt $u(a) < u(b)$ und damit $\sup u(A) \leq \inf u(B)$. Weil $u(A)$ nach Bemerkung 2.1.15 offen ist, gilt für $\gamma := \sup u(A)$

$$u(a) < \gamma \leq u(b) \quad \text{für alle } a \in A, b \in B.$$

Sei nun f das \mathbb{C} -lineare Funktional $f(x) := u(x) - iu(ix)$. Wie wir gerade gezeigt haben, hat f die gewünschte Trennungseigenschaft. Es bleibt zu zeigen, dass f stetig ist. Dazu betrachten wir die offene Nullumgebung

$$W := C \cap (-C) \cap (iC) \cap (-iC).$$

Für $x \in W$ gilt

$$-1 \leq -\mu_C(-x) \leq u(x) \leq \mu_C(x) \leq 1,$$

$$-1 \leq -\mu_C(-ix) \leq u(ix) \leq \mu_C(ix) \leq 1,$$

und damit $|f(x)| \leq 2$. Nach Proposition 2.1.14 ist f stetig.

ad(ii): Wähle eine offene Nullumgebung V mit der Eigenschaft, dass $(A+V) \cap B = \emptyset$, vgl. Proposition 2.1.9. Da X lokalkonvex ist, können wir V sogar konvex wählen, vgl. Lemma 2.1.8. Damit ist $A+V$ offen und konvex, und wir können die bereits bewiesene Aussage (i) anwenden. Dies gibt uns $f \in X'$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} f(x) < \gamma \leq \operatorname{Re} f(y) \quad \text{für alle } x \in A+V, y \in B.$$

Nun ist $\operatorname{Re} f(A)$ kompakt und daher existiert $x_0 \in A$ sodass $\operatorname{Re} f(x_0) = \max_{x \in A} \operatorname{Re} f(x)$. Es folgt $\max_{x \in A} \operatorname{Re} f(x) < \gamma$, und daher finden wir γ_1, γ_2 wie verlangt.

□

Wendet man Satz 5.2.5, (ii), auf eine einpunktige Menge $A = \{x\}$ und eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge B mit $x \notin B$ an und geht dann von f zu $-f$ über, so erkennt man, dass ein Punkt x genau dann NICHT in B liegt, wenn $\operatorname{Re} f(B) \leq \gamma < \operatorname{Re} f(x)$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und ein $f \in X'$. Indem wir bei dieser Äquivalenz zu den negierten Aussagen übergehen, erkennt man

$$B = \bigcap_{\substack{f \in X', \gamma \in \mathbb{R} \\ B \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]}} (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma],$$

wobei $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$ kurz für den reellen Halbraum $\{y \in X : \operatorname{Re} f(y) \leq \gamma\}$ steht.

Ist nun $C \subseteq X$ nur konvex, so gilt für $B := \overline{C}$ wegen der Abgeschlossenheit von $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$ sicher $B \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma] \Leftrightarrow C \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$. Somit haben wir den ersten Teil des folgenden Resultates gezeigt.

5.2.6 Korollar. *In einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum (X, \mathcal{T}) stimmt der Abschluss einer konvexen Teilmenge $C \subseteq X$ mit dem Schnitt aller C enthaltenden reellen Halbräume $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma] = \{y \in X : \operatorname{Re} f(y) \leq \gamma\}$, wobei $f \in X', \gamma \in \mathbb{R}$ laufen, überein, also*

$$\overline{C} = \bigcap_{\substack{f \in X', \gamma \in \mathbb{R}, \\ C \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]}} (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]. \quad (5.2.8)$$

Ist C konvexe Teilmenge mit $0 \in C$, so gilt

$$\overline{C} = \bigcap_{\substack{f \in X' \\ C \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, 1]}} (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, 1]. \quad (5.2.9)$$

Ist M ein linearer Unterraum, so ist der Abschluss von M der Schnitt aller C enthaltenden Hyperebenen $f^{-1}\{0\}$, wobei $f \in X'$ läuft, also

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{f \in X', \\ M \subseteq \ker f}} \ker f. \quad (5.2.10)$$

Beweis. Ist C konvex mit $0 \in C$, so kann $C \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$ nur gelten, wenn $\gamma \geq 0$. Also kann man sich in (5.2.8) auf $\gamma \in [0, +\infty)$ beschränken. Wegen $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, 0] = \bigcap_{\gamma > 0} (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$, stimmt \overline{C} sogar mit dem Schnitt über alle $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$ mit $f \in X', \gamma > 0$, sodass $C \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$, überein. Weil für $\gamma > 0$ schließlich $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma] = (\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} f)^{-1}(-\infty, 1]$ gilt, folgt (5.2.9).

Ist $M \subseteq X$ ein Unterraum, so gilt sicher (5.2.8) für $M = C$, wobei $M \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$, dh. $f(M) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \gamma\}$, zu $\gamma \geq 0$ und $f(M) = \{0\}$ äquivalent ist, da \mathbb{C} nur \mathbb{C} als nicht verschwindenden linearen Unterraum hat. □

Als Folge von Satz 5.2.5 bzw. Korollar 5.2.6 gibt es in lokalkonvexen topologischen Vektorräumen stets genügend viele stetige Funktionale, um mengentheoretische und auch topologische Eigenschaften zu beschreiben.

5.2.7 Korollar. Für einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum (X, \mathcal{T}) gilt:

- (i) X' operiert punktstetig auf X , d.h. zu verschiedenen $x_1, x_2 \in X$ gibt es ein $f \in X'$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- (ii) Es ist $\dim X < \infty$ genau dann, wenn $\dim X' < \infty$. In diesem Fall stimmen die Dimensionen von X und X' überein.
- (iii) Sei $M \subseteq X$ ein linearer, nicht notwendigerweise abgeschlossener, Unterraum von X und f ein bezüglich der Spurtopologie $\mathcal{T}|_M$ stetiges lineares Funktional auf M . Dann existiert $F \in X'$ mit $F|_M = f$.

Beweis.

ad(i): Setzt man in Satz 5.2.5, (ii), $A = \{x_1\}$ und $B = \{x_2\}$, so erfüllt das erhaltene f sicher $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ad(ii): Sei X unendlichdimensional und wähle eine aufsteigende Folge von Unterräumen Y_n von X mit $\dim Y_n = n$ und Vektoren $y_n \in Y_n \setminus Y_{n-1}$. Nach Satz 2.2.1 ist Y_n abgeschlossen, und daher gibt es gemäß (5.2.10) $f_n \in X'$, sodass $f_n(Y_{n-1}) = \{0\}$, $f_n(y_n) \neq 0$. Die f_n können nicht linear abhängig sein. Also ist $\dim X' = \infty$. Die Umkehrung folgt aus Korollar 2.2.3.

ad(iii): Ist $f = 0$, so wähle $F = 0$. Für $f \neq 0$ sei $x_0 \in M$ mit $f(x_0) = 1$. Wegen der Stetigkeit von f ist $\ker f = \overline{\ker f}^{\mathcal{T}|_M} = \overline{\ker f} \cap M$, also $x_0 \notin \overline{\ker f}$.

Wegen (5.2.10) existiert $F \in X'$ mit $F(x_0) \neq 0$, $F(\ker f) = \{0\}$. Indem wir durch $F(x_0)$ dividieren, können wir sogar $F(x_0) = 1$ annehmen. Für $x \in M$ gilt wegen $f(x_0) = 1$ stets $x - f(x)x_0 \in \ker f$, womit wegen $F(x_0) = 1$

$$F(x) - f(x) = F(x) - f(x)F(x_0) = F(x - f(x)x_0) = 0,$$

also $F|_M = f$. □

Die folgende Anwendung des Satzes von Hahn-Banach ist oft nützlich.

5.2.8 Proposition. Sei (X, \mathcal{T}) ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und M ein endlichdimensionaler Unterraum von X . Dann existiert ein abgeschlossener Unterraum N von X mit $X = M \dot{+} N$. Die zu dieser Zerlegung gehörige Projektion $P : X \rightarrow X$ mit $\text{ran } P = M$ und $\ker P = N$ ist stetig.

Beweis. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von M . Jedes $x \in M$ schreibt sich in eindeutiger Weise als

$$x = \alpha_1(x)e_1 + \dots + \alpha_n(x)e_n.$$

Die Funktionen $\alpha_i : M \rightarrow \mathbb{C}$ sind stetige lineare Funktionale auf M , denn $(M, \mathcal{T}|_M)$ ist nach Satz 2.2.1 isomorph zu \mathbb{C}^n versehen mit der euklidischen Topologie. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es $\beta_i \in X'$ mit $\beta_i|_M = \alpha_i$. Setzen wir für $x \in X$

$$Px := \beta_1(x)e_1 + \dots + \beta_n(x)e_n,$$

so ist $P : X \rightarrow X$ eine stetige, lineare Abbildung mit $\text{ran } P = M$ und $P^2 = P$. Insbesondere ist P eine Projektion, womit

$$X = \underbrace{\text{ran } P}_{=: M} \dot{+} \underbrace{\ker P}_{=: N}.$$

Wegen der Stetigkeit von P ist $N = \ker P = \bigcap_{i=1}^n \ker \beta_i$ abgeschlossen. \square

5.3 Die schwache Topologie $\sigma(X, Y)$

Sei X ein Vektorraum. Ist \mathcal{T} eine Topologie auf X , sodass (X, \mathcal{T}) ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum ist, so ist $(X, \mathcal{T})'$ ein punkt-trennender linearer Unterraum des algebraischen Dualraumes X^* . Umgekehrt kann man sich fragen, ob es zu einem punkt-trennenden linearen Unterraum $Y \subseteq X^*$ eine Topologie \mathcal{T} auf X gibt, sodass (X, \mathcal{T}) ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum mit $(X, \mathcal{T})' = Y$ ist?

5.3.1 Definition. Sei X ein Vektorraum und sei Y ein punkt-trennender linearer Unterraum des algebraischen Dualraumes X^* . Die initiale Topologie bezüglich der Familie von Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in Y$, heißt die von Y auf X erzeugte *schwache Topologie* und wird mit $\sigma(X, Y)$ bezeichnet.

Da $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ein normierter Raum ist, folgt unmittelbar aus Bemerkung 5.0.3, (ii), und Beispiel 5.0.2, dass $(X, \sigma(X, Y))$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum ist. Weil $\{U_\epsilon^{\mathbb{C}}(0) : \epsilon > 0\}$ eine Nullumgebungsbasis von $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist, folgt aus Bemerkung 5.0.3, (ii), auch, dass alle Mengen der Bauart

$$\{x \in X : |f_j(x)| < \epsilon_j, j = 1, \dots, m\} \quad (5.3.1)$$

für $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_m \in Y$ und $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m > 0$ eine Nullumgebungsbasis von $(X, \sigma(X, Y))$ abgeben.

5.3.2 Bemerkung. Für $Y \subseteq X^*$ besteht die Familie $M := \{p_f : f \in Y\}$ offenbar aus Seminormen, wenn wir $p_f(x) = |f(x)|$ setzen. Wegen $\bigcap_{f \in Y} N(p_f) = \bigcap_{f \in Y} \ker f = \{0\}$ ist diese Familie separierend, falls Y punkt-trennender Unterraum ist. Nun stimmt die Topologie \mathcal{T}_M , konstruiert gemäß Satz 5.1.4, mit $(X, \sigma(X, Y))$ überein.

Um das einzusehen, bezeichne mit $\pi_{p_f} : X \rightarrow X/N(p_f) =: X_{p_f}$ die kanonische Projektion sowie mit $\|\cdot\|_{p_f}$ die Norm auf X_{p_f} mit $\|\cdot\|_{p_f} \circ \pi_{p_f} = p_f$, vgl. Lemma 5.1.2.

Wegen $N(p_f) = \ker f$ existiert eine lineare Abbildung $\omega_f : X_{p_f} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\omega_f \circ \pi_{p_f} = f$. Wir sind also in der Situation

$$\begin{array}{ccc} & & f \\ & \dashrightarrow & \\ X & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_{p_f}} \\ \xrightarrow{\pi_{p_g}} \end{array} & \begin{array}{c} (X/N(p_f), \|\cdot\|_{p_f}) \\ \vdots \\ (X/N(p_g), \|\cdot\|_{p_g}) \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{c} \omega_f \\ \omega_g \end{array}} (\mathbb{C}, |\cdot|) \\ & \dashrightarrow & g \end{array}$$

Die Topologie \mathcal{T}_M ist die initiale Topologie bezüglich der Familie

$$\pi_{p_f} : X \rightarrow (X_{p_f}, \|\cdot\|_{p_f}), \quad f \in Y \setminus \{0\}.$$

Beachte hier, dass für $f = 0$ auch $p_f = 0$ ist, und man wegen $X_{p_0} = \{0\}$ die Seminorm p_0 bei der Bildung der initialen Topologie weglassen kann. Aus dem gleichen Grund ist $\sigma(X, Y)$ die initiale Topologie bezüglich der Familie

$$f : X \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|), \quad f \in Y \setminus \{0\}.$$

Für $f \neq 0$ ist ω_f bijektiv, und daher ein linearer Homöomorphismus zwischen den topologischen Vektorräumen $(X_{p_f}, \|\cdot\|_{p_f})$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Somit stimmt die grösste Topologie auf X , sodass alle $f \in Y \setminus \{0\}$ stetig sind, überein mit der grössten Topologie auf X , sodass alle π_{p_f} stetig sind; also $\mathcal{T}_M = \sigma(X, Y)$. //

5.3.3 Satz. Sei X ein Vektorraum und sei Y ein punktetrennender linearer Unterraum des algebraischen Dualraumes X^* . Dann gilt $(X, \sigma(X, Y))' = Y$.

Im Beweis dieses Satzes verwenden wir die folgende Aussage.

5.3.4 Lemma. Sei X ein Vektorraum, und seien $f, f_1, \dots, f_n \in X^*$. Dann sind äquivalent:

(i) $f \in \text{span}\{f_1, \dots, f_n\}$.

(ii) Es existiert $\gamma < \infty$, sodass $|f(x)| \leq \gamma \max_{i=1, \dots, n} |f_i(x)|, x \in X$.

(iii) $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker f$.

Beweis. Offenbar gilt (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii). Sei vorausgesetzt, dass $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker f$. Betrachte die Abbildung

$$\phi : \begin{cases} X & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ x & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x))^T \end{cases},$$

für die offenbar $\ker \phi = \bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker f$ gilt. Auf dem Unterraum $\phi(X)$ von \mathbb{C}^n ist durch $G(\phi(x)) = f(x)$ eine lineare Abbildung G wohldefiniert, da für $\phi(y) = \phi(x)$ wegen $x - y \in \ker \phi \subseteq \ker f$ auch $f(x) - f(y) = f(x - y) = 0$. Setzen wir G auf \mathbb{C}^n linear fort, so erhalten wir eine lineare Abbildung $G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit $G \circ \phi = f$, d.h.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \phi \downarrow & \nearrow G & \\ \mathbb{C}^n & & \end{array}$$

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$G \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i.$$

Dann gilt für jedes $x \in X$

$$f(x) = G(\phi(x)) = G(f_1(x), \dots, f_n(x)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x),$$

d.h. $f \in \text{span}\{f_1, \dots, f_n\}$. □

Beweis (von Satz 5.3.3). Aus der Definition von $\sigma(X, Y)$ ist klar, dass jedes $f \in Y$ stetig bezüglich $\sigma(X, Y)$ ist. Umgekehrt, sei $f \in (X, \sigma(X, Y))'$ gegeben. Gemäß Proposition 2.1.14 existiert eine Nullumgebung W von $(X, \sigma(X, Y))$, sodass $|f(x)| \leq c$, $x \in W$ für ein $c > 0$. Um $f \in Y$ zu zeigen, können wir f durch $\frac{1}{c}f$ ersetzen, und damit $c = 1$ annehmen. Da die Mengen der Bauart (5.3.1) eine Nullumgebungsbasis abgeben, existieren $f_1, \dots, f_n \in Y$ und $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0$, sodass f auf der Menge

$$U := \{x \in X : |f_j(x)| < \epsilon_j, j = 1, \dots, n\}$$

durch 1 beschränkt ist. Für jedes $\delta > \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_n(x)|\}$ liegt der Vektor $\frac{\min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}}{\delta} \cdot x$ in U und daher

$$\left| f\left(\frac{\min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}}{\delta} \cdot x\right) \right| \leq 1 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Da $\delta > \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_n(x)|\}$ beliebig war, folgt

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}} \cdot \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_n(x)|\} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Nach Lemma 5.3.4 ist $f \in \text{span}\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq Y$. □

5.3.5 Korollar. Sei X ein Vektorraum und Y_1, Y_2 punkttrennende lineare Unterräume des algebraischen Dualraumes X^* . Dann gilt $\sigma(X, Y_1) \subseteq \sigma(X, Y_2)$ genau dann, wenn $Y_1 \subseteq Y_2$. Insbesondere gilt $\sigma(X, Y_1) = \sigma(X, Y_2)$ genau dann, wenn $Y_1 = Y_2$. □

5.3.6 Bemerkung. Offenbar ist $\sigma(X, Y)$ die grösste Topologie auf X , sodass X zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum wird, dessen Dualraum gleich Y ist. Außer im Fall $\dim X < \infty$ (vgl. Korollar 2.2.2) wird sie im Allgemeinen aber nicht die einzige solche sein, vgl. Bemerkung 5.5.1. //

5.3.7 Beispiel. Sei (X, \mathcal{T}) ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Dann ist $X' := (X, \mathcal{T})'$ wegen Korollar 5.2.7, (i), ein punkttrennender Unterraum von X^* . Wir können also die schwache Topologie $\sigma(X, X')$, für die wegen Satz 5.3.3 die Beziehung $(X, \sigma(X, X'))' = X'$ gilt, betrachten. Gemäß Bemerkung 5.3.6 gilt $\sigma(X, X') \subseteq \mathcal{T}$, wobei außer im Fall $\dim X < \infty$ im Allgemeinen keine Gleichheit vorherrscht, vgl. Bemerkung 5.5.1.

Man bezeichnet die Topologie $\sigma(X, X')$ auch als *die schwache Topologie* oder (*w-Topologie*) von (X, \mathcal{T}) . //

Sei (X, \mathcal{T}) ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Ist die schwache Topologie $\sigma(X, X')$ echt gröber als \mathcal{T} , so heißt das, dass es Mengen $A \subseteq X$ gibt mit $\overline{A}^{\mathcal{T}} \subsetneq \overline{A}^{\sigma(X, X')}$. Es ist eine wichtige Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach, dass dies bei konvexen Mengen niemals passieren kann.

5.3.8 Satz. Sei (X, \mathcal{T}) ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Ist $A \subseteq X$ konvex, so gilt $\overline{A}^{\mathcal{T}} = \overline{A}^{\sigma(X, X')}$.

Beweis. Nach Korollar 5.2.6 ist $\overline{A}^{\mathcal{T}}$ der Durchschnitt aller A enthaltenden Halbräume $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$ mit $f \in X'$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Wegen $f \in (X, \mathcal{T})' = (X, \sigma(X, X'))'$ ist auch $x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ stetig bzgl. $\sigma(X, X')$. Also ist $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$ eine bzgl. $\sigma(X, X')$ abgeschlossene Obermenge von A , womit der Schnitt $\overline{A}^{\mathcal{T}}$ aller solchen Halbräume die Menge $\overline{A}^{\sigma(X, X')}$ umfasst. Die umgekehrte Inklusion $\overline{A}^{\mathcal{T}} \subseteq \overline{A}^{\sigma(X, X')}$ gilt wegen $\sigma(X, X') \subseteq \mathcal{T}$. \square

Wir wollen noch ein Beispiel von schwachen Topologien angeben.

5.3.9 Beispiel. Seien $(X_1, \|\cdot\|_1)$ und $(X_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume, und betrachte den linearen Raum $X := \mathcal{B}(X_1, X_2)$. Dann ist die lineare Hülle von

$$\{T \mapsto \varphi(T(x)) : x \in X_1, \varphi \in X_2'\}$$

ein punktetrennender linearer Unterraum des algebraischen Dualraumes von X . Die so erhaltene schwache Topologie auf $\mathcal{B}(X_1, X_2)$ heißt die *schwache Operator-topologie* und wird auch mit \mathcal{T}_w bezeichnet. Für ein Netz $(T_i)_{i \in I}$ von Operatoren $T_i \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$ gilt

$$T_i \xrightarrow{\mathcal{T}_w} T \iff \forall x \in X_1, \varphi \in X_2' \Rightarrow \varphi(T_i x) \xrightarrow{\mathbb{C}} \varphi(Tx)$$

In diesem Fall schreibt man auch $T_i \xrightarrow{w} T$. Offenbar ist \mathcal{T}_w gröber als die starke Operatortopologie \mathcal{T}_s , vgl. Beispiel 5.1.10. Bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ die von der Operatornorm induzierte Topologie, so haben wir also

$$\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_s \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}.$$

Außer für $\dim X < \infty - \dim X < \infty$ gilt genau dann, wenn $\dim X_1 < \infty$ und $\dim X_2 < \infty$ – gilt im Allgemeinen in keiner dieser Inklusionen das Gleichheitszeichen. //

5.4 Duale Paare, Annihilatoren, Bipolarsatz

Wir haben bei der Diskussion von Hilberträumen gesehen, dass die Orthogonalität eine wichtige Begriffsbildung ist. Wir wollen nun darangehen, soviel wie möglich davon in einem allgemeineren Kontext zu entwickeln.

5.4.1 Bemerkung. Zunächst sei X ein Vektorraum und Y ein punktetrennender linearer Unterraum von X^* , und betrachte die lineare Abbildung $\iota : X \rightarrow Y^*$ definiert durch $\iota(x)(y) = y(x)$. Weil $\iota(x) = 0$ zu $y(x) = 0$ für alle $y \in Y$ äquivalent ist, und weil Y punktetrennend ist, erkennen wir, dass ι injektiv ist. Der Unterraum $\iota(X)$ von Y^* ist ebenfalls punktetrennend, da aus $\iota(x)(y) = y(x) = 0$ für alle $x \in X$ sicherlich $y = 0$ folgt.

Also können wir auf Y die Topologie $\sigma(Y, \iota(X))$ betrachten, wofür wir auch $\sigma(Y, X)$ schreiben wollen. Somit sind $(X, \sigma(X, Y))$ und $(Y, \sigma(Y, X))$ lokalkonvexe topologische Vektorräume, wobei wegen Satz 5.3.3 $(X, \sigma(X, Y))' = Y$ und $(Y, \sigma(Y, X))' = \iota(X)$. //

Sind X und Y wie in Bemerkung 5.4.1, so wollen wir im Folgenden immer von einem *dualem Paar* (X, Y) sprechen. Da sich X vermöge ι mit dem Raum $\iota(X) \subseteq Y^*$ identifizieren lässt, sind X und Y quasi gleichberechtigt. Das drückt man auch dadurch aus, dass man für $x \in X$ und $y \in Y$

$$\langle x, y \rangle := y(x)$$

setzt. Offenbar ist die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ bilinear. Da Y punkt-trennend ist, gilt für ein $x \in X$, dass

$$(\forall y \in Y, \langle x, y \rangle = 0) \Rightarrow x = 0.$$

Da $\iota(X)$ ein punkt-trennender linearer Unterraum von Y^* , gilt für ein $y \in Y$, dass

$$(\forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0) \Rightarrow y = 0.$$

Insbesondere ist die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht-ausgeartet.

5.4.2 Bemerkung. Man kann auch mit zwei Vektorräumen X und Y sowie einer bilinearen $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ Abbildung starten, die nicht-ausgeartet ist, dh. aus $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $x \in X$ folgt $y = 0$ und aus $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in Y$ folgt $x = 0$. Hier setzen wir zunächst nicht voraus, dass Y ein punkt-trennender linearer Unterraum von X^* ist.

Betrachten wir nun für ein $y \in Y$ das lineare Funktional $x \mapsto \langle x, y \rangle$ auf X , so wird dieses Funktional wegen der nicht Ausgeartetheit eindeutig durch y bestimmt. Also ist die Abbildung $y \mapsto (x \mapsto \langle x, y \rangle)$ eine injektive und offenbar lineare Abbildung von Y nach X^* . Somit können wir nun doch wieder Y als linearen Unterraum von X^* betrachten, der wegen der nicht Ausgeartetheit auch wieder punkt-trennend ist. Genauso können wir X als punkt-trennenden linearen Unterraum von Y^* ansehen.

Die schwachen Topologien $\sigma(X, Y)$ auf X bzw. $\sigma(Y, X)$ auf Y sind dann die größten Topologien auf X bzw. Y , sodass alle Abbildungen $x \mapsto \langle x, y \rangle$ bzw. $y \mapsto \langle x, y \rangle$ stetig sind.

Zusammenfassend ist es nur eine Geschmackssache, ob man einen Vektorraum X und einen punkt-trennenden linearen Unterraum Y von X^* oder das Paar (X, Y) , versehen mit einer bilinearen, nicht-ausgearteten Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ betrachtet. //

5.4.3 Definition. Sei (X, Y) ein duales Paar. Für $M \subseteq X$ bzw. $N \subseteq Y$ bezeichne

$$M^\circ := \{y \in Y : \operatorname{Re}\langle x, y \rangle \leq 1, x \in M\}, \quad {}^\circ N := \{x \in X : \operatorname{Re}\langle x, y \rangle \leq 1, y \in N\},$$

$$M^\perp := \{y \in Y : \langle x, y \rangle = 0, x \in M\}, \quad {}^\perp N := \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0, y \in N\}.$$

Dann heißt M° bzw. ${}^\circ N$ die zu M bzw. N *polare Menge*, und M^\perp bzw. ${}^\perp N$ der *Annihilator* von M bzw. N bezüglich dem Paar (X, Y) .

Man überzeugt sich leicht, dass man obige Mengen auch folgendermaßen schreiben kann.

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} \ker \iota(x), \quad {}^\perp N = \bigcap_{y \in N} \ker y, \quad (5.4.1)$$

$$M^\circ = \bigcap_{x \in M} (\operatorname{Re} \iota(x))^{-1}(-\infty, 1], \quad {}^\circ N = \bigcap_{y \in N} (\operatorname{Re} y)^{-1}(-\infty, 1]. \quad (5.4.2)$$

5.4.4 Lemma. Für $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$ gilt:

- (i) M^\perp ein $\sigma(Y, X)$ -abgeschlossener Unterraum von Y und ${}^\perp N$ ein $\sigma(X, Y)$ -abgeschlossener Unterraum von X .
- (ii) M° ist konvex, enthält die Null und ist $\sigma(Y, X)$ -abgeschlossene Teilmenge von Y ; ${}^\circ N$ ist konvex, enthält die Null und ist $\sigma(X, Y)$ -abgeschlossene Teilmenge von X .
- (iii) Ist M bzw. N kreisförmig, so gilt

$$M^\circ = \{y \in Y : |\langle x, y \rangle| \leq 1, x \in M\},$$

bzw.

$${}^\circ N = \{x \in X : |\langle x, y \rangle| \leq 1, y \in N\}.$$

- (iv) Ist M bzw. N ein linearer Unterraum, so gilt $M^\circ = M^\perp$ bzw. ${}^\circ N = {}^\perp N$.

- (v) Für $M_1 \subseteq M_2 \subseteq X$ gilt $M_2^\perp \subseteq M_1^\perp \subseteq Y$ und $M_2^\circ \subseteq M_1^\circ \subseteq Y$; für $N_1 \subseteq N_2 \subseteq Y$ gilt ${}^\perp N_2 \subseteq {}^\perp N_1 \subseteq X$ und ${}^\circ N_2 \subseteq {}^\circ N_1 \subseteq X$.

Beweis. (i) und (ii): Es gilt $\iota(x) \in (Y, \sigma(Y, X))'$ und $y \in (X, \sigma(X, Y))'$. Also ist M^\perp (${}^\perp N$) wegen (5.4.1) Durchschnitt von $\sigma(Y, X)$ -abgeschlossenen ($\sigma(X, Y)$ -abgeschlossenen) Unterräumen, und M° (${}^\circ N$) ist der Durchschnitt von konvexen, Null enthaltenden und $\sigma(Y, X)$ -abgeschlossenen ($\sigma(X, Y)$ -abgeschlossenen) Teilmengen von Y (X).

(iii) und (iv): Ist M kreisförmig (ein Unterraum) und $y \in Y$, so ist $\langle M, y \rangle$ als Teilmenge von \mathbb{C} kreisförmig (ein Unterraum), womit $\operatorname{Re} \langle M, y \rangle \leq 1$ zu $|\langle M, y \rangle| \leq 1$ ($\langle M, y \rangle = \{0\}$) äquivalent ist. Entsprechend zeigt man die Aussage für ${}^\circ N$.

(v) ist offensichtlich richtig. □

5.4.5 Beispiel. Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und X' sein Dualraum. Bezüglich der Dualität (X, X') liegt wegen Lemma 5.4.4 ein f aus X' in $K_1^X(0)^\circ$ genau dann, wenn $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in K_1^X(0)$. Das ist aber zu $\|f\| \leq 1$ äquivalent. Also gilt $K_1^X(0)^\circ = K_1^{X'}(0)$. Da $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in U_1^X(0)$ auch $\|f\| \leq 1$ bedeutet, gilt $U_1^X(0)^\circ = K_1^{X'}(0)$.

Bezüglich der Dualität (X, X') wollen wir auch ${}^\circ K_1^{X'}(0) = K_1^X(0)$ nachweisen. Wieder wegen Lemma 5.4.4 gilt nämlich $x \in {}^\circ K_1^{X'}(0)$ genau dann, wenn $|f(x)| \leq 1$ alle $f \in K_1^{X'}(0)$. Wegen (5.2.7) bedeutet das genau $\|x\| \leq 1$. //

5.4.6 Satz (Bipolarsatz). Sei (X, Y) ein duales Paar, und seien $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} {}^\circ(M^\circ) &= \overline{\operatorname{co}(M \cup \{0\})}^{\sigma(X, Y)}, & ({}^\circ N)^\circ &= \overline{\operatorname{co}(N \cup \{0\})}^{\sigma(Y, X)}, \\ {}^\perp(M^\perp) &= \overline{\operatorname{span} M}^{\sigma(X, Y)}, & ({}^\perp N)^\perp &= \overline{\operatorname{span} N}^{\sigma(Y, X)}. \end{aligned}$$

Beweis. Für ${}^\circ(M^\circ) = \overline{\text{co}(M \cup \{0\})}^{\sigma(X,Y)}$ wollen wir Korollar 5.2.6 auf die konvexe und 0 enthaltende Menge $C := \text{co}(M \cup \{0\})$ und die Topologie $\mathcal{T} = \sigma(X, Y)$ anwenden. Wegen (5.2.9) erhält man

$$\overline{C}^{\sigma(X,Y)} = \bigcap_{\substack{y \in Y \\ C \subseteq (\text{Re } y)^{-1}(-\infty, 1]}} (\text{Re } y)^{-1}(-\infty, 1] = {}^\circ\{y \in Y : C \subseteq (\text{Re } y)^{-1}(-\infty, 1]\}.$$

Da die Mengen $(\text{Re } y)^{-1}(-\infty, 1]$ konvex sind und die Null enthalten, gilt $\text{co}(M \cup \{0\}) = C \subseteq (\text{Re } y)^{-1}(-\infty, 1]$ genau dann, wenn $M \subseteq (\text{Re } y)^{-1}(-\infty, 1]$, bzw. genau dann, wenn $\text{Re}\langle M, y \rangle \leq 1$, dh. wenn $y \in M^\circ$. Somit gilt $\overline{\text{co}(M \cup \{0\})}^{\sigma(X,Y)} = {}^\circ(M^\circ)$. Entsprechend wird $({}^\circ N)^\circ = \overline{\text{co}(N \cup \{0\})}^{\sigma(Y,X)}$ gezeigt.

Da $\text{span } M$ konvex ist und die Null enthält, folgt aus dem schon gezeigten $\overline{\text{span } M}^{\sigma(X,Y)} = {}^\circ(\text{span } M^\circ)$. Wegen Lemma 5.4.4, (i) und (iv), gilt ${}^\circ((\text{span } M)^\circ) = {}^\circ((\text{span } M)^\perp) = {}^\perp((\text{span } M)^\perp)$. Wegen der Linearität gilt aber $(\text{span } M)^\perp = M^\perp$. Entsprechend zeigt man $\overline{\text{span } N}^{\sigma(Y,X)} = ({}^\perp N)^\perp$. \square

5.4.7 Proposition. Sei (X, \mathcal{T}) ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und M ein linearer Unterraum von X . Dann gelten folgende Aussagen, wobei die auftretenden Annihilatoren bzgl. dem Paar (X, X') gebildet werden.

(i) Die Abbildung

$$\sigma : \begin{cases} X'/M^\perp & \rightarrow M' \\ x' + M^\perp & \mapsto x'|_M \end{cases}$$

ist wohldefiniert und stellt eine lineare Bijektion dar.

(ii) Für einen abgeschlossenen Unterraum M von X ist die Abbildung

$$\tau : \begin{cases} (X/M)' & \rightarrow M^\perp \\ f & \mapsto f \circ \pi \end{cases}$$

eine lineare Bijektion, wobei $\pi : X \rightarrow X/M$ die kanonische Projektion bezeichnet.

Wird \mathcal{T} von einer Norm $\|\cdot\|$ auf X erzeugt, so sind σ und τ isometrisch, wenn man X' mit der Abbildungsnorm und die auftretenden Faktorräume mit der entsprechenden Faktorraumnorm versieht, vgl. (2.4.3).

Beweis.

ad(i): Für $x' \in X'$, $m' \in M^\perp$ und $y \in M$ gilt $x'(y) = (x' + m')(y)$, womit σ wohldefiniert ist. Als Einschränkung einer linearen und stetigen Funktion ist $\sigma(x' + M^\perp)$ selber linear und stetig.

Jedes $f \in M'$ hat gemäß Korollar 5.2.7, (iv), eine Fortsetzung $x' \in X'$; also $\sigma(x' + M^\perp) = x'|_M = f$. Somit ist σ surjektiv. Wegen

$$\sigma(x' + M^\perp) = \sigma(y' + M^\perp) \Leftrightarrow (x' - y')|_M = 0 \Leftrightarrow x' - y' \in M^\perp$$

ist σ auch injektiv.

Betrachte nun die Situation, dass X normiert ist. Als Einschränkung der beschränkten Abbildung x' gilt für $\sigma(x' + M^\perp)$ sicher $\|\sigma(x' + M^\perp)\| \leq \|x'\|$ und daher

$$\|\sigma(x' + M^\perp)\| \leq \inf\{\|x' + m'\| : m' \in M^\perp\} = \|x' + M^\perp\|. \quad (5.4.3)$$

Nach Korollar 5.2.4, (ii), existiert eine Fortsetzung $y' \in X'$ von $\sigma(x' + M^\perp) = x'|_M$ mit $\|y'\| = \|x'|_M\|$. Es folgt $y' = x' + m'$ für ein bestimmtes $m' \in M^\perp$, und damit gilt sogar Gleichheit in (5.4.3).

ad(ii): Für $f \in (X/M)'$ gilt klarerweise $f \circ \pi \in X'$, und für $m \in M$ gilt $(f \circ \pi)m = 0$, womit tatsächlich $\tau(f) \in M^\perp$. Wegen der Surjektivität von π ist τ injektiv. Schließlich ist für $x' \in M^\perp$ durch $x + M \mapsto x'(x)$ eine lineare Abbildung $f : X/M \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow x' & \\ X/M & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \end{array}$$

wohldefiniert. Da X/M die finale Topologie trägt, ist f stetig, vgl. Satz 1.4.1, (FI_3) . Also gilt mit $f \in (X/M)'$ mit $\tau(f) = x'$, und wir schließen, dass τ auch surjektiv ist.

Betrachte die Situation, dass X normiert ist. Für die offene Einheitskugel von X gilt $\pi(U_1^X(0)) = U_1^{X/M}(0)$, vgl. (2.4.4). Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|\tau(f)\| &= \|f \circ \pi\| = \sup\{|f(\pi(x))| : x \in U_1^X(0)\} \\ &= \sup\{|f(y)| : y \in \pi(U_1^X(0))\} = \|f\|. \end{aligned}$$

□

5.4.8 Korollar. *In der Situation von Proposition 5.4.7, (ii), ist X/M genau dann endlichdimensional, wenn M^\perp es ist. In diesem Fall gilt $\dim(X/M) = \dim M^\perp$.*

Beweis. Diese Aussage erhält man unmittelbar aus Korollar 5.2.7 und Proposition 5.4.7.

□

5.5 Topologien auf $(X, \|\cdot\|)'$, Satz von Banach-Alaoglu

Gemäß Beispiel 5.3.7 ist ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ neben der Normtopologie $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ auch mit der schwachen Topologie $\sigma(X, X')$ versehen, wobei $X' := (X, \|\cdot\|)'$. Wie aus Beispiel 5.3.7 bekannt gilt dabei $(X, \sigma(X, X'))' = X'$.

5.5.1 Bemerkung. Um den Unterschied von $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ und $\sigma(X, X')$ klarer zu machen, sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X . Dieses Netz konvergiert bzgl. $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn $\lim_{i \in I} \|x_i - x\| = 0$.

Da $\sigma(X, X')$ die initiale Topologie bzgl. der Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in X'$, ist, konvergiert $(x_i)_{i \in I}$ genau dann schwach gegen $x \in X$ (also bzgl. der schwachen Topologie), wenn $\lim_{i \in I} f(x_i) = f(x)$ für alle $f \in X'$. Anstatt mit der bekannten Tatsache, dass $\sigma(X, X') \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ zu argumentieren, vgl. Beispiel 5.3.7, kann man, um von $\lim_{i \in I} \|x_i - x\| = 0$ auf $\lim_{i \in I} f(x_i) = f(x)$ für alle $f \in X'$ zu schließen, einfach die Abschätzung $|f(x_i - x)| \leq \|f\| \|x_i - x\|$ verwenden.

Eine Nullumgebung $\bigcap_{i=1}^n V(|f_i|, \epsilon_i)$ mit $f_1, \dots, f_n \in X'$ und $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0$ bzgl. $\sigma(X, X')$ enthält den linearen Unterraum $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i$. Dieser hat Kodimension höchstens n . Ist $\dim X = \infty$, so enthält also jede $\sigma(X, X')$ -Nullumgebung einen nichttrivialen linearen Unterraum von X . Eine Norm-Kugel $\{x \in X : \|x\| < r\}$ enthält sicher keinen solchen. Somit ist $\sigma(X, X')$ echt gröber als $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, obwohl $(X, \sigma(X, X'))' = X' = (X, \|\cdot\|)'$. Im Falle $\dim X < \infty$ stimmen diese Topologien klarerweise überein, vgl. Korollar 2.2.2. //

Ehe wir die schwachen Topologien auf dem Dualraum $X' = (X, \|\cdot\|)' = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ diskutieren, bringen wir folgendes Lemma.

5.5.2 Lemma. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, und bezeichne ι die Abbildung, die einem $x \in X$ das Punktauswertungsfunktional $(f \mapsto f(x)) \in (X')^*$ zuordnet. Dann bildet ι sogar in den topologischen Bidualraum X'' hinein ab, wobei $X'' = (X', \|\cdot\|_{X'})'$ der Dualraum von X' versehen mit der Abbildungsnorm $\|\cdot\|_{X'}$ ist.*

Die sogenannte kanonische Einbettung $\iota : X \rightarrow X''$ ist linear und isometrisch, wenn man X'' mit der Abbildungsnorm $\|\cdot\|_{X''}$ versieht.

Beweis. Für $x \in X$ gilt

$$|\iota(x)(f)| = |f(x)| \leq \|x\|_X \cdot \|f\|_{X'} \quad \text{für alle } f \in X', x \in X,$$

womit $\iota(x)$ beschränkt ist und daher in X'' liegt. Offenbar ist ι linear. Die Isometrie-eigenschaft folgt aus (5.2.7), da für $x \in X$

$$\begin{aligned} \|\iota(x)\|_{X''} &= \sup \{ |\iota(x)f| : f \in X', \|f\|_{X'} = 1 \} \\ &= \sup \{ |f(x)| : f \in X', \|f\|_{X'} = 1 \} = \|x\|_X. \end{aligned}$$

□

5.5.3 Definition. Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *reflexiv*, falls $X'' = \iota(X)$.

Der Banachraum $(X', \|\cdot\|_{X'})$ lässt sich nun mit (zumindest) drei interessanten Topologien versehen. Die Normtopologie $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_{X'}}$, die schwache Topologie $\sigma(X', X'')$ – gebildet wie in Beispiel 5.3.7 aber ausgehend von $(X', \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{X'}}$) anstatt von $(X, \mathcal{T}_{\|\cdot\|})$, und die schwach-* Topologie $\sigma(X', X) := \sigma(X', \iota(X))$, welche für $Y = X'$ mit der Topologie $\sigma(Y, X)$ aus Bemerkung 5.4.1 übereinstimmt.

Aus Beispiel 5.3.7 und aus der Tatsache, dass $\iota(X) \subseteq X''$, zusammen mit Korollar 5.3.5 folgt

$$\sigma(X', X) \subseteq \sigma(X', X'') \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{X'}}.$$

Aus Korollar 5.3.5 erkennen wir auch, dass $\sigma(X', X) = \sigma(X', X'')$ genau dann gilt, wenn X reflexiv ist. In Bemerkung 5.5.1 haben wir gesehen, dass $\sigma(X', X'') = \overline{\mathcal{T}_{\|\cdot\|_{X'}}}$, genau dann gilt, wenn $\dim X' < \infty$. Wegen Korollar 5.2.7, (iii), ist das gleichbedeutend zu $\dim X < \infty$.

Für die entsprechenden Dualräume gilt $(X', \sigma(X', X))' = \iota(X)$ und $(X', \overline{\mathcal{T}_{\|\cdot\|_{X'}}})' = X'' = (X', \sigma(X', X''))'$, vgl. Satz 5.3.3.

Wegen $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ haben wir auf X' auch noch die schwache und die starke Operatortopologie $\mathcal{T}_s, \mathcal{T}_w$, vgl. Beispiel 5.3.9, und Beispiel 5.1.10. Man sieht aber unschwer, dass hier $\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_w = \sigma(X', X)$.

Als Folgerung des Bipolarsatzes gilt

5.5.4 Satz (von Goldstine). *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, bezeichne mit $K_1^X(0)$ die abgeschlossene Einheitskugel von X und mit $K_1^{X''}(0)$ jene von X'' . Weiters sei ι die kanonische Einbettung von X in X'' und ι' jene von X' in X''' . Dann gilt*

$$\overline{\iota(K_1^X(0))^{\sigma(X'', \iota'(X'))}} = K_1^{X''}(0).$$

Beweis. Wegen $\iota(x)(f) = f(x)$ für $x \in X, f \in X'$ gilt

$${}^\circ\iota(K_1^X(0)) = \{f \in X' : \iota(x)(f) = 0 \forall x \in X, \|x\| \leq 1\} = K_1^X(0)^\circ = K_1^{X'}(0),$$

wobei ${}^\circ\iota(K_1^X(0))$ die polare Menge zu $\iota(K_1^X(0)) (\subseteq X'')$ bzgl. der Dualität (X', X'') und $K_1^X(0)^\circ$ die polare Menge zu $K_1^X(0)$ in X' bzgl. der Dualität (X, X') ist. Aus dem Bipolarsatz, Satz 5.4.6, angewandt auf die Dualität (X', X'') folgt daher

$$\overline{\iota(K_1^X(0))^{\sigma(X'', \iota'(X'))}} = ({}^\circ\iota(K_1^X(0)))^\circ = K_1^{X'}(0)^\circ = K_1^{X''}(0).$$

□

Der Satz von Banach-Alaoglu – eigentlich ein Korollar des Satzes von Tychonoff – beschreibt die folgende wichtige Kompaktheitseigenschaft der schwach-* Topologie.

5.5.5 Satz (von Banach-Alaoglu). *Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist die bezüglich der Abbildungsnorm abgeschlossene Einheitskugel um die Null in X'*

$$K_1^{X'}(0) := \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$$

kompakt bezüglich der schwach- Topologie $\sigma(X', X)$.*

Bevor wir zum Beweis kommen, wollen wir in Erinnerung rufen, was das Produkt einer Familie von Mengen eigentlich ist. Für nichtleere Mengen I und $M_i, i \in I$, ist das Produkt der $M_i, i \in I$, mengentheoretisch definiert als

$$\prod_{i \in I} M_i := \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i : f(i) \in M_i \right\},$$

also die Menge aller Funktionen definiert auf I , deren Wert an der Stelle i in der Menge M_i liegt. Die kanonische Projektion $\pi_i : \prod_{j \in I} M_j \rightarrow M_i$ ist definiert als

$$\pi_i(f) := f(i), \quad f \in \prod_{j \in I} M_j.$$

Sind speziell alle Mengen M_i gleich, $M_i = M$, $i \in I$, so ist also $\prod_{i \in I} M$ die Menge aller Funktionen von I nach M .

Beweis (von Satz 5.5.5). Betrachte \mathbb{C} als topologischen Raum mit der, vom üblichen Betrag $|\cdot|$ induzierten, euklidischen Topologie. Bezeichne mit \mathcal{V} die entsprechende Produkttopologie auf $\prod_{x \in X} \mathbb{C}$, d.h. \mathcal{V} sei die initiale Topologie bezüglich der Familie von Abbildungen

$$\pi_y : \prod_{x \in X} \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|) \quad \text{für alle } y \in X.$$

Nun haben wir $X' \subseteq \prod_{x \in X} \mathbb{C}$. Die Spurtopologie $\mathcal{V}|_{X'}$ ist die initiale Topologie bezüglich der einelementigen Familie $\{\iota_{X'}\}$ bestehend aus der Einbettungsabbildung

$$\iota_{X'} : \begin{cases} X' & \rightarrow (\prod_{x \in X} \mathbb{C}, \mathcal{V}) \\ f & \mapsto f \end{cases}$$

Die schwach-* Topologie auf X' ist die initiale Topologie bezüglich der Familie von Abbildungen

$$\iota(x) : X' \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|), \quad x \in X.$$

Nun gilt

$$\iota(x)f = f(x) = \pi_x(f) = (\pi_x \circ \iota_{X'})(f) \quad \text{für alle } x \in X, f \in X';$$

wir sind also in der Situation

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota(y)} \\ \text{---} \end{array} \\ & & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_y} \\ \text{---} \end{array} \\ X' & \xrightarrow{\iota_{X'}} & \prod_{x \in X} \mathbb{C} \\ & & \begin{array}{c} \vdots \\ \xrightarrow{\pi_z} \\ \text{---} \end{array} \\ & & \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota(z)} \\ \text{---} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} (\mathbb{C}, |\cdot|) \\ \vdots \\ (\mathbb{C}, |\cdot|) \end{array}$$

Korollar 1.2.4 gibt nun $\sigma(X', X) = \mathcal{V}|_{X'}$.

Betrachte für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $y, z \in X$ die bezüglich \mathcal{V} stetige Abbildung

$$h_{\alpha, \beta, y, z} = \alpha \pi_y + \beta \pi_z - \pi_{\alpha y + \beta z} : \prod_{x \in X} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ein Element $f \in \prod_{x \in X} \mathbb{C}$ wird unter $h_{\alpha, \beta, y, z}$ genau dann auf Null abgebildet, wenn $\alpha f(y) + \beta f(z) - f(\alpha y + \beta z) = 0$ ist. Somit ist

$$\bigcap_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{C} \\ y, z \in X}} h_{\alpha, \beta, y, z}^{-1}(\{0\}) = L(X, \mathbb{C}),$$

die Menge aller linearen Abbildungen von X nach \mathbb{C} . Eine lineare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ gehört genau dann zur Einheitskugel $K_1^{X'}(0)$, wenn $|f(x)| \leq \|x\|$ für alle $x \in X$ gilt. Wegen $f(x) = \pi_x(f)$, haben wir daher

$$K_1^{X'}(0) = \bigcap_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{C} \\ y, z \in X}} h_{\alpha, \beta, y, z}^{-1}(\{0\}) \cap \prod_{x \in X} \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq \|x\|\}.$$

Wegen der Stetigkeit der $h_{\alpha,\beta,y,z}$ ist der erste Durchschnitt abgeschlossen. Wegen dem Satz von Tychonoff ist das Produkt kompakt. Also ist $K_1^{X'}(0)$ eine kompakte Teilmenge von $\prod_{x \in X} \mathbb{C}$ bezüglich der Produkttopologie \mathcal{V} , und daher auch eine kompakte Teilmenge von X' bezüglich der Spurtopologie $\mathcal{V}|_{X'}$. \square

5.6 Satz von Krein-Milman

Aus dem Satz von Hahn-Banach erhält man auch eine geometrische Aussage über kompakte konvexe Teilmengen eines lokalkonvexen Vektorraumes, nämlich, dass sie sogenannte Extrempunkte besitzen müssen und tatsächlich in gewissem Sinne von diesen erzeugt werden.

5.6.1 Definition. Eine nichtleere Menge $S \subseteq K$ heißt *extremale Menge* bezüglich K , wenn gilt: Ist $x, y \in K$, $0 < t < 1$, und $tx + (1-t)y \in S$, so folgt $x, y \in S$. D.h. ist ein Punkt aus S ein innerer Punkt einer Strecke mit Endpunkten in K , so müssen diese Endpunkte bereits in S liegen. Ein Punkt $z \in K$ heißt *Extrempunkt* von K , wenn $\{z\}$ eine extremale Menge ist. Die Menge aller Extrempunkte von K bezeichnen wir mit $E(K)$.

5.6.2 Satz (von Krein-Milman). *Sei X lokalkonvex und sei $K \subseteq X$ eine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge von X . Dann ist K die abgeschlossene konvexe Hülle von $E(K)$, d.h. es gilt $K = \overline{\text{co}}(E(K))$. Insbesondere besitzt K Extrempunkte.*

Beweis. Sei \mathcal{P} die Menge aller kompakten extremalen Teilmengen von K . Da K selbst eine solche ist, ist $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Wir zeigen zunächst, dass gilt:

- (i) Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}$, und setze $S := \bigcap_{T \in \mathcal{U}} T$. Dann ist entweder $S = \emptyset$ oder $S \in \mathcal{P}$.
- (ii) Sei $S \in \mathcal{P}$, $f \in X'$, $\mu := \max\{\text{Re } f(x) : x \in S\}$, und setze $S_f := \{x \in S : \text{Re } f(x) = \mu\}$. Dann gilt $S_f \in \mathcal{P}$.

Die Eigenschaft (i) ist klar. Wir zeigen (ii): Zunächst ist S_f nicht leer und als abgeschlossene Teilmenge von S kompakt. Sei $z \in S_f$, $z = tx + (1-t)y$ mit $x, y \in K$, $0 < t < 1$. Wegen $z \in S$ folgt $x, y \in S$, also ist $\text{Re } f(x) \leq \mu$, $\text{Re } f(y) \leq \mu$. Wegen

$$\mu = \text{Re } f(z) = t \text{Re } f(x) + (1-t) \text{Re } f(y)$$

folgt, dass $\text{Re } f(x) = \text{Re } f(y) = \mu$, d.h. $x, y \in S_f$.

Sei $S_0 \in \mathcal{P}$ und betrachte $\mathcal{P}' := \{T \in \mathcal{P} : T \subseteq S_0\}$. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}'$ bzgl. der Inklusion totalgeordnet. Da die Mengen $S \in \mathcal{U}$ alle kompakt sind, folgt wegen der endlichen Durchschnittseigenschaft, dass $\bigcap_{T \in \mathcal{U}} T \neq \emptyset$ und daher in \mathcal{P}' liegt. Es hat also \mathcal{U} eine untere Schranke in \mathcal{P}' . Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein minimales Element $M \in \mathcal{P}'$. Wegen der Eigenschaft (ii) muss jedes $\text{Re } f$ auf M konstant sein und zwar für jedes $f \in X'$. Da X' auf X punktstetrennend operiert (genauer wegen Korollar 5.2.7, (i)), kann M nur einen Punkt enthalten.

Wir haben also gezeigt, dass jedes $S_0 \in \mathcal{P}$ einen Extrempunkt enthalten muss, d.h. $S_0 \cap E(K) \neq \emptyset$ für jedes $S_0 \in \mathcal{P}$.

Da K kompakt und konvex ist, gilt sicher $\overline{\text{co}}(E(K)) \subseteq K$. Insbesondere ist $\overline{\text{co}}(E(K))$ kompakt.

Sei indirekt angenommen, dass $x_0 \in K \setminus \overline{\text{co}}(E(K))$. Nach Satz 5.2.5, existiert $f \in X'$ mit $\text{Re } f(x_0) > \text{Re } f(y)$, $y \in \overline{\text{co}}(E(K))$. Dann ist $K_f \in \mathcal{P}$ und $K_f \cap \overline{\text{co}}(E(K)) = \emptyset$, ein Widerspruch. \square

Dieser Satz hat viele interessante Konsequenzen. Wir können in dieser Vorlesung darauf aber nicht weiter eingehen.

5.7 Fixpunktsätze Brouwer und Schauder

Wir wollen in diesem Abschnitt zunächst die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder herleiten. Ersterer verwendet Methoden aus Differential- und Integralrechnung und wirkt daher etwas fehl am Platz.

Im Folgenden sei S^d die *Einheitssphäre* $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$ im \mathbb{R}^{d+1} , wobei von hier bis zum Ende des Beweises von Satz 5.7.3 $\|\cdot\|$ für die Euklidische Norm $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{d+1} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ steht.

5.7.1 Proposition. *Es gibt keine stetig differenzierbare Funktion $g : O \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ mit offenem $O \supseteq K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$, sodass $g(O) \subseteq S^d$ und $g|_{S^d} = \text{id}_{S^d}$.*

Beweis.

Schritt 1: Angenommen es gäbe ein stetig differenzierbares $g : O \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ mit $g|_{S^d} = \text{id}_{S^d}$ und $g(O) \subseteq S^d$, wobei $O \supseteq K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ offen ist, und es daher ein $\eta > 1$ gibt, sodass sogar $O \supseteq K_\eta^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \supseteq K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$.

Schritt 2: Für $t \geq 0$ betrachte dann die Funktion ($x \in O$)

$$h_t(x) := x + tg(x),$$

welche O offenbar nach \mathbb{R}^{d+1} hinein abbildet. Zudem ist h_t immer stetig differenzierbar, wobei

$$dh_t(x) = I + t dg(x).$$

Da für t $\|dg(x)\| < 1$ die entsprechende Neumannsche Reihe (siehe Analysis II oder Lemma 6.3.9) konvergiert, ist $dh_t(x)$ für solche t invertierbar. Wegen der Stetigkeit von $z \mapsto \|dg(z)\|$ auf der kompakten Menge $K_\eta^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$, liegt $C := \sup_{\|z\| \leq \eta} \|dg(z)\|$ in $[0, +\infty)$, und für $0 \leq t < \frac{1}{C}$ und $\|x\| \leq \eta$ ist $dh_t(x)$ invertierbar.

Da für ein festes $x \in K_\eta^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ die Funktion $t \mapsto \det dh_t(x)$ stetig ist und auf $[0, \frac{1}{C})$ nicht verschwindet, muss sie darauf immer dasselbe Vorzeichen haben. Wegen $\det dh_0(x) = 1$ folgt $\det dh_t(x) > 0$ für alle $t \in [0, \frac{1}{C})$.

Schritt 3: Für $0 \leq t < \frac{1}{C}$ ist $h_t|_{K_\eta^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)}$ injektiv. In der Tat, folgt aus $h_t(x) = h_t(y)$ mit $x, y \in K_\eta^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$, dass

$$x - y + t(g(x) - g(y)) = h_t(x) - h_t(y) = 0.$$

Also $x - y = -t(g(x) - g(y))$. Andererseits ist aber

$$\|g(x) - g(y)\| = \left\| \int_0^1 dg(y + t(x - y))(x - y) dt \right\| \leq \sup_{\|z\| \leq \eta} \|dg(z)\| \|x - y\|,$$

und daher erhalten wir

$$\|x - y\| = t\|g(x) - g(y)\| \leq t \sup_{\|z\| \leq \eta} \|dg(z)\| \|x - y\|,$$

was wegen $tC < 1$ die Beziehung $x = y$ nach sich zieht.

Schritt 4: Wir behaupten nun, dass $h_t(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) = U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ für jedes $0 \leq t < \frac{1}{C}$. In der Tat folgt aus $\|x\| < 1$

$$\|h_t(x)\| \leq \|x\| + t\|g(x)\| < 1 + t,$$

also gilt $A := h_t(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) \subseteq U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$, wobei diese Teilmenge A von $U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ nichtleer und wegen dem Umkehrsatz – es ist ja $dh_t(x)$ für $\|x\| \leq 1 (< \eta)$ invertierbar – offen ist. Setzen wir $B := U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \setminus h_t(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0))$, so gilt $U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) = A \dot{\cup} B$. Außerdem gilt

$$\overline{B} \cap A \subseteq (\mathbb{R}^{d+1} \setminus A) \cap A = \emptyset,$$

da $\mathbb{R}^{d+1} \setminus A$ ja abgeschlossen in \mathbb{R}^{d+1} ist.

Andererseits gilt $A \subseteq h_t(K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0))$, wobei die rechte Menge als stetiges Bild einer kompakten Menge selber kompakt und daher in \mathbb{R}^{d+1} abgeschlossen ist. Also folgt

$$\overline{A} \cap B \subseteq h_t(K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) \cap B.$$

Ein y aus der linken Seite muss daher $y = h_t(x) \in B$ für ein $x \in K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ erfüllen. Aus $\|x\| = 1$ würde $y = h_t(x) = x + t \operatorname{id} |_{S^d}(x) = (1+t)x \notin U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ folgen, was wegen $B \subseteq U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ unmöglich ist. Also muss $\|x\| < 1$, und daher $y = h_t(x) \in h_t(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) \cap B = A \cap B = \emptyset$, was ebenfalls unmöglich ist. Wir schließen damit auf $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

Da $U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ aber zusammenhängend ist, muss $U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) = A$.

Schritt 5: Nach dem bisher gezeigten ist für jedes $t \in [0, \frac{1}{C})$ die Abbildung $h_t : U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \rightarrow U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit regulärem $dh_t(x)$, $x \in U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ – also ein Diffeomorphismus. Aus der Transformationsregel folgt

$$\lambda_{d+1}(U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) = \int_{U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)} \det dh_t(x) d\lambda_{d+1}(x),$$

wobei man mit Hilfe der Formel zur Determinantenberechnung unmittelbar erkennt, dass

$$\det dh_t(x) = \det(I + t dg(x)) = \det dg(x) t^{d+1} + \beta_d(x) t^d + \cdots + \beta_1(x) t + 1,$$

für gewisse stetige reellwertige $\beta_j : U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \rightarrow \mathbb{R}$. Wir erhalten also

$$(1+t)^{d+1} \lambda_{d+1}(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) = \lambda_{d+1}(U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) =$$

$$t^{d+1} \int_{U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)} \det dg(x) d\lambda_{d+1}(x) + t^d \int_{U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)} \beta_d(x) d\lambda_{d+1}(x) + \dots \\ + t \int_{U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)} \beta_1(x) d\lambda_{d+1}(x) + \lambda_{d+1}(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)).$$

Diese Gleichheit muss zumindest für alle $t \in [0, \frac{1}{C})$ gelten. Da ein Polynom $p(t)$ eindeutig durch die Polynomfunktion $p|_{[0, \frac{1}{C})}$ bestimmt ist, müssen die Koeffizienten von t^{d+1} übereinstimmen. Also gilt

$$0 \neq \lambda_{d+1}(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) = \int_{U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)} \det dg(x) d\lambda_{d+1}(x). \quad (5.7.1)$$

Schritt 6: Andererseits folgt für die stetig differenzierbare Funktion $h(x) = \|x\|^2$, $x \in U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ aus $g(O) \subseteq S^d$ mit Hilfe der Kettenregel

$$0 = d(h \circ g)(x) = dh(g(x)) dg(x) = 2g(x)^T dg(x).$$

Insbesondere kann $dg(x)$ für kein $x \in U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ regulär sein. Also gilt $\det dg(x) = 0$ im Widerspruch zu (5.7.1). \square

5.7.2 Korollar. *Es gibt keine stetige Funktion $h : K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \rightarrow S^d$, sodass $h|_{S^d} = \text{id}_{S^d}$.*

Beweis. Angenommen es gäbe eine solche Funktion schon, so könnten wir h auf ganz \mathbb{R}^{d+1} fortsetzen, indem wir $h(x) = \frac{x}{\|x\|}$ für $\|x\| > 1$ setzen. Da

$$\mathbb{R}^{d+1} = K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \cup (\mathbb{R}^{d+1} \setminus U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0))$$

und da h auf diesen beiden abgeschlossenen Teilmengen stetig ist, folgt die Stetigkeit von h auf \mathbb{R}^{d+1} .

Da auf $K_2^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ die reellen Polynome in den Variablen $(x_1, \dots, x_{d+1})^T = x$ eine nirgends verschwindende und punkt trennende Algebra in $C(K_2^{\mathbb{R}^{d+1}}(0))$ ist, folgt aus dem Satz von Stone-Weierstrass, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ derartige Polynome p_1, \dots, p_{d+1} gibt sodass

$$\|h_j - p_j\|_{K_2(0), \infty} < \epsilon, \quad j = 1, \dots, d+1.$$

Wählen wir $\epsilon > 0$ hinreichend klein und setzen wir

$$p(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_{d+1}(x) \end{pmatrix},$$

so folgt $\sup_{\|x\| \leq 2} \|h(x) - p(x)\| < \frac{1}{2}$.

Nun sei $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar derart, dass $\lambda(\mathbb{R}) \subseteq [0, 1]$, dass $\lambda((-\infty, \frac{9}{4}]) = \{0\}$ und dass $\lambda([4, +\infty)) = \{1\}$. Man überzeugt sich leicht, dass es solche Funktionen gibt. Es gibt sogar solche, die obendrein unendlich oft differenzierbar sind. Die Funktion

$$r(x) = \lambda(\|x\|^2)h(x) + (1 - \lambda(\|x\|^2))p(x), \quad x \in \mathbb{R}^{d+1}$$

mit Werten in \mathbb{R}^{d+1} ist überall stetig differenzierbar, da für $x \in U_{\frac{3}{2}}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \supseteq K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ der Ausdruck $r(x)$ mit $p(x)$ übereinstimmt, und da auf $\mathbb{R}^{d+1} \setminus K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ alle auftretenden Funktionen stetig differenzierbar sind.

Auf $\mathbb{R}^{d+1} \setminus K_2^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ gilt zudem $r(x) = h(x) = \frac{x}{\|x\|}$, und für $x \in K_2^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ folgt

$$\begin{aligned} \|r(x)\| &= \|h(x) - (1 - \lambda(\|x\|^2))(h(x) - p(x))\| \\ &\geq \|h(x)\| - (1 - \lambda(\|x\|^2))\|h(x) - p(x)\| \geq 1 - \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Somit gilt $r(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{d+1}$. In Folge ist auch

$$g(x) = \frac{r(2x)}{\|r(2x)\|}, \quad x \in \mathbb{R}^{d+1},$$

eine überall stetig differenzierbare Funktion mit Werten in S^d , sodass für $x \in S^d$ wegen $r(2x) = h(2x) = x$

$$g(x) = \frac{r(2x)}{\|r(2x)\|} = x.$$

Gemäß Proposition 5.7.1 kann es aber kein solches g geben. □

Wir wollen daran erinnern, dass, falls H ein (reeller oder komplexer) Hilbertraum und $E \subseteq H$ abgeschlossen und konvex ist, es zu jedem $x \in H$ ein eindeutiges $r(x) \in E$ gibt, sodass $d(x, E) = \|x - r(x)\|$. Die Funktion $r : H \rightarrow E$ ist dabei stetig und stimmt auf E mit id_E überein.

5.7.3 Satz (Fixpunktsatz von Brouwer). *Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ kompakt und konvex mit $d \geq 0$. Jede stetige Funktion $f : E \rightarrow E$ hat dann einen Fixpunkt, dh. es gibt ein $x \in E$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Da E insbesondere beschränkt ist, gilt $E \subseteq U_\eta^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ für ein $\eta > 0$. Betrachten wir $\frac{1}{\eta}E$ und $x \mapsto \frac{1}{\eta}f(\eta x)$ anstelle von E und f , so können wir oBdA. $E \subseteq U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ annehmen. Indem wir nötigenfalls E als Teilmenge von $\mathbb{R}^{d+1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{d+2}$ betrachten, können wir auch $d > 0$ annehmen.

Wir nehmen nun an, dass es ein stetiges $f : E \rightarrow E$ ohne Fixpunkt gibt und betrachten \mathbb{R}^{d+1} versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt als Hilbertraum. Ist $r(x)$ definiert wie vor dem aktuellen Satz, so ist die Funktion

$$f \circ r : x \mapsto f(r(x)), \quad x \in K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0),$$

stetig und hat Werte in $E \subseteq K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$. Außerdem hat $f \circ r$ keinen Fixpunkt, da dieser in E liegen müsste und damit ein Fixpunkt von f wäre.

Also gilt $f(r(x)) - x \neq 0$ für alle $x \in K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$. Somit gibt es für alle $x \in K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ ein eindeutiges $\lambda(x) \in (0, +\infty)$ mit

$$f(r(x)) + \lambda(x)(x - f(r(x))) \in S^d.$$

$\lambda(x)$ ist die positive Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} & \|f(r(x))\|^2 - 2\lambda \left(f(r(x)), f(r(x)) - x \right) + \lambda^2 \|x - f(r(x))\|^2 \\ & = \|f(r(x)) + \lambda(x - f(r(x)))\|^2 = 1; \end{aligned}$$

also

$$\lambda(x) = \frac{\left(f(r(x)), f(r(x)) - x \right)}{\|x - f(r(x))\|^2} + \sqrt{\frac{\left(f(r(x)), f(r(x)) - x \right)^2}{\|x - f(r(x))\|^4} + \frac{1 - \|f(r(x))\|^2}{\|x - f(r(x))\|^2}}.$$

Somit ist die Funktion $h(x) := f(r(x)) + \lambda(x)(x - f(r(x)))$ stetig. Außerdem bildet h die Menge $K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ nach S^d hinein ab. Dabei gilt $\lambda(x) = 1$ und damit $h(x) = x$ für $\|x\| = 1$. Gemäß Korollar 5.7.2 gibt es aber kein solches h . \square

Als Folgerung können wir den bekannten *Fixpunktsatz von Schauder* herleiten. Davor benötigen wir noch den Begriff der konvexen Hülle.

5.7.4 Definition. Sei X ein Vektorraum, $E \subseteq X$. Die *konvexe Hülle* von E ist der Durchschnitt aller K enthaltenden konvexen Mengen. Wir bezeichnen sie mit $\text{co}(E)$.

Es ist leicht einzusehen, dass $\text{co}(E)$ die kleinst konvexe Obermenge von E in X ist, und dass

$$\text{co}(E) := \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j : k \in \mathbb{N}; x_1, \dots, x_k \in E, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1], \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \right\}.$$

Falls E endlich ist, erkennt man aus dieser Darstellung, dass $\text{co}(E)$ stetiges Bild einer kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^n (n ist die Mächtigkeit von E) und somit selber kompakt ist.

5.7.5 Satz. Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $\emptyset \neq E \subseteq F \subseteq X$ mit kompaktem E und konvexem F . Jede stetige Funktion $f : F \rightarrow E$ hat dann einen Fixpunkt.

Beweis. Zunächst sei I die Menge aller offenen, konvexen und kreisförmigen Nullumgebung V in X , welche wir durch $V_1 \preceq V_2 : \Leftrightarrow V_1 \supseteq V_2$ offenbar zu einer gerichteten Mengen machen können; vgl. Lemma 2.1.8.

Zu jedem $V \in I$ ist das Minkowski-Funktional $\mu_V : X \rightarrow [0, +\infty)$ nach Lemma 5.1.8 eine Seminorm, wobei $V = \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}$. Wegen der Kompaktheit von E existieren nun $x_1, \dots, x_n \in E$ derart, dass

$$E \subseteq \bigcup_{k=1, \dots, n} x_k + V.$$

Seien $\beta, \beta_k : X \rightarrow [0, +\infty)$ definiert durch

$$\beta_k(x) := \max\{0, 1 - \mu_V(x - x_k)\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

und

$$\beta(x) := \sum_{k=1}^n \beta_k(x).$$

Da jedes $x \in E$ in einer der Mengen $x_k + V$ enthalten ist, und somit $\beta_k(x) > 0$, gilt $\beta(E) \subseteq (0, +\infty)$. Wegen der Dreiecksungleichung nach unten und wegen $\mu_V^{-1}[0, \epsilon] = \epsilon V$ ist μ_V und damit auch alle β_k sowie β stetig.

Somit ist auch die Funktion $g_V : E \rightarrow X$ definiert durch

$$g_V(x) := \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k(x)}{\beta(x)} x_k$$

wohldefiniert und stetig. Für jedes $x \in E$ ist das eine Konvexkombination der Punkte $x_1, \dots, x_n \in E \subseteq F$, wodurch $g_V(E) \subseteq \text{co}(\{x_1, \dots, x_n\}) =: C_V \subseteq F$. Für $x \in E$ gilt zudem

$$x - g_V(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k(x)}{\beta(x)} (x - x_k).$$

Für die $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mu_V(x - x_k) \geq 1$ gilt $\beta_k(x) = 0$. Dabei gibt es aber mindestens ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mu_V(x - x_k) < 1$. Also folgt

$$\mu_V(x - g_V(x)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k(x)}{\beta(x)} \mu_V(x - x_k) < \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k(x)}{\beta(x)} = 1,$$

und somit $x - g_V(x) \in V$.

Außerdem ist C_V im endlichdimensionalen und daher abgeschlossenen Unterraum $Y = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ von X enthalten. Da Y homöomorph zu einem \mathbb{R}^{d+1} ist, ist die entsprechende Kopie von $C_V = \text{co}(\{x_1, \dots, x_n\})$ als Teilmenge von \mathbb{R}^{d+1} kompakt und konvex.

Die Abbildung $g_V \circ f|_{C_V} : C_V \rightarrow C_V$ ist somit stetig und hat – Y ist ja homöomorph zu \mathbb{R}^{d+1} – wegen Satz 5.7.3 einen Fixpunkt $x_V \in C_V \subseteq F$, dh. $g_V \circ f(x_V) = x_V$.

Wegen $f(F) \subseteq E$ ist $(f(x_V))_{V \in I}$ ein Netz in der kompakten Menge E . Es hat also ein gegen ein $e \in E$ konvergentes Teilnetz $(f(x_{V(j)}))_{j \in J}$. Zunächst folgt wegen $x - g_V(x) \in V$ für alle $x \in E$ und damit $f(x) - g_V \circ f(x) \in V$ für alle $x \in F$, dass

$$f(x_{V(j)}) - x_{V(j)} = f(x_{V(j)}) - g_{V(j)} \circ f(x_{V(j)}) \in V(j). \quad (5.7.2)$$

Da $(f(x_{V(j)}))_{j \in J}$ ein Teilnetz von $(f(x_V))_{V \in I}$ ist, gibt es für jedes $V \in I$ ein $j_0 \in J$, sodass $V(j) \subseteq V$ für alle $j \succeq j_0$. Da I eine Nullumgebungsbasis abgibt, erhalten wir wegen (5.7.2)

$$\lim_{j \in J} (f(x_{V(j)}) - x_{V(j)}) = 0 \quad \text{und somit} \quad \lim_{j \in J} x_{V(j)} = \lim_{j \in J} f(x_{V(j)}) = e.$$

Schlussendlich folgt mit der Stetigkeit von f auf F

$$f(e) = f(\lim_{j \in J} x_{V(j)}) = \lim_{j \in J} f(x_{V(j)}) = e.$$

□

Kapitel 6

Elementare Operatortheorie

Sei (X, \mathcal{T}) ein lokalkonvexer Vektorraum. Wenn nichts anderes explizit spezifiziert ist, verstehen wir im Folgenden (links- bzw. rechts-) Annihilatoren immer bezüglich dem punktgetrennenden Unterraum X' von X^* , d.h. bezüglich der Dualität

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} X \times X' & \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, x') & \mapsto x'(x) \end{cases}$$

6.1 Konjugierte Operatoren

Das folgende Korollar des Satzes von Hahn-Banach ist oft nützlich.

6.1.1 Lemma. *Seien X, Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\|T\| = \sup \{ |\langle Tx, y' \rangle| : x \in X, \|x\| \leq 1; y' \in Y', \|y'\| \leq 1 \} \quad (\in [0, +\infty]).$$

Auf Grund der Linearität kann man die obigen Suprema genauso nur durch alle $\|x\| < 1$, $\|y'\| < 1$ bzw. $\|x\| = \|y'\| = 1$ laufen lassen.

Beweis. Nach Korollar 5.2.4 gilt für jedes $x \in X$

$$\|Tx\| = \sup \{ |\langle Tx, y' \rangle| : \|y'\| \leq 1 \},$$

und es folgt

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\| : \|x\| \leq 1 \} = \sup \{ |\langle Tx, y' \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y'\| \leq 1 \}.$$

□

6.1.2 Satz. *Seien X, Y normierte Räume, und sei $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann gibt es einen Operator $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$, für den gilt*

$$\langle Tx, y' \rangle = \langle x, T'y' \rangle \quad \text{für alle } x \in X, y' \in Y'. \quad (6.1.1)$$

Er ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt, und es gilt $\|T'\| = \|T\|$. Der Operator T' heißt der konjugierte (der duale) Operator von T .

Beweis. Ist $y' \in Y'$, so definiere eine lineare Abbildung $T'y' : X \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(T'y')(x) := y'(Tx), \quad x \in X.$$

Als Zusammensetzung der stetigen Abbildungen y' und T ist auch $T'y'$ stetig. Es gilt nach Definition

$$\langle x, T'y' \rangle = (T'y')(x) = y'(Tx) = \langle Tx, y' \rangle \quad \text{für alle } x \in X, y' \in Y',$$

d.h. die Eigenschaft (6.1.1) ist erfüllt. Da X punktetrennend auf X' operiert, ist $T'y'$ durch (6.1.1) eindeutig bestimmt. Sind $y'_1, y'_2 \in Y'$, so gilt $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \langle x, T'(\alpha y'_1 + \beta y'_2) \rangle &= \langle Tx, \alpha y'_1 + \beta y'_2 \rangle = \alpha \langle Tx, y'_1 \rangle + \beta \langle Tx, y'_2 \rangle \\ &= \alpha \langle x, T'y'_1 \rangle + \beta \langle x, T'y'_2 \rangle = \langle x, \alpha T'y'_1 + \beta T'y'_2 \rangle, \end{aligned}$$

also ist $T' : Y' \rightarrow X'$ linear. Schließlich ist nach Definition der Norm auf X'

$$\|T'y'\| = \sup \{ |\langle x, T'y' \rangle| : \|x\| \leq 1 \},$$

und wir erhalten mit Lemma 6.1.1

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \{ |\langle Tx, y' \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y'\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |\langle x, T'y' \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y'\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ \|T'y'\| : \|y'\| \leq 1 \} = \|T'\|. \end{aligned}$$

□

An dieser Stelle sei bemerkt, dass T' nichts anderes ist, als die Einschränkung auf Y' der Transponierten Abbildung $T^t : Y^* \rightarrow X^*$, wie sie aus der Linearen Algebra bekannt ist. Weiters überzeugt man sich leicht, dass stets

$$\text{id}'_X = \text{id}_{X'}, \quad (T \circ S)' = (S' \circ T'), \quad (\alpha T + \beta S)' = \alpha T' + \beta S'. \quad (6.1.2)$$

Ist Ω eine Menge und $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, dann bezeichne mit M_ϕ die Abbildung, die einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion $M_\phi f := \phi \cdot f$ zuweist. Man spricht von dem *Multiplikationsoperator mit Symbol ϕ* .

Natürlich werden die Eigenschaften von M_ϕ davon abhängen, welche Eigenschaften ϕ hat, und zwischen welchen Räumen man M_ϕ betrachtet.

6.1.3 Beispiel. Sei Ω eine Menge versehen mit einer σ -Algebra \mathcal{A} , μ ein σ -endliches Maß auf Ω , und $\phi \in L^\infty(\mu)$. Dann bildet M_ϕ klarerweise den Raum $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ in sich selbst ab. Er ist sogar ein beschränkter Operator, denn ($f \in L^p(\mu)$)

$$\|M_\phi f\|_p = \left(\int_\Omega |\phi f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\|\phi\|_\infty^p \int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|\phi\|_\infty \cdot \|f\|_p, \quad p < \infty,$$

$$\|M_\phi f\|_\infty = \text{esssup}_{x \in \Omega} |\phi f| \leq \text{esssup}_{x \in \Omega} |\phi| \cdot \text{esssup}_{x \in \Omega} |f| = \|\phi\|_\infty \cdot \|f\|_\infty.$$

Wir sehen, dass $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$. Tatsächlich gilt $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. Für den Fall $p = \infty$ gilt das wegen $M_\phi 1 = \phi$. Im Fall $p < \infty$ nehme man ein $\epsilon > 0$, und wähle eine Menge $\Delta \subseteq \Omega$ mit $\mu(\Delta) > 0$ und $|\phi(x)| \geq \|\phi\|_\infty - \epsilon$, $x \in \Delta$. Eine solche Menge Δ existiert nach der Definition des essentiellen Supremums.

Wegen der σ -Endlichkeit von μ können wir Δ nötigenfalls kleiner machen, um auch $\mu(\Delta) < +\infty$ zu gewährleisten.

Für die Funktion $f := \mu(\Delta)^{-\frac{1}{p}} \chi_\Delta$ gilt nun

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p d\mu = \int_\Delta |\mu(\Delta)^{-\frac{1}{p}}|^p d\mu = 1,$$

$$\|M_\phi f\|_p^p = \int_\Omega |\phi f|^p d\mu = \frac{1}{\mu(\Delta)} \int_\Delta |\phi|^p d\mu \geq (\|\phi\|_\infty - \epsilon)^p.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\|M_\phi f\|_p \geq \|\phi\|_\infty$. //

6.1.4 Beispiel. Sei μ ein σ -endliches Maß auf der Menge Ω versehen mit einer σ -Algebra \mathcal{A} , $\phi \in L^\infty(\mu)$, und $1 < p < \infty$. Betrachte den Multiplikationsoperator $M_\phi \in \mathcal{B}(L^p(\mu))$. Sei $\Phi : L^q(\mu) \rightarrow L^p(\mu)'$ der Isomorphismus aus Beispiel 2.3.1

$$(\Phi g)f := \int_\Omega fg d\mu, \quad f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu).$$

Dann ist M'_ϕ aufgefasst als Abbildung von $L^q(\mu)$ in sich gleich $M_\phi \in \mathcal{B}(L^q(\mu))$:

$$\begin{array}{ccc} L^p(\mu)' & \xrightarrow{M'_\phi} & L^p(\mu)' \\ \uparrow \Phi & & \uparrow \Phi \\ L^q(\mu) & \xrightarrow{M_\phi} & L^q(\mu) \end{array}$$

Um dies einzusehen, sei $g \in L^q(\mu)$ und $f \in L^p(\mu)$ gegeben. Dann ist

$$(M'_\phi(\Phi g))f = (\Phi g)(M_\phi f) = \int_\Omega M_\phi f \cdot g d\mu = \int_\Omega f \cdot M_\phi g d\mu = (\Phi(M_\phi g))f.$$

//

6.1.5 Proposition. Seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann gilt

$$\ker T' = (\text{ran } T)^\perp, \quad \ker T = {}^\perp(\text{ran } T').$$

Beweis. Es gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} y' \in \ker T' &\iff T'y' = 0 \iff \left(\forall x \in X : \langle x, T'y' \rangle = 0 \right) \\ &\iff \left(\forall x \in X : \langle Tx, y' \rangle = 0 \right) \iff y' \in (\text{ran } T)^\perp \end{aligned}$$

Genauso gilt

$$\begin{aligned} x \in \ker T &\iff Tx = 0 \iff \left(\forall y' \in Y' : \langle Tx, y' \rangle = 0 \right) \\ &\iff \left(\forall y' \in Y' : \langle x, T'y' \rangle = 0 \right) \iff x \in {}^\perp(\text{ran } T') \end{aligned}$$

□

6.1.6 Korollar. Seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann gilt:

- (i) $\ker T' (\subseteq Y')$ ist w^* -abgeschlossen.
- (ii) T' ist genau dann injektiv, wenn $\text{ran } T$ dicht in Y bezüglich der Norm oder äquivalent dazu dicht bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(Y, Y')$ ist.
- (iii) T ist genau dann injektiv, wenn $\text{ran } T'$ dicht in X' bezüglich der w^* -Topologie $\sigma(X', X)$ ist.

Beweis.

ad(i): Als Annihilator von $\text{ran } T$ ist $\ker T'$ jedenfalls $\sigma(Y', Y)$ -abgeschlossen.

ad(ii): Wegen Satz 5.3.8 gilt $\overline{\text{ran } T}^{\|\cdot\|} = \overline{\text{ran } T}^{\sigma(Y, Y')}$, und wegen Satz 5.4.6 haben wir

$$\overline{\text{ran } T}^{\sigma(Y, Y')} = {}^\perp((\text{ran } T)^\perp) = {}^\perp(\ker T').$$

Also gilt $\overline{\text{ran } T} = Y$ genau dann, wenn $\ker T' = \{0\}$.

ad(iii): Wegen Satz 5.4.6 ist $\overline{\text{ran } T'}^{\sigma(X', X)} = ({}^\perp \text{ran } T')^\perp = (\ker T)^\perp$. Da $\ker T$ $\sigma(X, X')$ -abgeschlossen ist, gilt $\ker T = \{0\}$ genau dann, wenn $\overline{\text{ran } T'}^{\sigma(X', X)} = X'$. □

6.1.7 Proposition. Sei X ein normierter Raum und M ein linearer Unterraum von X .

- (i) Bezeichne $\iota_M : M \rightarrow X$ die kanonische Einbettungsabbildung $\iota_M(x) := x$, $x \in M$. Weiters sei $\pi_{M^\perp} : X' \rightarrow X'/M^\perp$ die kanonische Projektion, und $\sigma : X'/M^\perp \rightarrow M'$, $x' + M^\perp \mapsto x'|_M$ der Isomorphismus aus Proposition 5.4.7. Dann gilt $\iota'_M = \sigma \circ \pi_{M^\perp}$, d.h.

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\iota_M} & M \\ X' & \xrightarrow{\iota'_M} & M' \\ \parallel & & \sigma \updownarrow \sigma^{-1} \\ X' & \xrightarrow{\pi_{M^\perp}} & X'/M^\perp \end{array}$$

- (ii) Sei M obendrein abgeschlossen, und bezeichne $\pi_M : X \rightarrow X/M$ die kanonische Projektion $\pi_M(x) := x + M$. Weiters sei $\iota_{M^\perp} : M^\perp \rightarrow X'$ die kanonische Einbettungsabbildung, und $\tau : (X/M)' \rightarrow M^\perp$, $f \mapsto f \circ \pi_M$ der Isomorphismus aus Proposition 5.4.7. Dann gilt $\pi'_M = \iota_{M^\perp} \circ \tau$, d.h.

$$\begin{array}{ccc} X/M & \xleftarrow{\pi_M} & X \\ (X/M)' & \xrightarrow{\pi'_M} & X' \\ \tau \updownarrow \tau^{-1} & & \parallel \\ M^\perp & \xrightarrow{\iota_{M^\perp}} & X' \end{array}$$

Beweis.

ad (i): Für $m \in M$ und $x' \in X'$ gilt

$$\begin{aligned} \iota'_M(x') m &= \langle m, \iota'_M x' \rangle_M = \langle \iota_M m, x' \rangle_X = \langle m, x' \rangle_X = x'(m) = x'|_M(m) \\ &= (\sigma(x' + M^\perp)) m = (\sigma \circ \pi_{M^\perp}(x')) m. \end{aligned}$$

ad (ii): Für $x \in X$ und $f \in (X/M)'$ gilt

$$\begin{aligned} \pi'_M(f) x &= \langle x, \pi'_M f \rangle_X = \langle \pi_M x, f \rangle_{X/M} = f(\pi_M x) \\ &= \tau(f) x = (\iota_{M^\perp} \circ \tau(f)) x. \end{aligned}$$

□

6.2 Der Satz vom abgeschlossenen Bild

Der folgende Satz zeigt einmal mehr, dass die Vollständigkeit von Banachräumen eine ganz starke Bedingung ist.

6.2.1 Satz (vom abgeschlossenen Bild). *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i) $\text{ran } T$ ist $\|\cdot\|_Y$ -abgeschlossen in Y .
- (ii) $\text{ran } T'$ ist w^* -abgeschlossen in X' .
- (iii) $\text{ran } T'$ ist $\|\cdot\|_{X'}$ -abgeschlossen in X' .

Dabei ist T genau dann bijektiv, wenn T' bijektiv ist.

Die Implikation (ii) \Rightarrow (iii) ist wegen $\sigma(X', X) \subseteq \mathcal{T}(\|\cdot\|)$ trivial.

Im Beweis benötigen folgendes Resultat.

6.2.2 Lemma. *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Ist $T' : Y' \rightarrow X'$ injektiv und ist die Bijektion $(T')^{-1} : \text{ran } T' \rightarrow Y'$ beschränkt, dann ist T surjektiv.*

Beweis. Da $(T')^{-1}$ nicht der Nulloperator ist, gilt $c := \|(T')^{-1}\| > 0$. Für $y' \in Y'$ erhalten wir

$$\|y'\| = \|(T')^{-1} T' y'\| \leq c \cdot \|T' y'\|. \quad (6.2.1)$$

Indem wir cT betrachten, können wir $c = 1$ annehmen. Bezüglich der Dualität (Y, Y') gilt (siehe Beispiel 5.4.5)

$$\begin{aligned} T(U_1^X(0))^\circ &= \{y' \in Y' : \text{Re}\langle Tx, y' \rangle \leq 1, x \in U_1^X(0)\} \\ &= \{y' \in Y' : \text{Re}\langle x, T' y' \rangle \leq 1, x \in U_1^X(0)\} \\ &= \{y' \in Y' : T' y' \in U_1^X(0)^\circ\} = (T')^{-1}(K_1^{X'}(0)). \end{aligned}$$

Gemäß (6.2.1) folgt aus $T' y' \in K_1^{X'}(0)$ aber $\|y'\| \leq \|T' y'\| \leq 1$, also $T(U_1^X(0))^\circ = (T')^{-1}(K_1^{X'}(0)) \subseteq K_1^{Y'}(0)$. Zusammen mit Satz 5.3.8 und dem Bipolarsatz, Satz 5.4.6, folgt daraus

$$\overline{T(U_1^X(0))}^{\|\cdot\|} = \overline{T(U_1^X(0))}^{\sigma(X, X')} = {}^\circ(T(U_1^X(0))^\circ) \supseteq {}^\circ K_1^{Y'}(0) = K_1^Y(0).$$

Wegen Lemma 4.3.3 gilt dann sogar $T(U_1^X(0)) \supseteq U_1^Y(0)$ und infolge $T(X) = Y$. \square

Beweis (von Satz 6.2.1). Wir setzen zunächst voraus, dass $\ker T = \{0\}$ und $\overline{\operatorname{ran} T}^{\|\cdot\|} = Y$. Wegen Korollar 6.1.6 ist das zu $\ker T' = \{0\}$ und $\overline{\operatorname{ran} T'}^{\sigma(X', X)} = X'$ äquivalent.

Ist $\operatorname{ran} T$ $\|\cdot\|$ -abgeschlossen, so gilt $\operatorname{ran} T = Y$, womit T bijektiv ist. Wegen dem Satz von der offenen Abbildung, Korollar 4.3.4, ist $T^{-1} : Y \rightarrow X$ beschränkt. Also können wir den Operator $(T^{-1})' \in \mathcal{B}(X', Y')$ betrachten. Wegen $T \circ T^{-1} = \operatorname{id}_Y$, $T^{-1} \circ T = \operatorname{id}_X$, und (6.1.2) haben wir

$$(T^{-1})' \circ T' = \operatorname{id}_{Y'}, \quad T' \circ (T^{-1})' = \operatorname{id}_{X'},$$

womit T' bijektiv ist und $(T')^{-1} = (T^{-1})'$ gilt. Trivialerweise ist dann $\operatorname{ran} T' = X'$ $w*$ -abgeschlossen und infolge $\|\cdot\|_{X'}$ -abgeschlossen.

Ist umgekehrt $\operatorname{ran} T'$ $\|\cdot\|_{X'}$ -abgeschlossen, so ist $T' : Y' \rightarrow \operatorname{ran} T' (\subseteq X')$ bijektiv und nach dem Satz von der offenen Abbildung $(T')^{-1} : \operatorname{ran} T' \rightarrow Y'$ beschränkt. Wegen Lemma 6.2.2 ist T surjektiv und daher $\operatorname{ran} T = Y$ $\|\cdot\|$ -abgeschlossen.

Für den allgemeinen Fall betrachte die Räume $M := \ker T$ und $Z := \overline{\operatorname{ran} T}^{\|\cdot\|}$. Diese sind abgeschlossene Unterräume der Banachräume X und Y . Insbesondere sind X/M und Z ebenfalls Banachräume. Sei $S : X/M \rightarrow Z$ jener lineare Operator, sodass $T = \iota_Z \circ S \circ \pi_M$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \pi_M \downarrow & & \uparrow \iota_Z \\ X/M & \xrightarrow{S} & Z \end{array}$$

Dann ist S stetig und daher beschränkt, vgl. Satz 1.4.1, (FI_3) . Außerdem ist er injektiv und hat dichtes Bild $\operatorname{ran} S = \operatorname{ran} T$ in Z . Also erfüllt S die zusätzlichen Voraussetzungen, die wir oben gemacht haben.

Geht man in diesem Diagramm zu den konjugierten Abbildungen über, so erhält man mit Proposition 6.1.7

$$\begin{array}{ccccc} & & X' & \xleftarrow{T'} & Y' \\ & \iota_{M^\perp} \nearrow & \uparrow \pi'_M & & \downarrow \iota'_Z \\ M^\perp & & (X/M)' & \xleftarrow{S'} & Z' \\ & \tau \searrow & & & \swarrow \sigma \\ & & & & Y'/Z^\perp \\ & & & & \nwarrow \pi_{Z^\perp} \end{array} \quad (6.2.2)$$

Hier ist S' injektiv. Weiters gilt wegen der Surjektivität von $\iota'_Z = \sigma \circ \pi_{Z^\perp}$

$$\pi'_M(\operatorname{ran} S') = \pi'_M \circ S' \circ \iota'_Z(Y') = T'(Y') = \operatorname{ran} T'.$$

Da τ (siehe Proposition 5.4.7) und ι_{M^\perp} isometrisch sind, ist es auch π'_M . Damit ist $\operatorname{ran} S'$ genau dann als normierter Raum vollständig ist, wenn $\operatorname{ran} T'$ es ist.

Da X' und $(X/M)'$ Banachräume sind, ist daher die $\|\cdot\|$ -Abgeschlossenheit von $\text{ran } S'$ in $(X/M)'$ äquivalent zu der von $\text{ran } T'$ in X' .

Nach dem schon behandelten Spezialfall ist $\text{ran } S = \text{ran } T$ genau dann $\|\cdot\|$ -abgeschlossen, wenn $\text{ran } S'$ $\|\cdot\|$ -abgeschlossen ist. Da in dem Fall sogar S' surjektiv ist, gilt sogar (siehe (6.2.2))

$$\text{ran } T' = \pi'_M(\text{ran } S') = \pi'_M((X/M)') = \iota_{M^\perp} \circ \tau((X/M)') = \iota_{M^\perp}(M^\perp) = M^\perp.$$

Als Annihilator ist $\text{ran } T' = M^\perp$ ein $\sigma(X', X)$ -abgeschlossener Unterraum von X' . □

6.3 Das Spektrum

Sei X ein Banachraum. Betrachte $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$. Dann ist $\mathcal{B}(X)$ versehen mit der Operatornorm nicht nur ein Banachraum sondern auch eine Algebra: Für $S, T \in \mathcal{B}(X)$ definiere

$$S \cdot T : \begin{cases} X & \rightarrow X \\ x & \mapsto S(T(x)) \end{cases}$$

Klarerweise ist diese Operation mit den Vektorraumoperationen verträglich, in dem Sinne, dass

$$S(T + R) = ST + SR, \quad (S + T)R = SR + TR, \quad \lambda(ST) = (\lambda S)T = S(\lambda T),$$

und assoziativ,

$$S(TR) = (ST)R.$$

Sie ist auch mit der Norm von $\mathcal{B}(X)$ verträglich, denn es gilt

$$\|(S \cdot T)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\| \cdot \|Tx\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|,$$

also haben wir

$$\|S \cdot T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|.$$

Gemäß der folgenden Definition ist $\mathcal{B}(X)$ versehen mit der Hintereinanderausführung eine sogenannte Banachalgebra. Weil die spektralen Eigenschaften von Elementen $T \in \mathcal{B}(X)$, die uns hier interessieren, nur von der Tatsache abhängen, dass es sich um eine Banachalgebra handelt, wollen wir in diesem Abschnitt diese allgemeineren Objekte studieren.

6.3.1 Definition. Sei $A \neq \{0\}$ ein Vektorraum über \mathbb{R} oder über \mathbb{C} .

(i) Ist A versehen mit einer bilinearen Abbildung

$$A \times A \rightarrow A, \quad (a, b) \mapsto ab,$$

die assoziativ ist, dh.

$$a(bc) = (ab)c \quad \text{für alle } a, b, c \in A,$$

so nennt man A eine *Algebra*.

(ii) Ein $e \in A$ heißt *Einselement* einer Algebra A , falls

$$ae = ea = a \quad \text{für alle } a \in A.$$

(iii) Eine Algebra heißt *kommutativ*, wenn

$$ab = ba \quad \text{für alle } a, b \in A.$$

(iv) Eine *Unteralgebra* B einer Algebra A ist dabei ein linearer Unterraum von A , der unter der Multiplikation abgeschlossen ist.

(v) Ist A versehen mit einer Norm $\|\cdot\|$, sodass

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \text{für alle } a, b \in A,$$

so spricht man von einer *normierten Algebra*. Ist obendrein $(A, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, so spricht man von einer *Banachalgebra*.

(vi) Ist A eine Banachalgebra und $e \in A$ ein Einselement, so heißt selbiges *normiert*, falls $\|e\| = 1$. In dem Fall spricht man von einer Banachalgebra mit Eins.

Wir beschränken uns im folgenden auf Algebren über dem Skalkörper \mathbb{C} . Viele, wenn auch nicht alle, Beispiele und Resultate lassen sich auch für Algebren über \mathbb{R} herleiten.

Eine Algebra ist also nichts anderes als ein *Ring*, der noch zusätzlich eine Vektorraumstruktur hat.

6.3.2 Bemerkung.

(i) Sei A eine Algebra. Ist $a \in A$, so folgt für irgendein $x \in A$, $0a = (x-x)a = (xa) - (xa) = 0 = (ax) - (ax) = a(x-x) = a0$. Also ist immer $0a = a0 = 0$. Wegen $A \neq \{0\}$ kann 0 kein Einselement sein.

(ii) Einselemente, falls vorhanden, sind offensichtlich eindeutig, denn ist auch mit e auch \tilde{e} ein solches, so gilt $e = e\tilde{e} = \tilde{e}$.

(iii) Eine ganz wichtige Eigenschaft von Banachalgebren ist die Stetigkeit der Abbildung $(a, b) \mapsto ab$, wenn man $A \times A$ mit der Maximumsnorm oder mit der Summennorm (dh. mit der Produkttopologie) versieht. Konvergiert nämlich $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$ in $A \times A$, dh.

$$\|(a_n, b_n) - (a, b)\| = \max(\|a_n - a\|, \|b_n - b\|) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

so sind die Folgen (a_n) und (b_n) beschränkt und daher konvergiert auch

$$\|a_n b_n - ab\| = \|a_n(b_n - b) + (a_n - a)b\| \leq \|a_n\| \cdot \|b_n - b\| + \|b\| \cdot \|a_n - a\|$$

gegen Null.

//

Offensichtlich ist $\mathcal{B}(X)$ eine Banachalgebra mit Eins, wobei die identische Abbildung $I : X \rightarrow X$ das Einselement abgibt. $\mathcal{B}(X)$ ist im Allgemeinen aber nicht kommutativ. Es gibt aber noch viele weitere Beispiele.

6.3.3 Beispiel.

- (i) Eine bekannte kommutative Algebra mit Einselement ist $\mathbb{C}[z]$, dh. alle Polynome $p(z) = \alpha_n z^n + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ in einer Variablen mit komplexen Koeffizienten. Die Abbildung $(p, q) \mapsto pq$ ist dabei nichts anderes als die bekannte Polynommultiplikation und das Einselement ist das konstante Polynom 1.
- (ii) Ist X ein topologischer Raum, und bezeichnet $C_b(X, \mathbb{C})$ den Vektorraum aller beschränkten und stetigen komplexwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{t \in X} |f(t)|$, so ist $C_b(X, \mathbb{C})$ bekannterweise ein Banachraum. Betrachtet man nun die Abbildung

$$C_b(X, \mathbb{C}) \times C_b(X, \mathbb{C}) \rightarrow C_b(X, \mathbb{C}), \quad (f, g) \mapsto f \cdot g,$$

also die punktweise Multiplikation, so gilt $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$. Also ist $C_b(X, \mathbb{C})$ eine offensichtlich auch kommutative Banachalgebra.

Schließlich ist die konstante Einsfunktion offensichtlich ein normiertes Einselement.

- (iii) Der Raum $C_0(X, \mathbb{C})$ aller im unendlichen verschwindenden Funktion aus $C_b(X, \mathbb{C})$, dh. jene $f \in C_b(X, \mathbb{C})$, die

$$\forall \epsilon > 0, \exists K \subseteq X \text{ kompakt} : |f(t)| < \epsilon, \forall t \in X \setminus K,$$

erfüllen, ist ein abgeschlossener Unterraum von $C_b(X, \mathbb{C})$. Außerdem gilt $f \cdot g \in C_0(X, \mathbb{C})$, wenn $f, g \in C_0(X, \mathbb{C})$. Also ist $C_0(X, \mathbb{C})$ eine abgeschlossene Unteralgebra und somit für sich selber genommen eine Banachalgebra. Im Allgemeinen hat diese Banachalgebra aber kein Einselement.

- (iv) Der Raum ℓ^∞ aller beschränkten reell- bzw. komplexwertigen Folgen versehen mit der punktweisen Multiplikation ist ebenfalls eine Banachalgebra mit Einselement. In der Tat ist das ein Spezialfall des vorherigen Beispiels, wenn man $X = \mathbb{N}$ versehen mit der diskreten Topologie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nimmt.

//

6.3.4 Definition. Sei A eine Algebra mit Einselement. Ein Element $a \in A$ heißt *invertierbar*, falls es ein $b \in A$ gibt mit $ab = ba = e$. Weiters sei

$$\text{Inv}(A) := \{a \in A : a \text{ ist invertierbar}\}.$$

Für ein $a \in A$ bezeichne

$$\rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda e) \in \text{Inv}(A)\}$$

die *Resolventenmenge* von a und

$$\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda e) \notin \text{Inv}(A)\}$$

das *Spektrum* von a . Für $a - \lambda e$ schreibt man auch kurz $a - \lambda$, und für $\lambda \in \rho(a)$ setzen wir $R_\lambda(a) := (a - \lambda)^{-1}$. Die Abbildung $\lambda \mapsto R_\lambda(a)$ heißt auch kurz die *Resolvente* von a .

6.3.5 *Bemerkung.*

1. Wegen $0a = a0 = 0 \neq e$ ist sicher $0 \notin \text{Inv}(A)$, dh. $\text{Inv}(A) \neq A$.
2. Hat $a \in A$ eine Links- und eine Rechtsinverse, dh. $ca = e = ab$ für gewisse $b, c \in A$, so folgt wegen $c = ce = c(ab) = (ca)b = eb = b$, dass $a \in \text{Inv}(A)$. Insbesondere ist das $b \in A$ mit $ab = ba = e$ eindeutig, wird mit a^{-1} bezeichnet und heißt Inverses von a .
3. Mit dem letzten Punkt überprüft man leicht, dass $(\text{Inv}(A), \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e ist.
4. Für $a \in \text{Inv}(A)$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt sicherlich $\lambda a \in \text{Inv}(A)$ mit $(\lambda a)^{-1} = \frac{1}{\lambda} a^{-1}$.

//

6.3.6 *Bemerkung.* In $\mathcal{B}(X)$ ist ein $T \in \mathcal{B}(X)$ genau dann invertierbar im Sinne von Definition 6.3.4, wenn $\ker T = \{0\}$ und $\text{ran } T = X$ und wenn $T^{-1} : X \rightarrow X$ auch beschränkt ist. Wegen dem Satz von der offenen Abbildung ist die Tatsache, dass $T^{-1} : X \rightarrow X$ beschränkt ist aber automatisch erfüllt, wenn $\ker T = \{0\}$ und $\text{ran } T = X$.

Für $T \in \mathcal{B}(X)$ ist also $\lambda \in \sigma(T)$ genau dann, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$\rightsquigarrow \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}.$$

$$\rightsquigarrow \text{ran}(T - \lambda I) \neq X.$$

Trifft $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ zu, so heißt λ ein *Eigenwert* von T , $\ker(T - \lambda I)$ der *Eigenraum* von T zu λ , und jedes $x \in \ker(T - \lambda I) \setminus \{0\}$ ein *Eigenvektor* von T zu λ . Die Menge aller Eigenwerte bezeichnet man auch als das *Punktspektrum* $\sigma_p(T)$ von T .

Den Rest von $\sigma(T)$ unterteilt man noch in das *stetige Spektrum* $\sigma_c(T)$, welches die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ umfasst, für die $T - \lambda I$ injektiv ist und $\text{ran}(T - \lambda I)$ dicht in X , aber nicht ganz X ist, sowie das *Residualspektrum* $\sigma_r(T)$. Das ist die Menge aller Punkte $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $T - \lambda I$ injektiv ist und $\text{ran}(T - \lambda I) \neq X$. Offenbar gilt mit diesen Bezeichnungen

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \dot{\cup} \sigma_c(T) \dot{\cup} \sigma_r(T).$$

Um die Notation zu vereinfachen, schreibt man oft $T - \lambda$ anstelle von $T - \lambda I$. //

Sei A Algebra mit Einselement. Ist $a \in A$, und ist $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom, $p(z) = \alpha_n z^n + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$, so kann man definieren

$$p(a) := \alpha_n a^n + \dots + \alpha_1 a + \alpha_0 e.$$

Klarerweise ist $p(a)$ wieder ein Element von A .

Betrachte für festes $a \in A$ die Abbildung

$$\phi_a : \begin{cases} \mathbb{C}[z] & \rightarrow A \\ p & \mapsto p(a) \end{cases}$$

Nun sind A und $\mathbb{C}[z]$ Algebren über dem Skalkörper \mathbb{C} . Wie man unmittelbar nachrechnet, ist ϕ_a ein *Algebra Homomorphismus*, dh. eine lineare und mit der

Multiplikation verträgliche Abbildung. Man spricht vom sogenannten *Einsetzungshomomorphismus*.

Insbesondere ist das Bild von ϕ_a eine kommutative Unteralgebra von A .

6.3.7 Satz (Spektralabbildungssatz). *Sei A eine Algebra mit Einselement, und sei $p \in \mathbb{C}[z]$. Dann gilt für $a \in A$*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)),$$

wobei $p(\sigma(a)) := \{p(z) : z \in \sigma(a)\}$ für nicht konstante p und $p(\sigma(a)) := \{\mu\}$, wenn $p(z) = \mu$, wobei $\mu \in \mathbb{C}$.

Insbesondere gilt $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Für konstante Polynome $\mu \in \mathbb{C}$ ist $p(a) = \mu e$ und damit $\sigma(p(a)) = \{\mu\} = p(\sigma(a))$.

Im Folgenden sei $p(z) = \alpha_n z^n + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 \in \mathbb{C}[z]$ nicht konstant, dh. $\alpha_n \neq 0$ und $n \geq 1$.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt nach dem Fundamentalsatz der Algebra

$$p(z) - \lambda = \alpha_n (z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)$$

mit gewissen nicht notwendigerweise verschiedenen, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Diese Zahlen sind offensichtlich die Nullstellen des Polynoms $p(z) - \lambda$, dh. $p^{-1}(\lambda) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Also gilt $\lambda \in p(\sigma(a))$ genau dann, wenn mindestens eines der dazugehörigen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $\sigma(a)$ liegt. Geht man zu den jeweiligen Negationen über, so liegt λ nicht in $p(\sigma(a))$ genau dann, wenn alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) = \rho(a)$ liegen.

Nun gilt

$$p(a) - \lambda = \alpha_n (a - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (a - \lambda_n),$$

wobei es in diesem Produkt nicht auf die Reihenfolge der Faktoren ankommt, da $\phi_a(\mathbb{C}[z])$ ja eine kommutative Unteralgebra von A ist.

Ist $\lambda \notin p(\sigma(a))$ bzw. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \rho(a)$, dh. $a - \lambda_j \in \text{Inv}(A)$, $j = 1, \dots, n$, so folgt aus der Tatsache, dass $\text{Inv}(A)$ eine Gruppe ist, dass auch ihr Produkt und in Folge $p(a) - \lambda$ in $\text{Inv}(A)$ liegt. Also liegt λ nicht in $\sigma(p(a))$.

Liegt umgekehrt λ nicht in $\sigma(p(a))$, dh. $p(a) - \lambda \in \text{Inv}(A)$, so folgt für jedes $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} (a - \lambda_j) [\alpha_n \prod_{k \neq j} (a - \lambda_k) (p(a) - \lambda)^{-1}] \\ = [(p(a) - \lambda)^{-1} \alpha_n \prod_{k \neq j} (a - \lambda_k)] (a - \lambda_j) = e. \end{aligned}$$

Also sind alle $(a - \lambda_j)$ invertierbar, siehe Bemerkung 6.3.5. Also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \rho(a)$ bzw. $\lambda \notin p(\sigma(a))$.

Schließlich folgt $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n$, wenn man das Bewiesene auf $p(z) = z^n$ anwendet. □

6.3.8 Lemma. *Sei A eine Algebra mit Einselement und $a \in \text{Inv}(A)$, dh. $0 \notin \sigma(a)$. Dann gilt $\sigma(a^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}$.*

Beweis. Aus $a^{-1} \in \text{Inv}(A)$ folgt $0 \notin \sigma(a)$. Für $\lambda \neq 0$ gilt wegen der Gruppeneigenschaft von $\text{Inv}(A)$

$$a - \lambda e \in \text{Inv}(A) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\lambda}e - a^{-1}\right) = \frac{1}{\lambda}a^{-1}(a - \lambda e) \in \text{Inv}(A).$$

□

6.3.9 Lemma. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins.*

↪ Für jedes $a \in A$ mit $\|a\| < 1$ gilt $e - a \in \text{Inv}(A)$ mit

$$(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n, \quad (6.3.1)$$

wobei $a^0 := e$ und wobei diese A -wertige Reihe absolut konvergiert.

↪ $\text{Inv}(A)$ ist eine offene Teilmenge von A . Genauer gilt für $a \in \text{Inv}(A)$, dass auch

$$U_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \text{Inv}(A). \quad (6.3.2)$$

↪ Die Abbildung $a \mapsto a^{-1}$ bildet $\text{Inv}(A)$ bijektiv und stetig auf $\text{Inv}(A)$ ab.

Beweis.

↪ Wegen $\|a^n\| \leq \|a\|^n$ und $\|a\| < 1$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1-\|a\|}$. Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ absolut. Da $c \mapsto bc$ für jedes feste $b \in A$ stetig ist (siehe Bemerkung 6.3.2) folgt

$$a \sum_{n=0}^{\infty} a^n = a \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a^n = \lim_{N \rightarrow \infty} a \sum_{n=0}^N a^n = \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - e,$$

und somit $e = (e - a) \sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Genauso zeigt man $e = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (e - a)$.

↪ Ist $a \in \text{Inv}(A)$ und $\|b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, so gilt $a - b = a(e - a^{-1}b)$, wobei $\|a^{-1}b\| < \|a^{-1}\| \cdot \frac{1}{\|a^{-1}\|} = 1$. Also existiert $(e - a^{-1}b)^{-1}$, wobei

$$(a - b)^{-1} = (e - a^{-1}b)^{-1} a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}b)^n a^{-1} \quad (6.3.3)$$

im Sinne der absoluten Konvergenz. Somit gilt $a + U_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(0) = U_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \text{Inv}(A)$. Insgesamt ist daher $\text{Inv}(A)$ offen.

↪ Aus (6.3.3) folgt für $a \in \text{Inv}(A)$ und $\|b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$

$$\begin{aligned} \|(a - b)^{-1} - a^{-1}\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}b)^n a^{-1} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|(a^{-1}b)^n a^{-1}\| \\ &\leq \|a^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|a^{-1}b\|^n = \frac{\|a^{-1}\| \cdot \|a^{-1}b\|}{1 - \|a^{-1}b\|} \\ &\leq \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \|a^{-1}\| \|b\|} \cdot \|b\|, \end{aligned}$$

wobei $\|a^{-1}b\| \leq \|a^{-1}\| \|b\| < 1$. Diese Abschätzung zeigt, dass aus $b_n \rightarrow 0$ folgt, dass $(a - b_n)^{-1} \rightarrow a^{-1}$. Also ist $a \mapsto a^{-1}$ stetig.

□

6.3.10 Lemma. Sei A eine Banachalgebra mit Eins und $a \in A$.

\rightsquigarrow $\rho(a)$ ist offen und $\sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Genauer gilt $\sigma(a) \subseteq K_{\|a\|}(0)$.

\rightsquigarrow Lokal um jedes $\mu \in \rho(a)$ ist die Funktion $\lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1} = R_\lambda(a)$ in eine A -wertige Potenzreihe entwickelbar. Genauer gilt, dass $U_{\frac{1}{\|R_\mu(a)\|}}(\mu) \subseteq \rho(a)$ bzw. äquivalent dazu

$$\|R_\mu(a)\| \geq \frac{1}{\text{dist}(\mu, \sigma(a))}, \quad \mu \in \rho(a), \quad (6.3.4)$$

und dass für $\lambda \in U_{\frac{1}{\|R_\mu(a)\|}}(\mu)$

$$R_\lambda(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R_\mu(a)^{n+1} \quad (6.3.5)$$

im Sinne der absoluten Konvergenz in A .

\rightsquigarrow Es gilt die Resolventengleichung

$$R_\lambda(a) - R_\mu(a) = (\lambda - \mu)R_\lambda(a)R_\mu(a), \quad \lambda, \mu \in \rho(a).$$

\rightsquigarrow Schließlich gilt für $0 < |\zeta| < \frac{1}{\|a\|}$

$$R_{\frac{1}{\zeta}}(a) = \left(a - \frac{1}{\zeta}e\right)^{-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1} a^n \quad (6.3.6)$$

im Sinne der absoluten Konvergenz, und damit $\lim_{|\mu| \rightarrow +\infty} \|R_\mu(a)\| = 0$

Beweis.

\rightsquigarrow Die Abbildung $\lambda \mapsto a - \lambda e$ ist eine stetige Funktion von \mathbb{C} nach A . Nun ist $\rho(a)$ gerade das Urbild von $\text{Inv}(A)$ unter dieser Abbildung und daher offen. $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ ist somit abgeschlossen.

Aus $|\lambda| > \|a\|$ folgt wegen $\|\frac{1}{\lambda}a\| < 1$ die Invertierbarkeit von $a - \lambda e = -\lambda(e - \frac{1}{\lambda}a)$, dh. $\sigma(a) \subseteq K_{\|a\|}(0)$.

\rightsquigarrow Sei $\mu \in \rho(a)$. Für $\lambda \in U_{\frac{1}{\|R_\mu(a)\|}}(\mu)$ gilt $\|(a - \lambda e) - (a - \mu e)\| = |\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R_\mu(a)\|}$. Wegen (6.3.2) ist $\lambda \in \rho(a)$, wobei wegen (6.3.3)

$$R_\lambda(a) = \left((a - \mu e) - [(a - \mu e) - (a - \lambda e)]\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n (a - \mu e)^{-n-1}$$

im Sinne der absoluten Konvergenz.

↪ Für $\mu, \lambda \in \rho(a)$ gilt

$$\begin{aligned} R_\lambda(a) - R_\mu(a) &= R_\lambda(a)(e - (a - \lambda e)R_\mu(a)) \\ &= R_\lambda(a)((a - \mu e) - (a - \lambda e))R_\mu(a) = (\lambda - \mu)R_\lambda(a)R_\mu(a). \end{aligned}$$

↪ Für $|\zeta| < \frac{1}{\|a\|}$ gilt sicher $\frac{1}{\zeta} \in \rho(a)$, wobei mit (6.3.1)

$$\left(\frac{1}{\zeta}e - a\right)^{-1} = \zeta(e - \zeta a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1} a^n,$$

im Sinne der absoluten Konvergenz. Da Grenzfunktionen von Potenzreihen mit Konvergenzradius R stetig auf $U_R(0)$ sind, gilt $\lim_{|\mu| \rightarrow +\infty} \|R_\mu(a)\| = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \|R_{\frac{1}{\zeta}}(a)\| = 0$.

□

Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und X ein Banachraum, so heißt eine Funktion $\varphi : G \rightarrow X$ *analytisch*, wenn sie lokal um jeden Punkt $\mu \in G$ in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann. Insbesondere ist die Funktion $\lambda \mapsto R_\lambda(a) = (a - \lambda e)^{-1}$ auf $\rho(a)$ gemäß Lemma 6.3.10 analytisch.

Für analytische Funktionen mit Werten in \mathbb{C} gelten folgende Resultate, die wir aber nicht beweisen wollen. Der interessierte Student sei auf die entsprechende Fachliteratur, z.B. [Co], oder auf eine entsprechende Vorlesung verwiesen.

6.3.11 Satz. Sei $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Ist $H = \{\frac{1}{z} : z \in G \setminus \{0\}\}$, so ist die Abbildung $z \mapsto \varphi(\frac{1}{z})$ auf H ebenfalls analytisch.

6.3.12 Satz. Sei $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und sei $z_0 \in G$. Dann sind die Koeffizienten der Potenzreihe, in die φ lokal um z_0 entwickelbar ist, dh.

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $z \in U_r(z_0)$ für ein hinreichend kleines $r > 0$, eindeutig durch $\varphi|_{U_r(z_0)}$ bestimmt. Zudem konvergiert diese Potenzreihe absolut sogar auf dem größten Kreis $U_R(z_0)$, der noch in G enthalten ist, und stimmt dort mit φ überein. Insbesondere ist

$$R = \sup\{\rho \in (0, +\infty) : U_\rho(z_0) \subseteq G\} \leq \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

6.3.13 Satz (von Liouville). Sei $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Ist φ beschränkt, so muss φ sogar konstant sein.

Wir haben in Lemma 6.3.10 gesehen, dass das Spektrum ganz im abgeschlossenen Kreis um 0 mit Radius $\|a\|$ liegen muss. Im Allgemeinen kann $\sigma(a)$ aber wesentlich kleiner sein. Wir definieren den *Spektralradius* $r(a)$ als

$$r(a) := \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Es ist eine wichtige Feststellung, dass sich diese algebraische Größe mit Hilfe der analytischen Größe $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ ausdrücken lässt.

6.3.14 Satz. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins und $a \in A$. Dann gilt immer $\sigma(a) \neq \emptyset$ und*

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Beweis. Mit $\lambda \mapsto R_\lambda(a)$ ist für jedes f aus dem topologischen Dualraum A' von A auch die Funktion $\varphi : \rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(\lambda) = f(R_\lambda(a))$ analytisch, wie unmittelbar aus der Linearität und Stetigkeit von f und (6.3.5) folgt, vgl. (6.3.7).

Im Falle $\sigma(a) = \emptyset$ wäre φ auf \mathbb{C} analytisch. Zudem folgt aus $\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \|R_\lambda(a)\| = 0$ (siehe unmittelbar nach (6.3.6)), dass auch $\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda) = 0$.

Da stetige Funktionen beschränkt auf Kompakta sind, folgt damit die Beschränktheit der Funktion φ . Wegen Satz 6.3.13 zusammen mit $\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda) = 0$ folgt $\varphi(\lambda) = f(R_\lambda(a)) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Da f beliebig war, muss wegen der Folgerung, Korollar 5.2.7, des Satzes von Hahn-Banach $(a - \lambda e)^{-1} = R_\lambda(a) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten. Wegen $0 \notin \text{Inv}(A)$ ist das aber ein Widerspruch.

Um $r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ zu beweisen, stellen wir zunächst fest, dass wegen Satz 6.3.7 die Beziehungen $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n$ und damit

$$r(a^n) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a^n)\} = \sup\{|\lambda|^n : \lambda \in \sigma(a)\} = r(a)^n$$

gelten. Die aus Lemma 6.3.10 bekannte Tatsache, dass $r(a) \leq \|a\|$, angewandt auf a^n ergibt dann $r(a) = r(a^n)^{\frac{1}{n}} \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Also muss

$$r(a) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Es bleibt $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$ zu zeigen. Dafür sei wieder $f \in A'$ beliebig und $\varphi : \rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(\lambda) = f(R_\lambda(a))$. Wegen Satz 6.3.11 ist $h : \zeta \mapsto \varphi(\frac{1}{\zeta})$ auf

$$D := \left\{ \frac{1}{z} : z \in \rho(a) \setminus \{0\} \right\}$$

analytisch. Aus $\sigma(a) = \rho(a)^c \subseteq K_{r(a)}(0)$ folgt $D \supseteq U_{\frac{1}{r(a)}}(0) \setminus \{0\}$.

Für $\zeta \in U_{\frac{1}{\|a\|}}(0) \setminus \{0\}$ ($\subseteq U_{\frac{1}{r(a)}}(0) \setminus \{0\}$) folgt aus (6.3.6) wegen der Linearität und Stetigkeit f die Darstellung

$$h(\zeta) = f(R_{\frac{1}{\zeta}}(a)) = f\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1} a^n\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1} f(a^n), \quad (6.3.7)$$

wobei diese Reihe absolut konvergiert. Insbesondere können wir h auf die Menge $D \cup \{0\} \supseteq U_{\frac{1}{r(a)}}(0)$ analytisch fortsetzen, indem man $h(0) = 0$ setzt.

Aus Satz 6.3.12 folgt nun, dass die Reihe in (6.3.7) sogar auf $U_{\frac{1}{r(a)}}(0)$ konvergiert. Da die Koeffizientenfolge dann sicher eine Nullfolge ist, folgt für festes $|\zeta| < \frac{1}{r(a)}$, dass

$$|f(\zeta^{n+1} a^n)| \leq C_f, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Nun ist für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ aber $\psi_n : f \mapsto f(\zeta^{n+1} a^n)$ ein durch

$$\|\psi_n\| = \|\zeta^{n+1} a^n\| = |\zeta|^{n+1} \|a^n\|$$

beschränktes lineares Funktional auf A' ; also $\psi_n = \iota(\zeta^{n+1}a^n) \in A''$ wie in Lemma 5.5.2. Obige Abschätzung besagt, dass diese Folge von beschränkten linearen Funktionalen punktweise beschränkt ist.

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus folgt $\|\psi_n\| \leq C$ mit einem $C > 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Daraus schließen wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C^{\frac{1}{n}} \frac{1}{|\zeta|^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{|\zeta|}.$$

Da $|\zeta| < \frac{1}{r(a)}$ beliebig war, gilt sogar $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$. □

6.3.15 Beispiel. Sei μ ein σ -endliches Maß auf der Menge Ω versehen mit einer σ -Algebra \mathcal{A} , sei $\phi \in L^\infty(\mu)$, und $1 < p < \infty$. Für die lineare Abbildung $M_\phi : L^p(\mu) \rightarrow L^p(\mu)$ wie in Beispiel 6.1.3 wollen wir zeigen, dass

$$\rho(M_\phi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{esssup}_{x \in \Omega} (-|\phi - \lambda|) < 0\}. \quad (6.3.8)$$

Die Tatsache, dass $\text{esssup}_{x \in \Omega} (-|\phi - \lambda|) < 0$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{C}$, bedeutet gerade, dass $|\phi - \lambda| \geq c$, μ -fast überall für ein festes $c > 0$.

Also gilt für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{esssup}_{x \in \Omega} (-|\phi - \lambda|) < 0$, dass $(\phi - \lambda)^{-1} \in L^\infty(\mu)$. Offenbar gilt dann $(M_\phi - \lambda)M_{(\phi - \lambda)^{-1}} = M_{(\phi - \lambda)^{-1}}(M_\phi - \lambda) = I$, also ist $\lambda \in \rho(M_\phi)$ und

$$(M_\phi - \lambda)^{-1} = M_{(\phi - \lambda)^{-1}}.$$

Sei umgekehrt angenommen, dass $\text{esssup}_{x \in \Omega} (-|\phi - \lambda|) = 0$. Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Menge Δ_n mit $\mu(\Delta_n) > 0$ sodass $|\phi(x) - \lambda| \leq \frac{1}{n}$, $x \in \Delta_n$. Da μ σ -endlich ist, können wir Δ_n so wählen, dass zusätzlich $\mu(\Delta_n) < \infty$. Setze $f_n := \mu(\Delta_n)^{-\frac{1}{p}} \chi_{\Delta_n}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|f_n\|_p^p &= \int_{\Omega} |f_n|^p d\mu = \frac{1}{\mu(\Delta_n)} \int_{\Omega} \chi_{\Delta_n} d\mu = 1, \\ \|(M_\phi - \lambda)f_n\|_p^p &= \int_{\Omega} |\phi - \lambda|^p \cdot |f_n|^p d\mu \leq \frac{1}{n^p}. \end{aligned}$$

Wir schließen, dass $(M_\phi - \lambda)$ nicht invertierbar in $\mathcal{B}(L^p(\mu))$ ist. Insgesamt folgt (6.3.8). Als nächstes wollen wir zeigen, dass

$$\sigma_p(M_\phi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu(\phi^{-1}(\{\lambda\})) > 0\}.$$

Gehört λ zu dieser Menge, so wähle $\Delta \subseteq \phi^{-1}(\{\lambda\})$ mit $0 < \mu(\Delta) < \infty$. Dann gilt $(M_\phi - \lambda)\chi_\Delta = 0$ aber $\chi_\Delta \in L^p(\mu) \setminus \{0\}$. Ist umgekehrt $(M_\phi - \lambda)f = 0$, und ist $\Delta \subseteq \Omega$ eine Menge mit $\mu(\Delta) > 0$ und $f(x) \neq 0$, $x \in \Delta$, so folgt $\phi(x) - \lambda = 0$, $x \in \Delta$.

Wir wollen schließlich anmerken, dass für jeden Punkt $\lambda \in \sigma(M_\phi) \setminus \sigma_p(M_\phi)$ das Bild $\text{ran}(M_\phi - \lambda)$ dicht in $L^p(\mu)$ liegt. Um dies einzusehen, sei $\lambda \notin \sigma_p(M_\phi)$ gegeben, und sei $1 < q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $\mu(\phi^{-1}(\{\lambda\})) = 0$.

Betrachten wir jetzt M_ϕ als Operator in $\mathcal{B}(L^q(\mu))$, so folgt auch $\lambda \notin \sigma_p(M_\phi)$, womit $\{f \in L^q(\mu) : (M_\phi - \lambda)f = 0\} = \{0\}$. Gemäß Beispiel 6.1.4 ist $M_\phi \in \mathcal{B}(L^q(\mu))$ bis auf Isomorphie gerade die Konjugierte von $M_\phi \in \mathcal{B}(L^p(\mu))$. Nach Korollar 6.1.6, (ii), ist das Bild von $(M_\phi - \lambda) \in \mathcal{B}(L^p(\mu))$ dicht in $L^p(\mu)$. Somit haben wir $\sigma_c(M_\phi) = \sigma(M_\phi) \setminus \sigma_p(M_\phi)$ und $\sigma_r(M_\phi) = \emptyset$. //

6.3.16 Beispiel. Sei K ein kompakter Hausdorff-Raum, und $\phi \in C(K)$. Dann können wir den Multiplikationsoperator M_ϕ auch als Operator in $\mathcal{B}(C(K))$ betrachten. Als erstes zeigen wir

$$\sigma(M_\phi) = \phi(K). \quad (6.3.9)$$

Genauso wie im letzten Beispiel erhält man, dass $\phi(K)^c \subseteq \rho(M_\phi)$; es ist nämlich

$$(M_\phi - \lambda)^{-1} = M_{(\phi - \lambda)^{-1}}, \quad \lambda \notin \phi(K).$$

Für die umgekehrte Inklusion konstruieren wir wieder eine Folge f_n mit $\|f_n\| = 1$ aber $\|(M_\phi - \lambda)f_n\| \leq \frac{1}{n}$. Sei also $\lambda \in \phi(K)$ gegeben, und schreibe $\lambda = \phi(x_0)$. Da ϕ stetig ist, existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine offene Umgebung O_n von x_0 sodass $|\phi(x) - \lambda| < \frac{1}{n}$, $x \in O_n$. Da K kompakt und damit auch regulär ist, bilden die abgeschlossenen Umgebungen von x_0 eine Umgebungsbasis. Wir finden also eine abgeschlossene Umgebung A_n von x_0 mit $O_n \supseteq A_n$. Nach dem Lemma von Urysohn existiert eine Funktion $f_n \in C(K)$ mit $0 \leq f_n \leq 1$, $f_n(A_n) = 1$, und $f_n(O_n^c) = 0$. Diese hat offenbar die gewünschte Eigenschaft. Damit haben wir (6.3.9) bewiesen. Als nächstes zeigen wir

$$\sigma_p(M_\phi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\phi^{-1}(\{\lambda\}))^\circ \neq \emptyset\}.$$

Einerseits, hat man $f \in \ker(M_\phi - \lambda) \setminus \{0\}$, so muss $\phi(x) - \lambda = 0$ gelten für alle $x \in \text{supp}(f)$. Diese Menge ist aber offen und nichtleer. Hat umgekehrt $\phi^{-1}(\{\lambda\})$ nichtleeres Inneres, so konstruiert wieder mit Hilfe des Lemmas von Urysohn eine stetige Eigenfunktion.

Weiters ist für $\lambda \in \sigma(M_\phi)$ und damit $\lambda = \phi(x)$ der Bildraum $\text{ran}(M_\phi - \lambda) = \{f \cdot (\phi - \phi(x)) : f \in C(K)\}$ im abgeschlossenen Kern des stetigen linearen Funktional $f \mapsto f(x)$ enthalten und somit nie dicht. Wir haben also $\sigma_c(M_\phi) = \emptyset$ und $\sigma_r(M_\phi) = \sigma(M_\phi) \setminus \sigma_p(M_\phi)$.

An diesem Beispiel lässt sich auch der Spektralabbildungssatz einfach illustrieren. Denn für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ gilt offenbar $p(M_\phi) = M_{p \circ \phi}$, und daher

$$\sigma(p(M_\phi)) = (p \circ \phi)(K) = p(\sigma(M_\phi)).$$

Weiters haben wir

$$r(M_\phi) = \max_{x \in K} |\phi(x)| = \|M_\phi\|.$$

//

6.4 Kompakte Operatoren

Ehe wir die Definition eines kompakten Operators geben, wollen wir daran erinnern, wie sich die Kompaktheit einer Teilmenge eines metrischen Raumes charakterisieren lässt.

6.4.1 Bemerkung. Für eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (M, d) sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) K ist kompakt.

- (ii) Jede Folge in K hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K .
- (iii) $(K, d|_{K \times K})$ ist ein vollständiger metrischer Raum und K ist total beschränkt.

Dabei bedeutet die totale Beschränktheit einer Teilmenge $B \subseteq M$, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele $x_1, \dots, x_n \in M$ gibt, sodass $B \subseteq U_\epsilon(x_1) \cup \dots \cup U_\epsilon(x_n)$.

Für den Abschluss einer Teilmenge A eines metrischen Raumes (M, d) sind daher folgende Aussagen äquivalent.

- (a) A ist in M relativ kompakt, dh. \overline{A} ist kompakt.
- (b) Jede Folge in A hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M .
- (c) $(\overline{A}, d|_{\overline{A} \times \overline{A}})$ ist ein vollständiger metrischer Raum und A ist total beschränkt.

Falls M vollständig ist, so kann man offensichtlich die erste Bedingung in (c) weglassen.

Die Aussagen über die Abschlüsse von A folgen unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen über K , wenn man bemerkt, dass der Abschluss und auch jede Teilmenge einer total beschränkten Menge wieder total beschränkt ist, und weil es zu jeder Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \overline{A} eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus A gibt mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, womit für jede Teilfolge von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert aus M die entsprechende Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls denselben Grenzwert hat, welcher offenbar in \overline{A} liegt. //

6.4.2 Definition. Seien X, Y Banachräume. Dann heißt eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ *kompakter Operator*, wenn $T(K_1^X(0))$ in Y relativ kompakt ist, daher wenn

$$\overline{T(K_1^X(0))}$$

in Y kompakt ist.

Da jede kompakte Teilmenge eines normierten Raumes beschränkt ist (sogar total beschränkt), liegt jeder kompakte Operator in $\mathcal{B}(X, Y)$. Die Menge aller kompakten Operatoren in $\mathcal{B}(X, Y)$ bezeichnet man auch mit $\mathcal{K}(X, Y)$.

6.4.3 Bemerkung. Da das Multiplizieren mit einer festen komplexen Zahl ungleich Null ein Homöomorphismus ist, und da abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen wieder kompakt sind, folgt, dass die Kompaktheit von $\overline{T(K_1^X(0))}$ zu der von $\overline{T(K_\delta^X(0))}$ bzw. $\overline{T(U_\delta^X(0))}$ für nur ein $\delta > 0$ äquivalent ist. //

Kompakte Operatoren sind unter allen beschränkten Operatoren auf einem unendlichdimensionalen Banachraum jene, deren Eigenschaften jenen von Operatoren auf endlichdimensionalen Räumen – sprich Matrizen aus der linearen Algebra – am nächsten kommen.

6.4.4 Proposition. Für Banachräume X, Y, Z gilt:

- (i) Jedes $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ mit $\dim \operatorname{ran} T < \infty$ ist kompakt.

- (ii) Falls für $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ der Bildbereich $\text{ran } T$ abgeschlossen ist, so muss $\dim \text{ran } T < \infty$.
- (iii) Die Menge $\mathcal{K}(X, Y)$ der kompakten Operatoren in $\mathcal{B}(X, Y)$ ist ein bezüglich der Operatornorm abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathcal{B}(X, Y)$.
- (iv) Für $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ und $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ ist ST kompakt, wenn mindestens einer der beiden Operatoren S, T kompakt ist.

Beweis.

ad (i): Wegen $\dim \text{ran } T < \infty$ ist $\text{ran } T$ algebraisch und topologisch isomorph zu $\mathbb{C}^{\dim \text{ran } T}$, vgl. Satz 2.2.1. Insbesondere hat die beschränkte Menge $T(K_1^X(0))$ einen kompakten Abschluss $\overline{T(K_1^X(0))}^{\text{ran } T}$ in $\text{ran } T$. Nach Satz 2.2.1 ist $\text{ran } T$ in Y abgeschlossen, womit $\overline{T(K_1^X(0))}^{\text{ran } T} = \overline{T(K_1^X(0))}^Y$.

ad (ii): Als abgeschlossener Unterraum von Y ist $\text{ran } T$ ein Banachraum. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $T : X \rightarrow \text{ran } T$ offen. Also ist $\overline{T(K_1^X(0))}$ eine kompakte Umgebung der 0 in $\text{ran } T$. Nach Proposition 2.2.4 folgt dann $\dim \text{ran } T < \infty$.

ad (iii): Die algebraischen Operationen sind stetig, also ist das Bild der kompakten Menge $\overline{S(K_1^X(0))} \times \overline{T(K_1^X(0))}$ unter $+$ wieder kompakt, wodurch auch

$$\overline{(S+T)(K_1^X(0))} \subseteq \overline{S(K_1^X(0))} + \overline{T(K_1^X(0))}$$

kompakt ist. Zusammen mit $\overline{(\lambda T)(K_1^X(0))} = \lambda \overline{T(K_1^X(0))}$ erhalten wir die Kompaktheit von $S+T$ und λT . Somit ist die Menge der kompakten Operatoren ein linearer Unterraum von $\mathcal{B}(X, Y)$.

Sei $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ im Abschluss von $\mathcal{K}(X, Y)$. Zu jedem $r > 0$ existiert dann ein $S \in \mathcal{K}(X, Y)$ mit $\|S - T\| < r$. Da die Menge $S(K_1^X(0))$ total beschränkt ist, existieren $x_1, \dots, x_n \in K_1^X(0)$, sodass

$$S(K_1^X(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_r^Y(S(x_i)).$$

Da $\|Tx - Sx\| < r$ für $x \in K_1^X(0)$, folgt

$$T(K_1^X(0)) \subseteq S(K_1^X(0)) + U_r^Y(0) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{2r}^Y(S(x_i)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{3r}^Y(T(x_i)).$$

Also ist $T(K_1^X(0))$ total beschränkt und daher $\overline{T(K_1^X(0))}$ kompakt.

ad (iv): Für kompaktes T ist mit $\overline{T(K_1^X(0))}$ auch $S(\overline{T(K_1^X(0))})$ kompakt, und somit auch

$$\overline{S(\overline{T(K_1^X(0))})} \subseteq S(\overline{T(K_1^X(0))}).$$

Für kompaktes S ist wegen

$$\overline{S(\overline{T(K_1^X(0))})} \subseteq \overline{S(\|T\|K_1^Y(0))} = \overline{\|T\|S(K_1^Y(0))} = \|T\| \overline{S(K_1^Y(0))}$$

und der Tatsache, dass Multiplizieren mit $\|T\|$ stetig ist, auch ST kompakt.

□

6.4.5 Bemerkung. Ist $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ kompakt und $M \subseteq X$ abgeschlossen, so ist die Einbettung $\iota : M \rightarrow X$, $x \mapsto x$ offensichtlich stetig. Aus Proposition 6.4.4, (iv), folgt, dass $T|_M = T \circ \iota : M \rightarrow Y$ auch kompakt ist //

6.4.6 Bemerkung. Wir sehen, dass $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X)$ ein von $\{0\}$ verschiedenes Ideal von $\mathcal{B}(X)$ ist. Für $\dim X = \infty$ gilt $\mathcal{K}(X) \neq \mathcal{B}(X)$, da I sicher nicht kompakt ist. Wegen Proposition 6.4.4 ist $\mathcal{K}(X)$ in $\mathcal{B}(X)$ Norm-abgeschlossen.

Ist $X = H$ ein separabler Hilbertraum, so kann man zeigen, dass tatsächlich $\mathcal{K}(X)$ das einzige echte Norm-abgeschlossene Ideal von $\mathcal{B}(H)$ ist. //

6.4.7 Satz. Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann ist T genau dann kompakt, wenn $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$ kompakt ist.

Beweis. Sei T kompakt. Setzen wir

$$\Phi := \{y' |_{\overline{T(K_1^X(0))}} : y' \in Y', \|y'\| \leq 1\},$$

so ist $\Phi \subseteq C(\overline{T(K_1^X(0))}, \mathbb{C})$, wobei $\overline{T(K_1^X(0))} (\subseteq Y)$ versehen mit der von $\|\cdot\|$ induzierten Topologie kompakt ist, und $C(\overline{T(K_1^X(0))}, \mathbb{C})$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum ist.

Wegen $|y' |_{\overline{T(K_1^X(0))}}(y)| \leq \|y\|$ für alle $y' |_{\overline{T(K_1^X(0))}} \in \Phi$ und $y \in \overline{T(K_1^X(0))}$ ist die Menge Φ von Funktionen punktweise beschränkt, und wegen

$$|y' |_{\overline{T(K_1^X(0))}}(y_1) - y' |_{\overline{T(K_1^X(0))}}(y_2)| = |y'(y_1 - y_2)| \leq \|y_1 - y_2\|$$

für $y_1, y_2 \in \overline{T(K_1^X(0))}$ und $y' |_{\overline{T(K_1^X(0))}} \in \Phi$ ist sie auch gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzela–Ascoli ist Φ total beschränkt. Somit gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ Punkte $y'_1, \dots, y'_n \in Y'$ mit $\|y'_j\| \leq 1$, sodass

$$\Phi \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_\epsilon^{\|\cdot\|_\infty}(y'_j |_{\overline{T(K_1^X(0))}}).$$

Ist nun $y' \in Y'$, $\|y'\| \leq 1$ und $j \in \{1, \dots, n\}$, sodass $y' |_{\overline{T(K_1^X(0))}} \in U_\epsilon^{\|\cdot\|_\infty}(y'_j |_{\overline{T(K_1^X(0))}})$, so gilt auch

$$\begin{aligned} \|T'y'_j - T'y'\| &= \sup_{x \in K_1^X(0)} |\langle x, T'(y'_j - y') \rangle| = \sup_{x \in K_1^X(0)} |\langle Tx, y'_j - y' \rangle| \\ &= \sup_{x \in K_1^X(0)} |y'_j |_{\overline{T(K_1^X(0))}}(Tx) - y' |_{\overline{T(K_1^X(0))}}(Tx)| \\ &\leq \|y'_j |_{\overline{T(K_1^X(0))}} - y' |_{\overline{T(K_1^X(0))}}\|_\infty < \epsilon. \end{aligned}$$

Also ist auch $\{T'y' : y' \in Y', \|y'\| \leq 1\} = T'(K_1^{Y'}(0))$ eine total beschränkte Teilmenge von X' und damit T' kompakt.

Für die Umkehrung seien zunächst $\iota_X : X \rightarrow X''$, $\iota_Y : Y \rightarrow Y''$ die kanonischen Einbettungen wie in Lemma 5.5.2. Dann gilt für $x \in X$, $y' \in Y'$ stets

$$\langle y', \iota_Y T x \rangle_{Y'} = \langle T x, y' \rangle_Y = \langle x, T' y' \rangle_X = \langle T' y', \iota_X x \rangle_{X'} = \langle y', T'' \iota_X x \rangle_{Y'},$$

womit $\iota_Y T = T'' \iota_X$. Da die kanonischen Einbettungen immer Isometrien sind, folgt

$$\iota_Y T(K_1^X(0)) \subseteq T''(K_1^{X''}(0)).$$

Für kompaktes T' folgt nach dem ersten Teil des Beweises die Kompaktheit von T'' . Insbesondere ist $T''(K_1^{X''}(0))$ total beschränkt und damit auch seine Teilmenge $\iota_Y T(K_1^X(0))$. Da Isometrien diese Eigenschaft erhalten, ist auch $T(K_1^X(0))$ total beschränkt und damit T kompakt. \square

6.4.8 Proposition. *Sei X Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt $\dim \ker(T - \lambda I) < \infty$, und $\text{ran}(T - \lambda I)$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Wegen der Stetigkeit von $T - \lambda I$ ist $Y := \ker(T - \lambda I) (\subseteq X)$ abgeschlossen und daher ein Banachraum. Der Operator $T|_Y = \lambda I|_Y : Y \rightarrow Y$ ist bijektiv und kompakt. Aus Proposition 6.4.4, (ii), schließen wir $\dim Y < \infty$.

Wegen $\dim \ker(T - \lambda I) < \infty$ existiert gemäß Proposition 5.2.8 ein abgeschlossener Unterraum M von X mit

$$\ker(T - \lambda I) \dot{+} M = X.$$

Die Abbildung $S := (T - \lambda I)|_M : M \rightarrow X$ ist dann beschränkt, injektiv, und es gilt $\text{ran } S = \text{ran}(T - \lambda I)$. Um zu zeigen, dass $\text{ran } S$ in X abgeschlossen ist, genügt es nach Lemma 4.3.6 eine Zahl $r > 0$ zu finden, sodass

$$r\|x\| \leq \|Sx\|, \quad x \in M. \quad (6.4.1)$$

Angenommen, (6.4.1) ist für jedes $r > 0$ falsch, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in M$, mit $\|x_n\| = 1$, $Sx_n \rightarrow 0$. Nun ist $\overline{T(K_1^X(0))}$ kompakt. Geht man nötigenfalls zu einer Teilfolge über, so kann man also erreichen, dass $Tx_n \rightarrow x_0$ für ein gewisses $x_0 \in X$. Es folgt $\lambda x_n = (T - S)x_n \rightarrow x_0$, womit $x_0 \in M$. Nun ergibt

$$Sx_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\lambda x_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = 0.$$

zusammen mit der Injektivität von S die Tatsache $x_0 = 0$, welche aber $\|x_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda x_n\| = |\lambda| \neq 0$ widerspricht. \square

Im Allgemeinen kann man über die Gestalt des Spektrums nicht mehr sagen, außer, dass $\sigma(T)$ kompakt und nichtleer ist. Für einen kompakten Operator T gilt aber viel mehr, vgl. die Zusammenfassung 6.4.12.

Wir benötigen ein geometrisches Lemma.

6.4.9 Lemma. *Sei X normierter Raum und M ein linearer Unterraum mit $\overline{M} \neq X$. Ist $r > 1$, so existiert $x \in X$ mit*

$$\|x\| < r \text{ aber } \|x - y\| \geq 1 \text{ für alle } y \in M.$$

Beweis. Sei $x_1 \in X$ mit $\|x_1 + \overline{M}\|_{X/\overline{M}} = 1$, also

$$\inf \{\|x_1 - y\| : y \in M\} = \inf \{\|x_1 - y\| : y \in \overline{M}\} = 1.$$

Wähle $y_1 \in M$ mit $\|x_1 - y_1\| < r$ und setze $x := x_1 - y_1$. □

Die folgende Aussage beinhaltet einen Teil des Hauptsatzes dieses Abschnittes über die Struktur von $\sigma(T)$.

6.4.10 Proposition. *Sei X Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$, $r > 0$, und E eine Menge von Eigenwerten λ von T mit $|\lambda| > r$. Dann gilt:*

(i) *Für jedes $\lambda \in E$ gilt $\text{ran}(T - \lambda I) \neq X$.*

(ii) *E ist endlich.*

Beweis. Angenommen, es wäre (i) oder (ii) falsch. Wir werden dann unten in den jeweiligen Fällen abgeschlossene Unterräume $M_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, und Punkte $\lambda_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, definieren, sodass

$$M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \dots$$

$$T(M_n) \subseteq M_n, \quad n \geq 1,$$

$$(T - \lambda_n I)(M_n) \subseteq M_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Hat man derartige Unterräume bzw. Punkte, so wenden wir Lemma 6.4.9 auf $M_{n-1} \subsetneq M_n$ an. Also gibt es $x_n \in M_n$ mit $\|x_n\| \leq 2$, $\|x_n - y\| \geq 1$ für alle $y \in M_{n-1}$. Für $2 \leq m < n$ liegt

$$z := Tx_m - (T - \lambda_n I)x_n,$$

in M_{n-1} . Also folgt

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|\lambda_n x_n - z\| = |\lambda_n| \cdot \|x_n - \lambda_n^{-1} z\| \geq |\lambda_n| > r > 0.$$

Die Folge $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat also keine konvergente Teilfolge, obwohl $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Das ist ein Widerspruch zur Kompaktheit von T .

Angenommen, (i) ist falsch, sodass also für ein $\lambda_0 \in E$ gilt $\text{ran}(T - \lambda_0 I) = X$. Setze $S := (T - \lambda_0 I)$ und $M_n := \ker S^n$. Da λ_0 ein Eigenwert von T ist, existiert $x_1 \in M_1$, $x_1 \neq 0$. Wegen $\text{ran } S = X$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $Sx_{n+1} = x_n$, $n \geq 1$. Es folgt

$$S^n x_{n+1} = x_1 \neq 0, \quad S^{n+1} x_{n+1} = Sx_1 = 0.$$

Also sind M_n abgeschlossene Unterräume mit $M_n \subsetneq M_{n+1}$. Wegen $TS = ST$ gilt $T(M_n) \subseteq M_n$. Setzt man $\lambda_n := \lambda_0$ für alle n , so gilt trivialerweise auch

$$(T - \lambda_n I)(M_n) = S(M_n) \subseteq M_{n-1}.$$

Sei nun angenommen, (ii) wäre falsch. Dann gibt es eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Eigenwerten. Sei e_n ein Eigenvektor zu λ_n und setze

$$M_n := \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}.$$

Da die λ_n verschieden sind, ist $\dim M_n = n$. Also sind die M_n abgeschlossene (da endlichdimensionale) Unterräume von X mit $M_n \subsetneq M_{n+1}$. Ist $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in M_n$, so folgt

$$Tx = \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n e_n \in M_n,$$

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) e_1 + \dots + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) e_{n-1} \in M_{n-1}.$$

Wir haben also in jedem Fall die M_n und die λ_n konstruiert. \square

6.4.11 Satz. *Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{K}(X)$.*

(i) *Ist $\lambda \neq 0$, so sind die vier Zahlen*

$$\alpha := \dim \ker(T - \lambda I), \quad \beta := \dim \left(X / \operatorname{ran}(T - \lambda I) \right),$$

$$\alpha' := \dim \ker(T' - \lambda I), \quad \beta' := \dim \left(X' / \operatorname{ran}(T' - \lambda I) \right),$$

endlich und sämtliche gleich.

(ii) *Ist $\lambda \neq 0$ und $\lambda \in \sigma(T)$, dann ist λ ein Eigenwert von T und auch von T' .*

(iii) *$\sigma(T)$ ist höchstens abzählbar und hat höchstens einen Häufungspunkt, nämlich 0.*

Beweis. Sei im Folgenden $\lambda \neq 0$ festgehalten, und setze $S := T - \lambda I$. Nach Proposition 6.4.8 ist $\operatorname{ran} S$ abgeschlossen, und es gilt $(\operatorname{ran} S)^\perp = \ker S'$. Also folgt mit Korollar 5.4.8 angewandt auf $(X, \|\cdot\|)$ und $\operatorname{ran} S$

$$\beta = \dim \left(X / \operatorname{ran} S \right) = \dim(\operatorname{ran} S)^\perp = \alpha' \in \mathbb{N}_0.$$

Der Unterraum $\operatorname{ran} S'$ ist nach Satz 6.2.1 w^* -abgeschlossen in X' , und es gilt ${}^\perp(\operatorname{ran} S') = \ker S$. Korollar 5.4.8 angewandt auf X' versehen mit der w^* -Topologie und $\operatorname{ran} S'$ ergibt

$$\beta' = \dim \left(X' / \operatorname{ran} S' \right) = \dim {}^\perp(\operatorname{ran} S') = \alpha.$$

Wir zeigen als nächstes $\alpha \leq \beta$. Ist diese Ungleichung bewiesen, so folgt auch $\alpha' \leq \beta'$, denn mit T ist auch T' kompakt. Insgesamt haben wir dann $\beta = \alpha' \leq \beta' = \alpha \leq \beta$, und damit (i) gezeigt.

Angenommen, es gilt

$$\dim(X / \operatorname{ran} S) = \beta < \alpha = \dim \ker S (< \infty),$$

vgl. Proposition 6.4.8. Sei F ein β -dimensionaler Unterraum von X mit $X = \operatorname{ran} S \dot{+} F$. Dieser ist immer abgeschlossen. Weiters sei E ein gemäß Proposition 5.2.8 existierender abgeschlossener Unterraum von X , sodass $X = \ker S \dot{+} E$, und sei P die entsprechende stetige Projektion mit

$$X = \underbrace{\ker S}_{=\operatorname{ran} P} \dot{+} \underbrace{E}_{=\ker P}.$$

Wegen $\dim \ker S > \dim F$ existiert $\phi : \ker S \rightarrow F$ linear, surjektiv, $\ker \phi \neq \{0\}$. Setzen wir

$$\psi x := Tx + \phi Px \quad \text{für } x \in X,$$

so liegt ψ in $\mathcal{K}(X)$; vgl. Proposition 6.4.4. Es gilt $\psi - \lambda I = S + \phi P$. Für $x \in E$ folgt $Px = 0$, also $(\psi - \lambda I)x = Sx$. Somit gilt

$$(\psi - \lambda I)(E) = S(E) = \text{ran } S.$$

Ist $x \in \ker S$, so gilt $Px = x$, also $(\psi - \lambda I)x = Sx + \phi Px = \phi x$, und daher

$$(\psi - \lambda I)(\ker S) = \phi(\ker S) = F.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\text{ran}(\psi - \lambda I) = \text{ran } S + F = X.$$

Nun ist aber λ ein Eigenwert von ψ , denn für $x \in \ker \phi \neq \{0\}$ gilt $(\psi - \lambda I)x = 0$. Wir haben wegen Proposition 6.4.10, (i), einen Widerspruch erhalten. Es ist also (i) bewiesen.

Die Aussage (ii) folgt sofort aus (i), wenn man bedenkt, dass wegen dem Satz von der offenen Abbildung $\lambda \in \sigma(T)$ heißt, dass $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ oder $\text{ran}(T - \lambda I) \neq X$.

Die Aussage (iii) folgt sofort aus Proposition 6.4.10 und (ii). □

6.4.12 (Zusammenfassung). *Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{K}(X)$. Dann besteht das Spektrum von T aus einer (endlichen oder unendlichen) Folge $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die, falls sie unendlich ist, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ erfüllt. Jeder von Null verschiedene Spektralpunkt λ ist ein Eigenwert, und es gilt*

$$\dim \ker(T - \lambda) = \dim[X / \text{ran}(T - \lambda)] < \infty. \quad (6.4.2)$$

Die Aussage von Satz 6.4.11, insbesondere, dass stets (6.4.2) gilt, ist auch als *Fredholmsche Alternative* bekannt.

6.5 Operatoren im Hilbertraum

Wir beginnen mit einer Konsequenz der Schwarzschen Ungleichung (vgl. Lemma 6.1.1). Wieder haben alle Räume den Skalarkörper \mathbb{C} .

6.5.1 Korollar. *Seien H_1, H_2 Hilberträume. Dann gilt ($x \in H_1$)*

$$\|x\| = \sup \{ |(x, y)| : y \in H_1, \|y\| \leq 1 \}.$$

Ist $T : H_1 \rightarrow H_2$ linear, so gilt

$$\|T\| = \sup \{ |(Tx, y)| : x \in H_1, y \in H_2, \|x\|, \|y\| \leq 1 \}.$$

Beweis. Wegen der Schwarzschen Ungleichung gilt $|(Tx, y)| \leq \|T\| \|x\| \|y\| \leq \|T\|$ für $\|x\|, \|y\| \leq 1$. Für $y = \frac{1}{\|Tx\|} Tx$ gilt sogar $|(Tx, y)| = \|Tx\|$, womit

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\| : \|x\| \leq 1 \} = \sup \{ |(Tx, y)| : \|x\|, \|y\| \leq 1 \}.$$

□

Sei $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Dann ist die Abbildung $f : x \mapsto (Tx, y)$ für jedes feste y ein stetiges Funktional auf H_1 . Also gibt es wegen Proposition 3.2.5 ein eindeutig bestimmtes Element – wir bezeichnen es mit T^*y – für das $f(x) = (x, T^*y)$, $x \in H_1$ gilt. Somit ist T^*y jenes eindeutige Element aus H_1 , sodass

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \text{für alle } x \in H_1.$$

Offensichtlich ist die Abbildung $y \mapsto T^*y$ linear. Der Operator $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ heißt die *Adjungierte* von T .

Offenbar hängt T^* eng mit dem konjugierten Operator T' zusammen. Bevor wir auf diesen Zusammenhang näher eingehen, stellen wir einige elementare Eigenschaften zusammen.

6.5.2 Proposition. *Sei H ein Hilbertraum.*

(i) *Für alle $T, S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, $R \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt*

$$(T + S)^* = T^* + S^*, \quad (\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*, \quad (RS)^* = S^*R^*, \quad T^{**} = T, \quad I^* = I,$$

wobei I die Identitätsabbildung auf einem Hilbertraum ist.

(ii) *Für alle $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ gilt*

$$\|T^*\| = \|T\|, \quad \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

(iii) *Für alle $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ gilt*

$$\ker T^* = (\text{ran } T)^\perp, \quad \ker T = (\text{ran } T^*)^\perp.$$

Beweis.

ad (i): Wir beweisen $(RS)^* = S^*R^*$; die restlichen Aussagen folgen analog. Für alle $x \in H_1, y \in H_3$ ist

$$(RSx, y) = (R(Sx), y) = (Sx, R^*y) = (x, S^*R^*y).$$

ad (ii): Wegen Korollar 6.5.1 gilt

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup\{|(T^*x, y)| : x \in H_2, y \in H_1, \|x\|, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|(x, Ty)| : x \in H_2, y \in H_1, \|x\|, \|y\| \leq 1\} = \|T\|. \end{aligned}$$

Es ist $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2$. Andererseits gilt

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) \leq \|T^*T\| \cdot \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in H_1,$$

also $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$.

ad (iii): Es ist $x \in \ker T^* \iff T^*x = 0 \iff (T^*x, y) = 0$ für alle $y \in H_1 \iff (x, Ty) = 0$ für alle $y \in H_1 \iff x \perp \text{ran } T$. Die zweite Beziehung folgt aus der ersten, wenn man $T^{**} = T$ beachtet.

□

Da sich nach dem Satz von Riesz, Proposition 3.2.5, der Dualraum H' in natürlicher Weise mit H identifizieren lässt, besteht ein enger Zusammenhang zwischen Adjungierter und Konjugierter. Dazu bezeichnen wir für $j = 1, 2$ mit Φ_j die konjugiert-lineare Isometrie zwischen H_j und H'_j aus Proposition 3.2.5, $\Phi_j : y \mapsto (\cdot, y)$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_1 & & H'_1 \xleftarrow{\Phi_1} H_1 \\ T \downarrow & & T' \uparrow \quad \quad \uparrow T^* \\ H_2 & & H'_2 \xleftarrow{\Phi_2} H_2 \end{array}$$

kommutativ, d.h. es gilt $\Phi_1 \circ T^* = T' \circ \Phi_2$, denn es gilt einerseits ($x \in H_2, y \in H_1$)

$$\langle Ty, x \rangle = \langle Ty, (\cdot, x) \rangle = \langle Ty, \Phi_2(x) \rangle = \langle y, T'(\Phi_2(x)) \rangle,$$

und andererseits

$$\langle Ty, x \rangle = \langle y, T^*x \rangle = \langle y, (\cdot, T^*x) \rangle = \langle y, \Phi_1(T^*x) \rangle.$$

Man könnte dieses Diagramm genauso zur Definition der Adjungierten heranziehen. Der obige Zugang über das innere Produkt ist aber gebräuchlicher.

Die Tatsache, dass für einen Operator auf einem Hilbertraum die Adjungierte wieder ein Operator auf dem gleichen Raum ist, gibt uns die Möglichkeit, T und T^* in Beziehung zu setzen.

6.5.3 Definition. Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{B}(H)$. Dann heißt T

- (i) *normal*, wenn $TT^* = T^*T$;
- (ii) *selbstadjungiert*, wenn $T = T^*$;
- (iii) *unitär*, wenn $TT^* = T^*T = I$, d.h. T ist bijektiv mit $T^* = T^{-1}$.

Ist $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ mit zwei Hilberträumen H_1, H_2 , sodass $T^*T = I_{H_1}$ und $TT^* = I_{H_2}$, so wird T ebenfalls als unitär bezeichnet.

6.5.4 Beispiel. Sei μ ein σ -endliches Maß auf der Menge Ω versehen mit einer σ -Algebra \mathcal{A} , und sei $\phi \in L^\infty(\mu)$. Wir betrachten den Multiplikationsoperator M_ϕ mit Symbol ϕ am $L^2(\mu)$. Als erstes bestimmen wir seine Hilbertraumadjungierte. Wegen

$$(M_\phi f, g) = \int_\Omega (\phi f) \bar{g} \, d\mu = \int_\Omega f \overline{(\phi g)} \, d\mu = (f, M_{\bar{\phi}} g),$$

ist $M_\phi^* = M_{\bar{\phi}}$. Wir sehen, dass M_ϕ stets normal ist, und selbstadjungiert bzw. unitär genau dann, wenn ϕ f.ü. reell ist bzw. f.ü. Betrag 1 hat. //

Über die Gestalt des Spektrums solcher spezieller Typen von Operatoren lässt sich einiges sagen. Zum Beispiel ist die folgende Aussage über den Spektralradius eines normalen Operators von großer Bedeutung in der Spektraltheorie. Wir erinnern daran, dass stets $r(T) \leq \|T\|$ gilt, im Allgemeinen aber nicht Gleichheit gelten muss.

6.5.5 Proposition. Sei $N \in \mathcal{B}(H)$ normal. Dann gilt $r(N) = \|N\|$.

Beweis. Ist N normal, so auch N^2 . Wir erhalten mit Proposition 6.5.2, (ii),

$$\|N^2\|^2 = \|(N^2)^*(N^2)\| = \|(N^*N)^2\| = \|(N^*N)^*(N^*N)\| = \|N^*N\|^2 = (\|N\|^2)^2,$$

also ist $\|N^2\| = \|N\|^2$. Verfährt man induktiv weiter, so erhält man $\|N^{2^k}\| = \|N\|^{2^k}$, und Satz 6.3.14 zeigt

$$r(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|N^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|N^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|N\|.$$

□

Bei der Untersuchung von Operatoren auf einem Hilbertraum ist die quadratische Form (Tx, x) von Bedeutung.

6.5.6 Lemma. Ist $T \in \mathcal{B}(H)$ und gilt $(Tx, x) = 0$ für alle $x \in H$, so folgt $T = 0$.

Beweis. Aus der Polarformel (3.1.3) angewandt auf die Sesquilinearform $[x, y] = (Tx, y)$ folgt $(Tx, y) = 0$ für alle $x, y \in H$ und damit $Tx = 0$ für jedes $x \in H$.

□

Die Menge $W(T) := \{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$ heißt der *numerische Wertebereich* des Operators $T \in \mathcal{B}(H)$. Offenbar gilt

$$W(T) \subseteq K_{\|T\|}^{\mathbb{C}}(0). \quad (6.5.1)$$

6.5.7 Korollar. Für einen Hilbertraum H und $A \in \mathcal{B}(H)$ ist A genau dann selbstadjungiert, wenn $W(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Beweis. Es gilt $(x \in H)$

$$\begin{aligned} 2i \operatorname{Im}(Ax, x) &= (Ax, x) - \overline{(Ax, x)} = (Ax, x) - (x, Ax) \\ &= (Ax, x) - (A^*x, x) = ((A - A^*)x, x). \end{aligned}$$

Also gilt $W(A) \subseteq \mathbb{R}$ genau dann wenn $((A - A^*)x, x) = 0$ für alle $\|x\| = 1$ und damit für alle $x \in H$. Wegen Lemma 6.5.6 bedeutet das gerade $A = A^*$.

□

Das Spektrum eines Operators im Hilbertraum steht in Beziehung zu seinem numerischen Wertebereich.

6.5.8 Proposition. Für einen Hilbertraum H und $T \in \mathcal{B}(H)$ gilt

$$\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}.$$

Beweis. Sei $\lambda \notin \overline{W(T)}$, und setze $\delta := d(\lambda, W(T)) > 0$. Für $x \in H$, $\|x\| = 1$, gilt

$$\delta \leq |(Tx, x) - \lambda| = |((T - \lambda)x, x)| \leq \|(T - \lambda)x\|. \quad (6.5.2)$$

Aus der Linearität folgt damit $\delta\|x\| \leq \|(T - \lambda)x\|$ für alle $x \in H$. In Bemerkung 4.3.5 haben wir gesehen, dass dann $T - \lambda$ injektiv ist, und dass die Abbildung $(T - \lambda)^{-1} : \operatorname{ran}(T - \lambda) \rightarrow H$ beschränkt ist. Wegen Lemma 4.3.6 ist $\operatorname{ran}(T - \lambda)$ auch abgeschlossen.

Da $z \in W(T^*)$ genau dann, wenn $\bar{z} \in W(T)$, kann man obige Argumentation auf T^* und $\bar{\lambda}$ anwenden, und erhält $\ker(T^* - \bar{\lambda}) = \{0\}$. Also gilt

$$\operatorname{ran}(T - \lambda) = \overline{\operatorname{ran}(T - \lambda)} = (\operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp)^\perp = \ker(T^* - \bar{\lambda})^\perp = X;$$

insgesamt folgt $\lambda \in \rho(T)$. □

6.5.9 Korollar. *Sei $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert. Setzen wir*

$$\gamma_-(A) := \inf \{(Ax, x) : \|x\| = 1\} \quad \text{und} \quad \gamma_+(A) := \sup \{(Ax, x) : \|x\| = 1\},$$

so gilt

$$\sigma(A) \subseteq [\gamma_-(A), \gamma_+(A)] \subseteq \mathbb{R},$$

wobei $\gamma_-(A), \gamma_+(A) \in \sigma(A)$. Dabei ist

$$\|A\| = r(A) = \max(|\gamma_-(A)|, |\gamma_+(A)|).$$

Beweis. Offenbar gilt $\gamma_-(A) = \min \overline{W(A)}$ und $\gamma_+(A) = \max \overline{W(A)}$. Gemäß Korollar 6.5.7 und Proposition 6.5.8 haben wir

$$\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)} \subseteq [\gamma_-(A), \gamma_+(A)] \subseteq \mathbb{R}.$$

Nehmen wir für einen Moment an, dass $W(A) \subseteq [0, +\infty)$, dann folgt (vgl. (6.5.1))

$$\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)} \subseteq [0, \gamma_+(A)] \subseteq [0, \|A\|] \subseteq [0, +\infty).$$

Wegen $r(A) = \|A\|$ (siehe Proposition 6.5.5) ist $[0, \|A\|]$ das kleinste abgeschlossene Intervall der Bauart $[0, \alpha]$ mit einem $\alpha \geq 0$, sodass $\sigma(A) \subseteq [0, \alpha]$. Da $\sigma(A)$ abgeschlossen ist, folgt $\|A\| = \gamma_+(A) \in \sigma(A)$.

Allgemein gilt $W(A) + \lambda = W(A + \lambda I) \subseteq [0, +\infty)$ für alle reellen $\lambda \geq -\gamma_-(A)$. Also folgt für solche λ aus obigem Spezialfall angewandt auf den selbstadjungierten Operator $A + \lambda I$

$$\gamma_+(A) + \lambda = \gamma_+(A + \lambda I) \in \sigma(A + \lambda I).$$

Wegen $\sigma(A + \lambda I) = \sigma(A) + \lambda$ (siehe Satz 6.3.7) folgt $\gamma_+(A) \in \sigma(A)$. Infolge gilt $-\gamma_-(A) = \gamma_+(-A) \in \sigma(-A) = -\sigma(A)$, und daher $\gamma_-(A) \in \sigma(A)$.

Schließlich folgt $r(A) = \max(|\gamma_-(A)|, |\gamma_+(A)|)$ sofort aus $\sigma(A) \subseteq [\gamma_-(A), \gamma_+(A)]$ mit $\gamma_-(A), \gamma_+(A) \in \sigma(A)$. □

Aus Korollar 6.5.9 und Korollar 6.5.7 folgt unmittelbar

6.5.10 Korollar. *Für ein $A \in \mathcal{B}(H)$ ist A genau dann selbstadjungiert mit $\sigma(A) \subseteq [0, +\infty)$, wenn $0 \leq (Ax, x)$ ($\in \mathbb{R}$) für alle $x \in H$. In diesem Fall spricht man von einem positiven Operator.*

Nun wollen wir uns noch speziell unitäre Operatoren ansehen.

6.5.11 Proposition. *Sei $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Dann sind äquivalent:*

(i) U ist unitär.

(ii) $\text{ran } U = H_2$ und $(Ux, Uy)_{H_2} = (x, y)_{H_1}$ für alle $x, y \in H_1$.

(iii) $\text{ran } U = H_2$ und $\|Ux\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$ für alle $x \in H_1$.

Beweis. Ist U unitär, so folgt $\text{ran } U = H_2$ unmittelbar aus $UU^* = I_{H_2}$. Wegen $U^*U = I_{H_1}$ folgt $(Ux, Uy)_{H_2} = (x, U^*Uy)_{H_1} = (x, y)_{H_1}$, $x, y \in H_1$. Wir haben damit (i) \Rightarrow (ii) gezeigt. Die Implikation (ii) \Rightarrow (iii) ist trivial. Aus (iii) folgt schließlich

$$(U^*Ux, x) = (Ux, Ux) = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = (x, x), \quad x \in H_1.$$

Wegen Lemma 6.5.6 gilt daher $U^*U = I_{H_1}$. Andererseits ist unter der Voraussetzung (iii) sicher U eine lineare stetige Bijektion von H_1 auf H_2 . Aus Korollar 4.3.4 folgt $U^{-1} \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, und aus $U^*U = I_{H_1}$ damit $U^* = U^{-1}$. \square

Auch über die Lage des Spektrums eines unitären Operators lässt sich eine Aussage machen.

6.5.12 Proposition. Sei $U \in \mathcal{B}(H)$ unitär. Dann gilt $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$, wobei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Beweis. Es gilt $\|U\| = 1$, also ist $\sigma(U) \subseteq K_1(0) (\subseteq \mathbb{C})$. Da sicher $0 \in \rho(U)$ ist, und U^{-1} ebenfalls unitär, folgt, dass auch $\sigma(U^{-1}) \subseteq K_1(0) (\subseteq \mathbb{C})$. Nun ist nach Lemma 6.3.8 $\sigma(U^{-1}) = \sigma(U)^{-1}$. \square

Kapitel 7

Der Spektralsatz

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann ist das Spektrum von A gleich der Menge aller Eigenwerte von A . Es gibt eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ des \mathbb{C}^n bestehend aus Eigenvektoren von A . Diese Basis kann als Orthonormalbasis gewählt werden.

Bezeichne mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ alle Eigenwerte von A , und bezeichne mit P_k die orthogonale Projektion des \mathbb{C}^n auf den Eigenraum von A zum Eigenwert λ_k . Dann gilt

$$P_i P_j = 0, \quad i \neq j, \quad P_1 + \dots + P_m = I.$$

Ist $x \in \mathbb{C}^n$, so kann man Ax berechnen als

$$Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i x.$$

Der Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren kann als ein „unendlichdimensionales Analogon“ dieser Tatsache gesehen werden. In der allgemeinen Situation wird dabei obige Summe, in der über die Eigenwerte von A summiert wird, durch ein Integral, welches sich über das Spektrum von A erstreckt, ersetzt.

7.1 Spektralmaße

Für das Folgende sei daran erinnert, dass ein $P \in \mathcal{B}(H)$ genau dann eine orthogonale Projektion ist, wenn $P^* = P = P^2$, vgl. (3.2.3).

7.1.1 Definition. Sei Ω eine Menge, \mathcal{A} eine σ -Algebra auf Ω , und H ein Hilbertraum. Ein *Spektralmaß* für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ ist eine Funktion $E : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$, sodass gilt

(SM1) Für jedes $\Delta \in \mathcal{A}$ ist $E(\Delta)$ eine orthogonale Projektion.

(SM2) $E(\emptyset) = 0$ und $E(\Omega) = I$.

(SM3) $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$ für je zwei $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{A}$.

(SM4) Sind $\Delta_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, so gilt

$$E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$$

im Sinne der starken Operator-topologie, dh. $E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right)x = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)x$ für alle $x \in H$.

Aus (SM3) folgt insbesondere, dass $E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\Delta_2)E(\Delta_1)$. Für disjunkte $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{A}$ gilt wegen (SM2) sogar $E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\emptyset) = 0$. Insbesondere ist für eine paarweise disjunkte Mengenfolge $\Delta_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, wie in (SM4) die Voraussetzung des folgenden Lemma 7.1.2 erfüllt. Also konvergiert die Reihe in (SM4) sowieso im Sinne der starken Operator-topologie.

Wegen $(P_mx, P_ny) = (P_nP_mx, y)$ für alle $x, y \in H$ bedeutet die Voraussetzung $P_nP_m = 0$ für $n \neq m$ gerade, dass $\text{ran } P_m \perp \text{ran } P_n$ für alle $n \neq m$.

7.1.2 Lemma. Sei H ein Hilbertraum, und $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge orthogonaler Projektionen auf H mit $P_nP_m = 0$, $n \neq m$. Dann konvergiert die Reihe

$$P := \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n$$

im starken Sinn, dh. es gilt $Px = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P_nx$ für alle $x \in H$. Ihre Summe P ist eine orthogonale Projektion, und es gilt

$$\ker P = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker P_n, \quad \text{ran } P = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{ran } P_n}.$$

Beweis. Wie man aus $P_nP_m = P_mP_n = 0$, $n \neq m$, leicht herleitet ist die Summe $\sum_{n=1}^N P_n$ eine orthogonale Projektion mit Bildraum $\text{span } \bigcup_{n=1}^N \text{ran } P_n$. Insbesondere gilt $\|\sum_{n=1}^N P_n\| \leq 1$. Für $x \in H$ gilt

$$\|x\|^2 \geq \left\| \sum_{n=1}^N P_nx \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \|P_nx\|^2.$$

Also ist die Folge $\sum_{n=1}^N \|P_nx\|^2$ in \mathbb{R} konvergent und daher eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Wegen $(M \leq N)$

$$\left\| \sum_{n=1}^N P_nx - \sum_{n=1}^M P_nx \right\|^2 = \left\| \sum_{n=M+1}^N P_nx \right\|^2 = \sum_{n=M+1}^N \|P_nx\|^2,$$

ist auch die Folge $(\sum_{n=1}^N P_nx)_{N \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H und somit konvergent gegen ein $Px \in H$. Offensichtlich ist $x \mapsto Px$ linear. Wegen

$$\|Px\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N P_nx \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \|P_nx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_nx\|^2 \leq \|x\|^2 \quad (7.1.1)$$

gilt sogar $P \in \mathcal{B}(H)$. Wir zeigen als nächstes, dass P eine selbstadjungierte Projektion ist:

$$P^2x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N P_m \sum_{n=1}^{\infty} P_nx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} P_mP_nx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N P_mx = Px,$$

$$(Px, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N P_n x, y \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(x, \sum_{n=1}^N P_n y \right) = (x, Py).$$

Schließlich gilt wegen (7.1.1) $\ker P = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker P_n$, und wir erhalten damit auch

$$\operatorname{ran} P = (\ker P)^\perp = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker P_n \right)^\perp = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n=1}^{\infty} (\ker P_n)^\perp} = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran} P_n}.$$

□

Um mit Spektralmaßen zu arbeiten, werden wir uns oft mit Hilfe des nächsten Lemmas auf Sätze über komplexe Maße zurückziehen.

7.1.3 Bemerkung. Zunächst wollen wir einige wichtige Eigenschaften von komplexen Maßen aufzählen, vgl. Analysis 3 Skriptum oder [R2]. Sei Ω eine nicht-leere Menge und \mathcal{A} eine σ -Algebra darauf.

↪ Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt komplexes Maß, wenn für alle paarweise disjunkten Folgen Δ_n , $n \in \mathbb{N}$, von Mengen aus \mathcal{A} gilt

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Delta_n). \quad (7.1.2)$$

Endliche nichtnegative Maße auf (Ω, \mathcal{A}) sind spezielle komplexe Maße.

↪ Für ein komplexes Maß μ wird durch $(\Delta \in \mathcal{A})$

$$|\mu|(\Delta) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| : A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}, \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \Delta \right\} \quad (7.1.3)$$

eine nichtnegative Mengenfunktion $|\mu| : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ definiert, die als *Variation* von μ bezeichnet wird.

Man kann zeigen, dass $|\mu|$ ein endliches nichtnegatives Maß auf (Ω, \mathcal{A}) ist. Es ist damit offensichtlich das kleinste nichtnegative Maß ν auf (Ω, \mathcal{A}) , sodass $|\mu(\Delta)| \leq \nu(\Delta)$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$.

↪ Für ein komplexes Maß μ auf (Ω, \mathcal{A}) bezeichnet $\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$ die *Totalvariation* von μ .

Die Abbildung $\mu \mapsto \|\mu\|$ ist in der Tat eine Norm auf dem komplexen Vektorraum $M(\Omega, \mathcal{A})$ aller komplexen Maße. Mit dieser Norm ist $M(\Omega, \mathcal{A})$ ein Banachraum.

↪ Ist $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ ein nichtnegatives Maß und $\nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$, so heißt ν *absolut stetig* bzgl. μ , in Zeichen $\nu \ll \mu$, falls aus $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ folgt, dass $\nu(A) = 0$. Man zeigt leicht, dass das zu $|\nu| \ll \mu$ äquivalent ist. Offensichtlich gilt immer $\nu \ll |\nu|$.

Für $\mu, \nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ sagen wir, dass $\nu \ll \mu$, falls $\nu \ll |\mu|$.

↪ Sei μ ein σ -endliches nichtnegatives Maß. Dann ist ein Maß $\nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ genau dann absolut stetig bezüglich μ , wenn es eine sogenannte *Dichtefunktion* $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ gibt, sodass

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}. \quad (7.1.4)$$

Der Zusammenhang zwischen ν und f ist bijektiv (f ist μ -fast überall eindeutig durch ν bestimmt), wobei sogar

$$|\nu|(A) = \int_A |f| \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}, \quad (7.1.5)$$

und damit $\|f\|_1 = \|\nu\|$. f heißt die Dichte von ν bzgl. μ .

Die Dichte von ν bezüglich $|\nu|$ ist unimodular, dh. hat Werte auf der Einheitskreislinie.

↪ Für $\nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ sei μ irgendein nichtnegatives, σ -endliches Maß mit $\nu \ll \mu$, und sei f die Dichte von ν bezüglich μ .

Eine messbare Funktion $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt integrierbar bzgl. $\nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$, wenn $g \cdot f$ integrierbar bzgl. μ ist. Wir definieren dann

$$\int_{\Omega} g \, d\nu := \int_{\Omega} gf \, d\mu.$$

Diese Definition ist unabhängig von μ . Außerdem ist das Integral linear im Maß ν und im Integranden g . Für beschränktes g gilt dabei

$$\left| \int_{\Omega} g \, d\nu \right| \leq \|g\|_{\infty} \|\nu\|. \quad (7.1.6)$$

↪ Für $\mu, \nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ folgt aus den letzten beiden Punkten, dass $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn (7.1.4) gilt, wobei die Dichte f auch in diesem Fall $|\mu|$ -fast überall durch ν eindeutig bestimmt ist.

Ist $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, so gilt dann auch hier

$$\int_{\Omega} g \, d\nu = \int_{\Omega} gf \, d\mu \quad (7.1.7)$$

in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann integrierbar ist, wenn es die rechte ist.

↪ Trägt Ω eine Hausdorffsche und lokalkompakte Topologie \mathcal{T} und sind \mathcal{A} die Borelmengen, dh. die von \mathcal{T} erzeugte σ -Algebra, so heißen Maße $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ Borelmaß, falls $\mu(K) < +\infty$ für alle kompakten $K \subseteq \Omega$. Ein solches Maß heißt *regulär*, falls für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ ist kompakt}\},$$

und

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \supseteq A, O \text{ ist offen}\}.$$

Ein $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ heißt regulär, falls $|\mu|$ regulär ist.

- ↪ Ist $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ regulär, f bzgl. μ integrierbar und ν definiert wie in (7.1.4), so ist auch ν regulär.
- ↪ Die Menge aller regulären $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ bildet einen bzgl. $\|\cdot\|$ abgeschlossenen Unterraum $M_{reg}(\Omega)$, welcher nach dem Riesz'schen Darstellungssatz, Satz 2.3.9, isometrisch isomorph zu $(C_0(\Omega))'$ ist.
- ↪ Hat die Topologie \mathcal{T} auf Ω eine abzählbare Basis, so ist jedes $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ regulär. Insbesondere ist für jede offene oder abgeschlossene Teilmenge Ω von \mathbb{R}^p jedes $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ regulär.

//

7.1.4 Lemma. Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$, und seien $g, h \in H$ festgehalten. Dann ist die Abbildung $E_{g,h} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, die definiert ist durch

$$E_{g,h}(\Delta) := (E(\Delta)g, h),$$

ein komplexes Maß auf \mathcal{A} . Für die Variation $|E_{g,h}|$ gilt die Abschätzung

$$|E_{g,h}|(\Delta) \leq \|E(\Delta)g\| \cdot \|E(\Delta)h\|$$

Die Totalvariation von $E_{g,h}$ ist somit höchstens gleich $\|g\| \cdot \|h\|$.

Für diese komplexen Maße gilt $E_{g,h} = \overline{E_{h,g}}$, $E_{\lambda g_1 + \mu g_2, h} = \lambda E_{g_1, h} + \mu E_{g_2, h}$ sowie $E_{g, \lambda h_1 + \mu h_2} = \bar{\lambda} E_{g, h_1} + \bar{\mu} E_{g, h_2}$ für $g, g_1, g_2, h, h_1, h_2 \in H$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Außerdem ist $E_{g,g}$ immer ein nichtnegatives Maß.

Beweis. Seien Δ_n , $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N E_{g,h}(\Delta_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (E(\Delta_n)g, h) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)g, h \right) \\ &= \left(E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right)g, h \right) = E_{g,h}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right), \end{aligned}$$

also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} E_{g,h}(\Delta_n)$ und zwar gegen $E_{g,h}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n)$. Wir sehen, dass $E_{g,h}$ ein komplexes Maß auf der σ -Algebra \mathcal{A} ist.

Offenbar gilt $E_{g,h}(\Delta) = (E(\Delta)g, h) = (g, E(\Delta)h) = \overline{(E(\Delta)h, g)} = \overline{E_{h,g}(\Delta)}$. Die Sesquilinearität der Abbildung $(g, h) \mapsto E_{g,h}$ überprüft man ähnlich elementar. Klarerweise ist $E_{g,g}(\Delta) = (E(\Delta)g, g) = \|E(\Delta)g\|^2$ nichtnegativ.

Um die Variation $|E_{g,h}|$ von $E_{g,h}$ abzuschätzen, seien $\Delta \in \mathcal{A}$ sowie paarweise disjunkte Mengen Δ_n , $n \in \mathbb{N}$, mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \Delta$ gegeben. Wähle $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $|\alpha_n| = 1$, sodass $|E_{g,h}(\Delta_n)| = \alpha_n E_{g,h}(\Delta_n)$. Da für $m \neq n$ der Bildraum von $E(\Delta_m)$ orthogonal auf den von $E(\Delta_n)$ steht, gilt ($N \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |E_{g,h}(\Delta_n)| &= \sum_{n=1}^N (E(\Delta_n)(\alpha_n g), h) = \sum_{n=1}^N (E(\Delta_n)(\alpha_n g), E(\Delta_n)h) \\ &= \left(\sum_{n=1}^N E(\Delta_n)(\alpha_n g), \sum_{n=1}^N E(\Delta_n)h \right) \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^N E(\Delta_n)(\alpha_n g) \right\| \cdot \left\| \sum_{n=1}^N E(\Delta_n)h \right\|. \end{aligned}$$

Da die Vektoren $E(\Delta_n)(\alpha_n g)$ paarweise orthogonal sind, gilt

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N E(\Delta_n)(\alpha_n g) \right\|^2 &= \sum_{n=1}^N \|E(\Delta_n)(\alpha_n g)\|^2 = \sum_{n=1}^N \|E(\Delta_n)g\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^N E(\Delta_n)g \right\|^2 = \left\| E\left(\bigcup_{n=1}^N \Delta_n\right)g \right\|^2 \leq \|E(\Delta)g\|^2. \end{aligned}$$

Genauso zeigt man $\left\| \sum_{n=1}^N E(\Delta_n)(h) \right\|^2 \leq \|E(\Delta)h\|^2$. Wir erhalten insgesamt $\sum_{n=1}^{\infty} |E_{g,h}(\Delta_n)| \leq \|E(\Delta)g\| \cdot \|E(\Delta)h\|$. Also ist für jede Menge $\Delta \in \mathcal{A}$

$$|E_{g,h}|(\Delta) \leq \|E(\Delta)g\| \cdot \|E(\Delta)h\|.$$

Insbesondere gilt $\|E_{g,h}\| = |E_{g,h}|(\Omega) \leq \|g\| \cdot \|h\|$

□

Bezeichne die Menge aller beschränkten \mathcal{A} -messbaren Funktionen $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $B(\Omega, \mathcal{A})$. Für $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ sei $\|\phi\|_{\infty} := \sup_{x \in \Omega} |\phi(x)|$. Wir wollen nun überlegen, wie man eine Funktion $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ bezüglich einem Spektralmaß integrieren kann.

7.1.5 Lemma. *Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ und sei $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$. Dann existiert ein eindeutiger Operator $A \in \mathcal{B}(H)$, sodass für alle $g, h \in H$*

$$(Ag, h) = \int_{\Omega} \phi dE_{g,h}.$$

Dabei ist $\|A\| \leq \|\phi\|_{\infty}$.

Der Operator A heißt das Integral von ϕ bezüglich E , und wird mit $\int \phi dE$ bezeichnet.

Beweis. Für $g, h \in H$ bezeichne $B(g, h) := \int_{\Omega} \phi dE_{g,h}$. Mit $(g, h) \mapsto E_{g,h}(\Delta)$ ist auch $B : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ sesquilinear, vgl. Lemma 7.1.4. Wegen (7.1.6) und Lemma 7.1.4 gilt zudem

$$|B(g, h)| \leq \|\phi\|_{\infty} \|g\| \|h\|.$$

Also ist B sogar eine beschränkte Sesquilinearform. Nach Proposition 3.2.6 existiert ein eindeutiger Operator $A \in \mathcal{B}(H)$, sodass $B(g, h) = (Ag, h)$, $g, h \in H$, und dieser erfüllt $\|A\| \leq \|\phi\|_{\infty}$.

□

$B(\Omega, \mathcal{A})$ ist nicht nur eine Menge sondern, versehen mit der normalen Addition und skalaren Multiplikation, der Multiplikation von Funktionen, der Involution $f \mapsto \bar{f}$, sowie mit der Norm $\|\cdot\|_{\infty}$ eine kommutative C^* -Algebra mit dem Einselement $\phi \equiv 1$. Sie trägt sogar noch eine weitere algebraische Operation, nämlich das Konjugieren. Dafür definiere für $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ die Funktion ϕ^* durch $\phi^*(x) := \overline{\phi(x)}$. $B(\Omega, \mathcal{A})$ ist mit diesen Operationen eine sogenannte C^* -Algebra.

7.1.6 Definition. Eine Banachalgebra \mathcal{C} versehen mit einer Abbildung $.* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ heißt C^* -Algebra,

(i) falls $.*$ involutorisch ist, dh. $(a^*)^* = a$, $a \in \mathcal{C}$,

- (ii) falls \cdot^* konjugiert linear ist, dh. $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*$, $a, b \in \mathcal{C}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
- (iii) falls $(ab)^* = b^* a^*$, $a, b \in \mathcal{C}$,
- (iv) falls \cdot^* isometrisch ist, dh. $\|a^*\| = \|a\|$, $a \in \mathcal{C}$,
- (v) und falls $\|aa^*\| = \|a\|^2$ für alle $a \in \mathcal{C}$ gilt.

Wegen

$$\sup_{x \in \Omega} |\overline{\phi(x)} \phi(x)| = \sup_{x \in \Omega} (|\phi(x)|^2) = \left(\sup_{x \in \Omega} |\phi(x)| \right)^2,$$

sind alle diese Eigenschaften für $B(\Omega, \mathcal{A})$ erfüllt, wobei diese C^* -Algebra sogar kommutativ ist.

Ein weiteres Beispiel für eine im Allgemeinen nicht kommutative C^* -Algebra mit Eins ist $\mathcal{B}(H)$ für einen Hilbertraum H . Dazu definiere man die Involution auf dieser Algebra als $T \mapsto T^*$, wobei T^* die Hilbertraumadjungierte von T ist, siehe Proposition 6.5.2.

7.1.7 Bemerkung. Eine charaktersistische Eigenschaft von C^* -Algebren \mathcal{C} mit Eins ist, dass so wie für $\mathcal{B}(H)$ (siehe Proposition 6.5.5) auch allgemein für normale Elemente $x \in \mathcal{C}$, dh. $x^* x = x x^*$, wegen

$$\|x^2\|^2 = \|(x^2)^*(x^2)\| = \|(x^* x)^2\| = \|(x^* x)^*(x^* x)\| = \|x^* x\|^2 = (\|x\|^2)^2,$$

und damit $\|x^{2^k}\| = \|x\|^{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, für den Spektralradius gilt, dass

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|x\|.$$

//

Eine Abbildung $\Phi : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ zwischen zwei C^* -Algebren mit Eins heißt ein $*$ -Homomorphismus, wenn sie mit allen algebraischen Operationen verträglich ist, d.h. wenn stets gilt

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y), \quad \Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x), \quad \Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y),$$

$$\Phi(x^*) = (\Phi(x))^*, \quad \Phi(1_{\mathcal{C}_1}) = 1_{\mathcal{C}_2}.$$

Wir zeigen nun, dass man aus einem Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ einen $*$ -Homomorphismus von $B(\Omega, \mathcal{A})$ in $\mathcal{B}(H)$ erhält.

7.1.8 Satz. Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$. Dann ist die Abbildung

$$\Phi_E : \begin{cases} B(\Omega, \mathcal{A}) & \rightarrow \mathcal{B}(H) \\ \phi & \mapsto \int \phi dE \end{cases}$$

ein $*$ -Homomorphismus mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\Phi_E(\mathbf{1}_\Delta) = E(\Delta)$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$.
- (ii) $\|\Phi_E\| = 1$.
- (iii) Jeder Operator im Bild von Φ_E ist normal.
- (iv) Vertauscht ein Operator $B \in \mathcal{B}(H)$ mit allen Projektionen $E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$, so auch mit allen Operatoren der Form $\Phi_E(\phi)$, $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$.

- (v) $\sigma(\Phi_E(\phi)) \subseteq \overline{\phi(\Omega)}$ (topologischer Abschluss), wobei für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\phi(\Omega)}$ ($\subseteq \rho(\Phi_E(\phi))$)

$$(\Phi_E(\phi) - \lambda I)^{-1} = \Phi_E\left(\frac{1}{\phi - \lambda}\right).$$

- (vi) Für $g \in H$ und $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ gilt $\|\Phi_E(\phi)g\|^2 = \int_{\Omega} |\phi|^2 dE_{g,g}$.

- (vii) Ist $\phi_n \in B(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, eine gleichmäßig beschränkte Folge von Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, so ist $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ und für alle $g \in H$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_E(\phi_n)g = \Phi_E(\phi)g.$$

Also konvergiert die Folge $\Phi_E(\phi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, bzgl. der starken Operatortopologie gegen $\Phi_E(\phi)$.

- (viii) Ist $\phi_n \in B(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, so ist $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_E(\phi_n) = \Phi_E(\phi)$$

bezüglich der Operatornorm. Dasselbe gilt für gleichmäßig konvergente Netze.

Beweis.

↪ Der Operator $\int \phi dE$ ist eindeutig durch die Beziehung

$$\left(\left[\int \phi dE \right] g, h \right) = \int_{\Omega} \phi dE_{g,h}$$

definiert. Damit folgt unmittelbar, dass Φ_E linear ist. Wegen Lemma 7.1.5 gilt $\|\int \phi dE\| \leq \|\phi\|_{\infty}$ und daher $\|\Phi_E\| \leq 1$.

Aus der Definition von $\int \phi dE$ in Lemma 7.1.5 folgt unmittelbar $\Phi_E(\mathbf{1}_{\Delta}) = E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$. Insbesondere ist $\Phi_E(\mathbf{1}_{\Omega}) = E(\Omega) = I$, und somit $\|\Phi_E\| = 1$.

↪ Weiters ist

$$\begin{aligned} \left(\left[\int \phi dE \right]^* g, h \right) &= \left(g, \left[\int \phi dE \right] h \right) \\ &= \overline{\int_{\Omega} \phi dE_{h,g}} = \int_{\Omega} \overline{\phi} dE_{g,h} = \left(\left[\int \overline{\phi} dE \right] g, h \right), \end{aligned}$$

und daher Φ_E mit $*$ verträglich.

↪ Angenommen, $B \in \mathcal{B}(H)$ vertauscht mit allen Projektionen $E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$. Für $g, h \in H$ gilt $E_{g, B^*h}(\Delta) = (E(\Delta)g, B^*h) = (BE(\Delta)g, h) = (E(\Delta)Bg, h) = E_{Bg, h}(\Delta)$ und daher

$$\begin{aligned} \left(B \left[\int \phi dE \right] g, h \right) &= \left(\left[\int \phi dE \right] g, B^*h \right) = \int_{\Omega} \phi dE_{g, B^*h} \\ &= \int_{\Omega} \phi dE_{Bg, h} = \left(\left[\int \phi dE \right] Bg, h \right). \end{aligned}$$

Also gilt $B \left[\int \phi dE \right] = \left[\int \phi dE \right] B$.

↪ Da für jedes feste $\Delta_0 \in \mathcal{A}$ die Projektion $E(\Delta_0)$ mit allen $E(\Delta)$ vertauscht, folgt insbesondere $E(\Delta_0)[\int \phi dE] = [\int \phi dE]E(\Delta_0)$.

Aus $E_{E(\Delta_0)g,h}(\Delta) = (E(\Delta_0)E(\Delta)g, h) = (E(\Delta_0 \cap \Delta)g, h) = E_{g,h}(\Delta_0 \cap \Delta)$ folgt damit

$$\begin{aligned} E_{[\int \phi dE]g,h}(\Delta_0) &= (E(\Delta_0)[\int \phi dE]g, h) = ([\int \phi dE]E(\Delta_0)g, h) \\ &= \int_{\Omega} \phi dE_{E(\Delta_0)g,h} = \int_{\Delta_0} \phi dE_{g,h}. \end{aligned}$$

Da Δ_0 beliebig war, ist $E_{[\int \phi dE]g,h}$ absolut stetig bezüglich $E_{g,h}$ mit ϕ als Dichte.

Halten wir nun ein $\phi_0 \in B(\Omega, \mathcal{A})$ fest, so folgt daraus mit (7.1.7)

$$\begin{aligned} ([\int \phi_0 dE][\int \phi dE]g, h) &= \int_{\Omega} \phi_0 dE_{[\int \phi dE]g,h} \\ &= \int_{\Omega} \phi_0 \cdot \phi dE_{g,h} = ([\int \phi_0 \cdot \phi dE]g, h). \end{aligned}$$

Somit ist Φ_E multiplikativ.

↪ Das Bild von Φ_E ist, als $*$ -homomorphes Bild einer kommutativen C^* -Algebra ebenfalls kommutativ und enthält mit einem Operator T auch dessen adjungierten T^* . Daher gilt $TT^* = T^*T$ für jeden Operator der Gestalt $T = \Phi_E(\phi)$.

↪ Für $\lambda \notin \overline{\phi(\Omega)}$ ist die Funktion $\frac{1}{\phi - \lambda}$ beschränkt und daher in $B(\Omega, \mathcal{A})$. Aus der Linearität und der Multiplikativität von Φ_E folgt

$$(\Phi_E(\phi) - \lambda I) \Phi_E\left(\frac{1}{\phi - \lambda}\right) = \Phi_E\left(\frac{1}{\phi - \lambda}\right) (\Phi_E(\phi) - \lambda I) = \Phi_E(\mathbf{1}_{\Omega}) = I,$$

und daher $\lambda \notin \sigma(\Phi_E(\phi))$, wobei $(\Phi_E(\phi) - \lambda I)^{-1} = \Phi_E\left(\frac{1}{\phi - \lambda}\right)$.

↪ Wegen der Multiplikativität gilt

$$\begin{aligned} \|[\int \phi dE]g\|^2 &= \left(\int \phi dEg, \int \phi dEg \right) = \left([\int \phi dE]^* [\int \phi dE]g, g \right) \\ &= \left([\int |\phi|^2 dE]g, g \right) = \int_{\Omega} |\phi|^2 dE_{g,g}. \end{aligned}$$

↪ Konvergiert eine gleichmäßige beschränkte Funktionenfolge $\phi_n \in B(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$ punktweise gegen $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, so ist aus der Maßtheorie bekannt, dass ϕ messbar ist und wegen der gleichmäßigen Beschränktheit ist ϕ auch beschränkt, also $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$. Zudem gilt für $g \in H$

$$\|\Phi_E(\phi_n)g - \Phi_E(\phi)g\|^2 = \left\| \int (\phi_n - \phi) dEg \right\|^2 = \int_{\Omega} |\phi_n - \phi|^2 dE_{g,g} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

wegen dem Satz von der beschränkten Konvergenz, da $|\phi_n - \phi|^2$ sicherlich gleichmäßig beschränkt ist und punktweise gegen Null konvergiert.

\rightsquigarrow Konvergiert schließlich $\phi_n \in B(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig gegen $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, so folgt wegen $\|\Phi_E\| = 1$

$$\|\Phi_E(\phi_n) - \Phi_E(\phi)\| \leq \|\phi_n - \phi\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Folgendes Lemma zeigt auf, wie man $\int \phi dE$ nicht nur schwach wie in Lemma 7.1.5 definieren kann, sondern auch als Grenzwert bzgl. der Operatornorm einer Folge von Operatoren der Bauart $\sum_{k=1}^m \alpha_k E(\Delta_k)$ mit $\alpha_k \in \mathbb{C}$ und einer \mathcal{A} -Partition $\{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}$ von Ω erhält. Dabei bedeutet \mathcal{A} -Partition, dass $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ paarweise disjunkte Elemente von \mathcal{A} mit $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k = \Omega$ sind.

7.1.9 Korollar. Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ und sei $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$. Ist ϕ_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Treppenfunktionen von Ω nach \mathbb{C} der Form

$$\phi_n := \sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^n \mathbf{1}_{\Delta_k^n},$$

mit \mathcal{A} -Partitionen $\{\Delta_1^n, \dots, \Delta_{m(n)}^n\}$ von Ω und $\alpha_k^n \in \mathbb{C}$, sodass ϕ_n gleichmäßig gegen ϕ konvergiert, d.h. $\|\phi - \phi_n\|_\infty \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^n E(\Delta_k^n)$$

bzgl. der Operatornorm gegen $\int \phi dE$.

Beweis. Offensichtlich gilt $\Phi_E(\phi_n) = \sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^n \Phi_E(\mathbf{1}_{\Delta_k^n}) = \sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^n E(\Delta_k^n)$. Wegen $\|\Phi_E\| = 1$ gilt

$$\|\Phi_E(\phi_n) - \Phi_E(\phi)\| \leq \|\phi_n - \phi\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

7.1.10 Bemerkung. Man beachte, dass jede Funktion aus $B(\Omega, \mathcal{A})$ beliebig gut gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximierbar ist, da man zu jeder Funktion $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$ und beliebigem $\epsilon > 0$ eine endliche Überdeckung der abgeschlossenen Kreisscheibe $K_{\|\phi\|_\infty}^{\mathbb{C}}(0)$ durch offene Kugeln U_j , $j = 1, \dots, n$, mit Durchmesser ϵ wählen kann.

Setzt man $V_j := \phi^{-1}(U_j)$, definiert Δ_j induktiv durch $\Delta_1 := V_1$, $\Delta_{j+1} := V_{j+1} \setminus \bigcup_{l=1}^j \Delta_l$, und wählt $x_k \in \Delta_k$ beliebig, so ist $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ eine \mathcal{A} -Partition von Ω und

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi_\epsilon\|_\infty &= \max_{k=1, \dots, n} \sup\{|\phi(x_k) - \phi(y)| : y \in \Delta_k\} \\ &\leq \max_{k=1, \dots, n} \sup\{|\phi(x) - \phi(y)| : x, y \in \Delta_k\} < \epsilon. \end{aligned}$$

Dabei ist $\phi_\epsilon := \sum_{k=1}^n \phi(x_k) \mathbf{1}_{\Delta_k}$.

//

Ist Ω ein kompakter und Hausdorffscher topologischer Raum, dann ist $C(\Omega)$ mit der Supremumsnorm und den natürlichen algebraischen Operationen eine kommutative C^* -Algebra mit Eins.

Es ist eine tiefliegende Tatsache, dass alle $*$ -Homomorphismen von $C(\Omega)$ in eine C^* -Algebra $\mathcal{B}(H)$ in der in Satz 7.1.8 dargestellten Weise erhalten werden können. Zum Beweis verwenden wir den Darstellungssatz von Riesz, Satz 2.3.9.

7.1.11 Satz. *Sei Ω ein kompakter und Hausdorffscher topologischer Raum, sei H ein Hilbertraum, und sei $\Phi : C(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ ein beschränkter $*$ -Homomorphismus. Bezeichne mit \mathcal{A} die σ -Algebra aller Borel Mengen in Ω . Dann existiert ein Spektralmaß E für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$, sodass*

$$\Phi(\phi) = \int \phi dE, \quad \phi \in C(\Omega). \quad (7.1.8)$$

Unter allen Spektralmaßen mit dieser Eigenschaft gibt es genau eines, sodass für alle $g, h \in H$ das komplexe Borelmaß $E_{g,h}$ regulär ist.

Dieses eindeutige Spektralmaß hat zusätzlich die Eigenschaft, dass für einen Operator $B \in \mathcal{B}(H)$ genau dann $B \Phi(\phi) = \Phi(\phi) B$ für alle $\phi \in C(\Omega)$ gilt, wenn $B E(\Delta) = E(\Delta) B$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$.

Beweis.

Schritt 1: Wir konstruieren einen Kandidaten E für ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$. Seien $g, h \in H$ festgehalten. Dann ist die Abbildung

$$\Phi_{g,h} : \phi \mapsto (\Phi(\phi)g, h)$$

ein lineares Funktional auf $C(\Omega)$, für das ($\phi \in C(\Omega)$)

$$|(\Phi(\phi)g, h)| \leq \|\Phi(\phi)\| \|g\| \|h\| \leq \|\Phi\| \|\phi\|_\infty \|g\| \|h\|,$$

und damit $\|\Phi_{g,h}\| \leq \|\Phi\| \|g\| \|h\|$ gilt. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert ein eindeutiges reguläres Borelmaß $\mu_{g,h}$ auf Ω mit $\|\mu_{g,h}\| \leq \|\Phi\| \|g\| \|h\|$, sodass

$$(\Phi(\phi)g, h) = \Phi_{g,h}(\phi) = \int_{\Omega} \phi d\mu_{g,h} \quad \text{für alle } \phi \in C(\Omega). \quad (7.1.9)$$

Sind $g_1, g_2, h \in H$, so gilt

$$(\Phi(\phi)(g_1 + g_2), h) = (\Phi(\phi)g_1, h) + (\Phi(\phi)g_2, h) \quad \text{für alle } \phi \in C(\Omega),$$

woraus wegen der Eindeutigkeit im Rieszschen Darstellungssatz $\mu_{g_1+g_2,h} = \mu_{g_1,h} + \mu_{g_2,h}$ folgt. Genauso sieht man, dass $\mu_{\lambda g,h} = \lambda \mu_{g,h}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, und dass $\mu_{h,g} = \overline{\mu_{g,h}}$.

Sei nun $\Delta \in \mathcal{A}$ gegeben. Definiere $[g, h]_{\Delta} := \mu_{g,h}(\Delta)$. Dann ist $[g, h]_{\Delta}$ eine Sesquilinearform und es gilt $|[g, h]_{\Delta}| \leq \|\mu_{g,h}\| = \|\Phi\| \|g\| \|h\|$. Nach Proposition 3.2.6 existiert ein eindeutiger Operator $E(\Delta) \in \mathcal{B}(H)$, sodass

$$[g, h]_{\Delta} = (E(\Delta)g, h) \quad \text{für alle } g, h \in H.$$

Wegen

$$(E(\Delta)g, h) = \mu_{g,h}(\Delta) = \overline{\mu_{h,g}(\Delta)} = \overline{(E(\Delta)h, g)} = (g, E(\Delta)h)$$

sind die Operatoren $E(\Delta)$ selbstadjungiert.

Schritt 2: Angenommen $B \in \mathcal{B}(H)$ vertauscht mit allen $\Phi(\phi)$, $\phi \in C(\Omega)$. Dann gilt für $g, h \in H$ und beliebige $\phi \in C(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \phi d\mu_{Bg,h} = (\Phi(\phi)Bg, h) = (B\Phi(\phi)g, h) = (\Phi(\phi)g, B^*h) = \int_{\Omega} \phi d\mu_{g,B^*h}.$$

Da die Maße $\mu_{g,h}$ eindeutig durch (7.1.9) bestimmt sind, stimmen die komplexen Maße $\mu_{Bg,h}$ und μ_{g,B^*h} überein. Für $\Delta \in \mathcal{A}$ folgt somit

$$(E(\Delta)Bg, h) = \mu_{Bg,h}(\Delta) = \mu_{g,B^*h}(\Delta) = (E(\Delta)g, B^*h) = (BE(\Delta)g, h),$$

also $E(\Delta)B = BE(\Delta)$.

Da jeder Operator $\Phi(\phi_0)$ mit allen $\Phi(\phi)$, $\phi \in C(\Omega)$, vertauscht, gilt insbesondere

$$\Phi(\phi_0)E(\Delta) = E(\Delta)\Phi(\phi_0) \quad \text{für alle } \phi_0 \in C(\Omega), \Delta \in \mathcal{A}.$$

Schritt 3: Aus der Multiplikativität von Φ werden wir nun insbesondere die Tatsache herleiten, dass die $E(\Delta)$ Projektionen sind. Dazu seien $\phi, \phi_0 \in C(\Omega)$. Es folgt

$$\int_{\Omega} \phi \cdot \phi_0 d\mu_{g,h} = (\Phi(\phi \cdot \phi_0)g, h) = (\Phi(\phi)\Phi(\phi_0)g, h) = \int_{\Omega} \phi d\mu_{\Phi(\phi_0)g,h}.$$

Da mit $\mu_{g,h}$ auch $\Delta \mapsto \int_{\Delta} \phi_0 d\mu_{g,h}$ ein reguläres komplexes Borelmaß ist, folgt aus der Eindeutigkeit in (7.1.9)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi_0 \cdot \mathbf{1}_{\Delta} d\mu_{g,h} &= \mu_{\Phi(\phi_0)g,h}(\Delta) = (E(\Delta)\Phi(\phi_0)g, h) \\ &= (\Phi(\phi_0)E(\Delta)g, h) = \int_{\Omega} \phi_0 d\mu_{E(\Delta)g,h}. \end{aligned}$$

Da für jedes feste $\Delta \in \mathcal{A}$ mit $\mu_{g,h}$ auch $\Delta_1 \mapsto \int_{\Delta_1} \mathbf{1}_{\Delta} d\mu_{g,h} = \mu_{g,h}(\Delta_1 \cap \Delta)$ ein reguläres komplexes Borelmaß ist, folgt aus der Tatsache, dass obige Gleichung für alle $\phi_0 \in C(\Omega)$ gilt, wegen der Eindeutigkeit in (7.1.9)

$$\begin{aligned} (E(\Delta_1 \cap \Delta)g, h) &= \mu_{g,h}(\Delta_1 \cap \Delta) = \int_{\Delta_1} \mathbf{1}_{\Delta} d\mu_{g,h} \\ &= \mu_{E(\Delta)g,h}(\Delta_1) = (E(\Delta_1)E(\Delta)g, h). \end{aligned}$$

Also gilt $E(\Delta_1 \cap \Delta) = E(\Delta_1)E(\Delta)$. Insbesondere ist wegen $E(\Delta)^2 = E(\Delta)$ der Operator $E(\Delta)$ eine selbstadjungierte und somit orthogonale Projektion.

Schritt 4: Wir zeigen, dass E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ ist. Es ist schon bekannt, dass $E(\Delta)$ immer eine orthogonale Projektion ist, und dass $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$. Aus

$$(E(\Omega)g, h) = \mu_{g,h}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 d\mu_{g,h} = (\Phi(1)g, h) = (g, h)$$

und $(E(\emptyset)g, h) = \mu_{g,h}(\emptyset) = 0$ für alle $g, h \in H$ folgt $E(\Omega) = I$ und $E(\emptyset) = 0$.

Gemäß Lemma 7.1.2 gilt für paarweise disjunkte Borelmengen Δ_k , $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(\Delta_k)g = Pg \quad \text{für alle } g \in H,$$

wobei $P : H \rightarrow H$ eine orthogonale Projektion ist. Da $\mu_{g,h} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ein komplexes Maß ist, gilt aber für alle $g, h \in H$

$$(Pg, h) = \sum_{k=1}^{\infty} (E(\Delta_k)g, h) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{g,h}(\Delta_k) = \mu_{g,h}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k\right) = (E\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k\right)g, h),$$

und daher $P = E\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k\right)$. Also ist E bzgl. der starken Operator-topologie σ -additiv.

Schritt 5: Wegen Lemma 7.1.5 ist für $\phi \in C(\Omega)$ der Operator $A := \int \phi dE$ eindeutig durch $(Ag, h) = \int_{\Omega} \phi dE_{g,h}$ definiert. Nun gilt aber $E_{g,h} = \mu_{g,h}$ und aus (7.1.9) folgt somit (7.1.8).

Gilt schließlich $B E(\Delta) = E(\Delta) B$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$, so folgt $B \Phi(\phi) = \Phi(\phi) B$ für alle $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A}) \supseteq C(\Omega)$ wegen Satz 7.1.8. □

Folgendes Ergebnis zeigt, dass die Voraussetzung in Satz 7.1.11, dass Φ beschränkt ist, nicht vonnöten ist.

7.1.12 Lemma. *Seien \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 jeweils C^* -Algebren mit Eins. Ist $\Phi : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ ein $*$ -Homomorphismus wie oben, so ist Φ automatisch beschränkt mit Abbildungsnorm $\|\Phi\| = 1$. Dabei gilt $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$ für alle $a \in \mathcal{C}_1$.*

Beweis. Für $a \in \mathcal{C}_1$ sei $\lambda \in \rho(a)$, also $a - \lambda 1_{\mathcal{C}_1} \in \text{Inv}(\mathcal{C}_1)$. Es folgt

$$\begin{aligned} (\Phi(a) - \lambda 1_{\mathcal{C}_2}) \Phi((a - \lambda 1_{\mathcal{C}_1})^{-1}) &= \Phi(a - \lambda 1_{\mathcal{C}_1}) \Phi((a - \lambda 1_{\mathcal{C}_1})^{-1}) \\ &= \Phi[(a - \lambda 1_{\mathcal{C}_1})(a - \lambda 1_{\mathcal{C}_1})^{-1}] = \Phi(1_{\mathcal{C}_1}) = 1_{\mathcal{C}_2}, \end{aligned}$$

und genauso $\Phi((a - \lambda 1_{\mathcal{C}_1})^{-1}) (\Phi(a) - \lambda 1_{\mathcal{C}_2}) = 1_{\mathcal{C}_2}$. Somit ist $\lambda \in \rho(\Phi(a))$. Übergang zu den Komplementen ergibt $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$ und daher $r(\Phi(a)) \leq r(a)$.

Für $a \in \mathcal{C}_1$ sind aa^* und $\Phi(a)\Phi(a)^* = \Phi(aa^*)$ offensichtlich normal. Es folgt

$$\|\Phi(a)\|^2 = \|\Phi(a)\Phi(a)^*\| = r(\Phi(aa^*)) \leq r(aa^*) = \|aa^*\| = \|a\|^2.$$

Wegen $\Phi(1_{\mathcal{C}_1}) = 1_{\mathcal{C}_2}$ gilt $\|\Phi\| = 1$. □

7.1.13 Korollar. *Sei Ω ein kompakter und Hausdorffscher topologischer Raum, bezeichne mit \mathcal{A} die σ -Algebra aller Borelmengen in Ω , und sei H ein Hilbertraum. Weiters sei $\Phi : C(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ ein beschränkter $*$ -Homomorphismus.*

Dann besitzt Φ eine Fortsetzung zu einem $$ -Homomorphismus $\Phi_E : B(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ mit den Eigenschaften wie in Satz 7.1.8, wobei E das Spektralmaß zu Φ wie in Satz 7.1.11 ist. Insbesondere gilt $\|\Phi\| = \|\Phi_E\| = 1$.*

Dabei sind für ein $B \in \mathcal{B}(H)$ folgende Aussagen äquivalent

- $\rightsquigarrow E(\Delta) B = B E(\Delta)$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$.
- $\rightsquigarrow \Phi(\phi) B = B \Phi(\phi)$ für alle $\phi \in C(\Omega)$.
- $\rightsquigarrow \Phi_E(\phi) B = B \Phi_E(\phi)$ für alle $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$.

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus Satz 7.1.11 und Satz 7.1.8. □

7.2 Der Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren

Der Spektralsatz ist DER Eckpfeiler in der Theorie der selbstadjungierten Operatoren, und spielt eigentlich bei allen Aussagen über selbstadjungierte Operatoren eine wesentliche Rolle.

7.2.1 Satz (Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren). *Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert. Bezeichne mit \mathcal{A} die σ -Algebra der Borelmengen auf $\sigma(A)$. Dann existiert ein eindeutiges Spektralmaß für $\langle \sigma(A), \mathcal{A}, H \rangle$, das sogenannte Spektralmaß von A oder die Spektralzerlegung von A , sodass*

$$A = \int (t \mapsto t) dE =: \int t dE(t). \quad (7.2.1)$$

Dabei sind für einen Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $TA = AT$.
- (ii) $TE(\Delta) = E(\Delta)T$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$.
- (iii) $T \left[\int \phi dE \right] = \left[\int \phi dE \right] T$ für alle $\phi \in B(\sigma(A), \mathcal{A})$.

Man beachte zunächst, dass jedes Spektralmaß für $\langle \sigma(A), \mathcal{A}, H \rangle$, welches (7.2.1) erfüllt, wegen der Rechenregeln in Satz 7.1.8 auch

$$p(A) = \int p dE \quad (7.2.2)$$

für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$ erfüllt.

Zum Beweis von Satz 7.2.1 konstruieren wir als erstes einen *-Homomorphismus von $C(\sigma(A))$ nach $\mathcal{B}(H)$.

7.2.2 Lemma. *Sei $\mathbb{C}[z]$ neben den üblichen algebraischen Operationen $+$, skalares Multiplizieren und Multiplizieren (vgl. Beispiel 6.3.3) versehen mit $.* : \mathbb{C}[z] \rightarrow \mathbb{C}[z]$,*

$$.* : p(z) = a_n z^n + \dots + a_0 \mapsto p^*(z) := \overline{a_n} z^n + \dots + \overline{a_0}.$$

Dann ist $.$ konjugiert linear und involutorisch, und es gilt $(p \cdot q)^* = q^* \cdot p^* = p^* \cdot q^*$ für alle $p, q \in \mathbb{C}[z]$.*

Ist $A = A^ \in \mathcal{B}(H)$, so gilt zudem für den Einsetzhomomorphismus*

$$\phi_A : \begin{cases} \mathbb{C}[z] & \rightarrow \mathcal{B}(H) \\ p & \mapsto p(A) \end{cases}, \quad (7.2.3)$$

$\phi_A(p^*) = \phi_A(p)^*$ sowie

$$\|\phi_A(p)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|p|_{\sigma(A)}\|_{\infty}.$$

Beweis. Die Gültigkeit der algebraischen Rechenregeln für $.*$ ist einfach nachzuprüfen. Weiters haben wir schon im Absatz vor Satz 6.3.7 festgestellt, dass ϕ_A ein Algebren-Homomorphismus ist. Für $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ gilt zudem

$$[p(A)]^* = [a_n A^n + \dots + a_0 I]^* = \overline{a_n} A^n + \dots + \overline{a_0} I = p^*(A).$$

Um die Norm von $p(A)$ zu berechnen, benützen wir den Spektralabbildungssatz und Proposition 6.5.5. Es gilt

$$\begin{aligned} \|p(A)\|_{\mathcal{B}(H)} &= r(p(A)) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(p(A))\} = \max \{|\lambda| : \lambda \in p(\sigma(A))\} \\ &= \max \{|p(z)| : z \in \sigma(A)\} = \|p|_{\sigma(A)}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

□

7.2.3 Proposition. *Sei $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutiger beschränkter $*$ -Homomorphismus $\Phi_A : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$, sodass $\Phi_A(p|_{\sigma(A)}) = \phi_A(p) = p(A)$ für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ gilt.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[z] & \xrightarrow{p \mapsto p|_{\sigma(A)}} & C(\sigma(A)) \\ & \searrow \phi_A & \downarrow \exists! \Phi_A \\ & & \mathcal{B}(H) \end{array}$$

Beweis. Versetzen wir $C(\sigma(A))$ mit $.^* : f \mapsto \bar{f}$, so ist die Abbildung $p \mapsto p|_{\sigma(A)}$ von $\mathbb{C}[z]$ nach $C(\sigma(A))$ linear und mit der Multiplikation sowie mit $.^*$ verträglich, wobei bei letzterer Verträglichkeit $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ maßgeblich einfließt. Das Bild

$$\mathcal{P} := \{p|_{\sigma(A)} : p \in \mathbb{C}[z]\}$$

von $p \mapsto p|_{\sigma(A)}$ ist somit eine bezüglich $.^*$ abgeschlossene Unteralgebra von $C(\sigma(A))$, welche offenbar alle linearen Abbildungen der Form $x \mapsto \alpha x + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ enthält. Also ist \mathcal{P} nirgends verschwindend und punktetrennend, womit wegen dem Satz von Stone-Weierstraß

$$\overline{\mathcal{P}}^{C(\sigma(A))} = C(\sigma(A)). \quad (7.2.4)$$

Nun ist die Abbildung

$$\hat{\phi}_A : \begin{cases} \mathcal{P} & \rightarrow \mathcal{B}(H) \\ p|_{\sigma(A)} & \mapsto \phi_A(p) = p(A) \end{cases}$$

wohldefiniert, da aus $p|_{\sigma(A)} = q|_{\sigma(A)}$ die Beziehung $\|p|_{\sigma(A)} - q|_{\sigma(A)}\|_{\infty} = \|0\|_{\infty} = 0$ und wegen Lemma 7.2.2 weiter $\|p(A) - q(A)\|_{\mathcal{B}(H)} = 0$ bzw. $p(A) = q(A)$ folgt. Offensichtlich gilt $\hat{\phi}_A(1) = I$.

Da sowohl $p \mapsto p|_{\sigma(A)}$ also auch ϕ_A linear und mit der Multiplikation sowie mit $.^*$ verträglich sind, folgt dasselbe für $\hat{\phi}_A$. Weiters ist $\hat{\phi}_A$, wieder wegen Lemma 7.2.2, isometrisch.

Sei schließlich Φ_A die eindeutige Fortsetzung von $\hat{\phi}_A$ durch Stetigkeit zu einer isometrischen Abbildung von $\overline{\mathcal{P}}^{C(\sigma(A))} = C(\sigma(A))$ nach $\mathcal{B}(H)$, vgl. Satz 2.5.2. Da alle Rechenregeln für $*$ -Algebren, sowie für $*$ -Homomorphismen nur stetige Ausdrücke enthalten, übertragen sich durch die Eindeutigkeit von stetigen Fortsetzungen alle Rechenregeln von $\hat{\phi}_A$ auf Φ_A . Also ist Φ_A ein beschränkter $*$ -Homomorphismus von der C^* -Algebra $C(\sigma(A))$ nach $\mathcal{B}(H)$.

□

Jetzt können wir Satz 7.1.11 einsetzen, um das gewünschte Spektralmaß zu erhalten.

Beweis (von Satz 7.2.1). Sei $\Phi_A : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ der *-Homomorphismus aus Proposition 7.2.3. Weiters sei E das Spektralmaß aus Satz 7.1.11, welches Φ_A als $\Phi_A(\phi) = \int \phi dE$ darstellt. Da $q(z) := z$ ein Polynom ist, gilt

$$A = \Phi_A(q) = \int q|_{\sigma(A)} dE = \int t dE(t).$$

Für ein $T \in \mathcal{B}(H)$ gilt nach Korollar 7.1.13 $TE(\Delta) = E(\Delta)T$ für alle Borelmengen Δ genau dann, wenn T mit allen $\Phi_A(\phi)$, $\phi \in C(\sigma(A))$, vertauscht, bzw. genau dann, wenn T mit allen $\Phi_E(\phi) = [\int \phi dE]$, $\phi \in B(\sigma(A), \mathcal{A})$ vertauscht. Wegen $q|_{\sigma(A)} = (t \mapsto t) \in C(\sigma(A))$, folgt daraus $AT = TA$.

Gilt umgekehrt $AT = TA$, so folgt auch $p(A)T = Tp(A)$ für jedes Polynom p . Da sowohl $\phi \mapsto \Phi_A(\phi)T$ als auch $\phi \mapsto T\Phi_A(\phi)$ stetig als Abbildungen von $C(\sigma(A))$ nach $\mathcal{B}(H)$ sind, und da beide auf der dichten Menge $\mathcal{P} (\subseteq C(\sigma(A)))$ übereinstimmen, folgt dass auch $\Phi_A(\phi)T = T\Phi_A(\phi)$ für alle $\phi \in C(\sigma(A))$, vgl. (7.2.4).

Ist \tilde{E} ein weiteres Spektralmaß für $\langle \sigma(A), \mathcal{A}, H \rangle$, welches (7.2.1) erfüllt, so folgt auch für dieses Maß (7.2.2), dh.

$$\int p dE = \Phi_A(p|_{\sigma(A)}) = p(A) = \int p d\tilde{E} \quad \text{für alle } p \in \mathbb{C}[z].$$

Da die Abbildung $\phi \mapsto \int \phi d\tilde{E}$ ein beschränkter *-Homomorphismus auf $C(\sigma(A))$ ist, vgl. Satz 7.1.8, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 7.2.3, dass $\Phi_A(\phi) = \int \phi d\tilde{E}$ für alle $\phi \in C(\sigma(A))$. Schließlich folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 7.1.11, dass $E = \tilde{E}$, wenn man beachtet, dass auf $\sigma(A)$ als kompakte Teilmenge von \mathbb{R} alle komplexen Borelmaß regulär sind, vgl. Bemerkung 7.1.3. □

7.2.4 Bemerkung. Ist E das Spektralmaß zu $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$, so können wir dieses durch $F(\Delta) := E(\Delta \cap \sigma(A))$, wobei $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, also eine Borelteilmenge von \mathbb{R} ist, zu einem Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), H \rangle$ fortsetzen. Offensichtlich hat F kompakten Träger, dh. $F(\mathbb{R} \setminus K) = 0$ für eine gewisse kompakte Teilmenge von \mathbb{R} ; zB. $K = \sigma(A)$.

Bezeichnet $\iota : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt für $g, h \in H$ und $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$E_{g,h}^\iota(\Delta) := E_{g,h}(\iota^{-1}(\Delta)) = E_{g,h}(\Delta \cap \sigma(A)) = F_{g,h}(\Delta).$$

Aus der bekannten Transformationsregel (die auch für komplexe Maße gilt) aus der Maßtheorie folgt für ein beschränktes messbares $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi dF_{g,h} = \int_{\mathbb{R}} \phi dE_{g,h}^\iota = \int_{\sigma(A)} \phi \circ \iota dE_{g,h} = \int_{\sigma(A)} \phi|_{\sigma(A)} dE_{g,h},$$

und daher $\int_{\mathbb{R}} \phi dF = \int_{\sigma(A)} \phi|_{\sigma(A)} dE$. Insbesondere gilt $\int_{\mathbb{R}} t \cdot \mathbf{1}_K(t) dF(t) = A$, wobei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und derart ist, dass $K \supseteq \sigma(A)$.

Sei nun umgekehrt \tilde{F} ein Spektralmaß mit kompaktem Träger für $\langle \mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), H \rangle$, sodass $\int_{\mathbb{R}} t \cdot \mathbf{1}_K(t) d\tilde{F}(t) = A$ mit einem kompakten $K \subseteq \mathbb{R}$, sodass $\tilde{F}(\mathbb{R} \setminus K) = 0$. Indem wir K nötigenfalls durch $K \cup \sigma(A)$ ersetzen, können wir $K \supseteq \sigma(A)$ annehmen. Aus den Rechenregeln in Satz 7.1.8 folgt

$$p(A) = \int p \cdot \mathbf{1}_K d\tilde{F}$$

für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$. Die selbe Gleichheit gilt für das eben mit E konstruierte Spektralmaß F . Da $\{p|_K : p \in \mathbb{C}[z]\}$ dicht in $C(K)$ sind, folgt aus $\|\Phi_F\| = \|\Phi_{\tilde{F}}\| = 1$ (vgl. Satz 7.1.8), dass $\int \phi \cdot \mathbf{1}_K d\tilde{F} = \int \phi \cdot \mathbf{1}_K dF$ für alle $\phi \in C(K)$.

Als Zusammensetzung der beschränkten *-Homomorphismen $\phi \mapsto \phi \cdot \mathbf{1}_K$ von $C(K)$ nach $B(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ und Φ_F ist $\phi \mapsto \int \phi \cdot \mathbf{1}_K dF$ ein beschränkter *-Homomorphismus und stimmt mit $\phi \mapsto \int \phi \cdot \mathbf{1}_K d\tilde{F}$ überein. Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 7.1.11 angewandt auf $\Omega = K$ ergibt $F(\Delta) = \tilde{F}(\Delta)$ für alle Borel-Teilmengen $\Delta \subseteq K$. Wegen $\tilde{F}(\mathbb{R} \setminus K) = 0 = F(\mathbb{R} \setminus K)$ folgt $F = \tilde{F}$.

Also ist F das eindeutige Spektralmaß mit kompaktem Träger für $\langle \mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), H \rangle$, sodass $\int_{\mathbb{R}} t \cdot \mathbf{1}_K(t) dF(t) = A$ für ein gewisses kompaktes $K \subseteq \mathbb{R}$ mit $F(\mathbb{R} \setminus K) = 0$. //

7.2.5 Bemerkung. Wir bemerken noch, dass für $\Phi = \Phi_A$ auch Korollar 7.1.13 gilt, und wir damit jeder beschränkten und messbaren Funktion $\phi : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ einen normalen Operator $\Phi_E(\phi) = \int \phi dE$ zuordnen können. Wir erhalten also einen *Funktionalkalkül* für $B(\sigma(A), \mathcal{A})$. Da für $\phi \in C(\sigma(A))$, $\Phi_A(\phi) = \Phi_E(\phi)$, und da Φ_A sogar isometrisch ist, gilt dabei

$$\left\| \int \phi dE \right\| = \|\phi\|_{\infty} \quad \text{für alle } \phi \in C(\sigma(A)). \quad (7.2.5)$$

//

7.2.6 Beispiel. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Betrachte den Multiplikationsoperator $M \in L^2(a, b)$ mit Symbol $\phi(x) := x$. Dieser ist selbstadjungiert, und $\sigma(M) = [a, b]$. Das Spektralmaß E von M ist gegeben als

$$E(\Delta) := M_{\mathbf{1}_{\Delta}}, \quad \Delta \subseteq [a, b] \text{ Borelmenge.}$$

Zunächst überprüfen wir, dass E ein Spektralmaß auf $[a, b]$ ist. Dazu bemerke, dass

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{1}_{\Delta}}^2 &= M_{\mathbf{1}_{\Delta}^2} = M_{\mathbf{1}_{\Delta}}, & M_{\mathbf{1}_{\Delta}}^* &= M_{\overline{\mathbf{1}_{\Delta}}} = M_{\mathbf{1}_{\Delta}}, \\ M_{\mathbf{1}_{\emptyset}} &= 0, & M_{\mathbf{1}_{[a,b]}} &= I, & M_{\mathbf{1}_{\Delta_1}} M_{\mathbf{1}_{\Delta_2}} &= M_{\mathbf{1}_{\Delta_1} \mathbf{1}_{\Delta_2}} = M_{\mathbf{1}_{\Delta_1 \cap \Delta_2}}, \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} M_{\mathbf{1}_{\Delta_n}} &= M_{\mathbf{1}_{\sum_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n}} = M_{\mathbf{1}_{\cup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n}}, & \Delta_n & \text{ paarweise disjunkt.} \end{aligned}$$

Betrachte für $g, h \in L^2(a, b)$ das komplexe Maß $E_{g,h}(\Delta) := (E(\Delta)g, h)$. Es gilt

$$E_{g,h}(\Delta) = (E(\Delta)g, h) = \int_{[a,b]} (\mathbf{1}_{\Delta} g) \bar{h} dt = \int_{\Delta} g \bar{h} dt.$$

Wegen $g\bar{h} \in L^1(a, b)$ ist $E_{g,h}$ absolut stetig bezüglich des Lebesgue Maßes mit der Dichte $g\bar{h}$. Für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ folgt

$$\begin{aligned} \left(\left[\int p dE \right] g, h \right) &= \int_{[a,b]} p dE_{g,h} = \int_{[a,b]} p \cdot g\bar{h} dt \\ &= \int_{[a,b]} p(M)g \cdot \bar{h} dt = (p(M)g, h); \end{aligned}$$

also ist $\int p dE = p(M)$. //

7.2.7 Beispiel. Sei $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert und gelte $\sigma(A) \subseteq [0, \infty)$. Dann existiert ein selbstadjungierte Operator $B \in \mathcal{B}(H)$ mit $B^2 = A$. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem Funktionalkalkül, denn die Funktion $\phi : x \mapsto +\sqrt{x}$ ist eine stetige Funktion auf $\sigma(A)$. Setzt man $B := \Phi_A(\phi)$, so gilt offenbar

$$B^2 = \Phi_A(\phi)^2 = \Phi_A(\phi^2) = \Phi_A(\text{id}) = A.$$

//

7.2.8 Beispiel. Sei $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert, und sei $\phi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe deren Konvergenzradius grösser als $\|A\|$ ist. Dann ist insbesondere $\phi(z)$ eine stetige Funktion auf $\sigma(A)$, also ist der Operator $\Phi_A(\phi)$ wohldefiniert. Wir können aber auch in anderer, ebenfalls natürlicher, Weise einen Operator mit A und ϕ assoziieren. Dazu setzen wir

$$B := \sum_{n=1}^{\infty} a_n A^n.$$

Diese Reihe konvergiert, aufgrund unserer Annahme betreffend des Konvergenzradius von ϕ , in der Operatornorm. Da $\phi(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n z^n$ gleichmässig auf $\sigma(A)$ gilt, ist

$$\begin{aligned} B &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n A^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n \Phi_A(z^n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_A \left(\sum_{n=0}^N a_n z^n \right) = \Phi_A \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n z^n \right) = \Phi_A(\phi). \end{aligned}$$

//

7.2.9 Bemerkung. Der Spektralsatz Satz 7.2.1 gilt genauso für jeden normalen Operator. Vergleicht man das mit der linearen Algebra, so überrascht diese Tatsache nicht, denn es kann ja auch jede normale Matrix mit einer geeigneten Basistransformation auf Diagonalform gebracht werden. Der Beweis des Spektralsatzes für normale Operatoren erfordert aber ein tief liegendes Hilfsmittel – die sogenannte Gelfand-Transformation – aus der Theorie der C^* -Algebren, das wir hier aber nicht zur Verfügung haben.

Analysiert man den Beweis den wir hier für selbstadjungierte Operatoren gegeben haben, so stellt man fest, dass der zweite Teil des Beweises, nämlich

die Konstruktion des Spektralmaßes mit Hilfe von Satz 7.1.11, auch für normale Operatoren funktioniert. Der wesentliche Punkt ist also die Konstruktion eines *-Homomorphismus von $C(\sigma(A))$ nach $\mathcal{B}(H)$. Ist A nun nicht selbstadjungiert, sondern nur normal, so steht man vor dem Problem, dass es nicht ausreicht Polynomfunktionen $p(z)|_{\sigma(A)}$ zu betrachten, da $\sigma(A)$ im Allgemeinen nicht reell ist und wir daher den Satz von Stone-Weierstraß nicht auf $\{p(z)|_{\sigma(A)} : p \in \mathbb{C}[z]\}$ anwenden können, weil diese Algebra nicht bezüglich komplexer Konjugation abgeschlossen ist. Versucht man diese Schwierigkeit zu beseitigen indem man Polynome $p(z, \bar{z})$ in den beiden Variablen z und \bar{z} betrachtet, so hat man das Problem zu zeigen, dass $\|p(N, N^*)\|_{\mathcal{B}(H)} \leq \|p(z, \bar{z})|_{\sigma(A)}\|$, denn jetzt können wir den Spektralabbildungssatz nicht mehr einsetzen. Tatsächlich ist genau diese Stelle der Punkt, wo man ein tiefliegenderes Instrument benötigt. //

Aus dem Spektralsatz erhalten wir Normalformen für selbstadjungierte Operatoren. Um den technischen Aufwand zu reduzieren, beschränken wir uns auf den Fall, dass A einen *zyklischen Vektor* besitzt, d.h. dass es ein Element $u \in H$ gibt mit

$$\overline{\text{span}\{A^n u : n = 0, 1, 2, \dots\}} = H.$$

7.2.10 Korollar. *Sei H ein Hilbertraum, und $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert. Sei vorausgesetzt, dass A einen zyklischen Vektor besitzt. Dann existiert ein endliches positives Borelmaß μ auf $\sigma(A)$ und ein isometrischer und bijektiver Operator $U : L^2(\mu) \rightarrow H$, sodass $A \circ U = U \circ M_t$, wobei M_t den Multiplikationsoperator $f(t) \mapsto tf(t)$ in $L^2(\mu)$ bezeichnet.*

Beweis. Sei E das Spektralmaß von A , sei u ein zyklischer Vektor für A , und setze $\mu := E_{u,u}$. Dann ist $\mu(\Delta) = (E(\Delta)u, u) = \|E(\Delta)u\|^2 \geq 0$. Betrachte die Abbildung

$$\psi : \begin{cases} C(\sigma(A)) & \rightarrow H \\ f & \mapsto (\int f dE)u \end{cases}$$

Aus Satz 7.1.8 wissen wir, dass

$$\|f\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_{\sigma(A)} |f|^2 dE_{u,u} = \left\| \left[\int f dE \right] u \right\|^2 = \|\psi f\|^2.$$

Nun ist $C(\sigma(A))$ dicht in $L^2(\mu)$ und $\{[\int_{\sigma(A)} f dE]u : f \in C(\sigma(A))\} \supseteq \text{span}\{A^n u : n = 0, 1, 2, \dots\}$ und daher dicht in H . Wir können also ψ zu einem isometrischen und bijektiven Operator U von $L^2(\mu)$ auf H fortsetzen.

Nun gilt für alle $f \in C(\sigma(A))$

$$\psi(M_t(f)) = \left[\int tf(t) dE \right] u = \left[\int t dE \right] \left[\int f dE \right] u = A(\psi(f)).$$

Da beide Seiten stetig von f abhängen, folgt $U \circ M_t = A \circ U$. □

Wir wollen als nächstes eine Aussage beweisen, die zeigt, dass man Eigenschaften des Spektrums von A am Spektralmaß E ablesen kann.

7.2.11 Korollar. *Sei H ein Hilbertraum, $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert, und E das Spektralmaß von A . Dann gilt für $\lambda \in \sigma(A)$ stets $\ker(A - \lambda I) = \text{ran } E(\{\lambda\})$. Insbesondere ist $\lambda \in \sigma_p(A)$ genau dann, wenn $E(\{\lambda\}) \neq 0$.*

Beweis. Für ein $g \in H$ gilt nach Satz 7.1.8 und wegen $|t - \lambda|^2 = 0$ für $t = \lambda$

$$\|(A - \lambda I)g\|^2 = \int_{\sigma(A)} |t - \lambda|^2 dE_{g,g} = \int_{\sigma(A) \setminus \{\lambda\}} |t - \lambda|^2 dE_{g,g}.$$

Da $|t - \lambda|^2 > 0$ auf $\sigma(A) \setminus \{\lambda\}$, und da das Integral einer strikt positiven Funktion nach einem (positiven) Maß genau dann verschwindet, wenn das Maß das Nullmaß ist, gilt $(A - \lambda I)g = 0$ genau dann, wenn

$$0 = E_{g,g}(\sigma(A) \setminus \{\lambda\}) = \|E(\sigma(A) \setminus \{\lambda\})g\|^2.$$

Wegen $\|g\|^2 = \|E(\sigma(A) \setminus \{\lambda\})g\|^2 + \|E(\{\lambda\})g\|^2$ ist das äquivalent zu $g = E(\{\lambda\})g$ bzw. zu $g \in \text{ran } E(\{\lambda\})$. □

Wir erhalten auch eine exakte Formel für das Wachstum der Resolvente.

7.2.12 Korollar. *Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt*

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(A))} \quad \text{für alle } \lambda \in \rho(A).$$

Beweis. Setzen wir $\phi(t) = t$, $t \in \sigma(A)$, so gilt $\mathbb{C} \setminus \overline{\phi(\sigma(A))} = \mathbb{C} \setminus \sigma(A) = \rho(A)$. Gemäß Satz 7.1.8, (v), gilt für $\lambda \in \rho(A)$

$$(A - \lambda)^{-1} = \Phi_E\left(\frac{1}{\phi - \lambda}\right) = \int (t - \lambda)^{-1} dE.$$

Wegen $\frac{1}{\phi - \lambda} \in C(\sigma(A))$ folgt aus (7.2.5)

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| = \left\| \int \frac{1}{t - \lambda} dE \right\| = \left\| \frac{1}{t - \lambda} \right\|_{\infty} = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(A))}.$$

□

Die Ungleichung „ \geq “ in Korollar 7.2.12 gilt nach (6.3.4) allgemein in Banachalgebren.

Ist A ein kompakter selbstadjungierter Operator, so kann man, aufgrund der speziellen Gestalt des Spektrums eines kompakten Operators, den Spektralsatz in einer einfacheren Form formulieren. Dazu sei an die speziellen spektralen Eigenschaften kompakter Operatoren erinnert.

Ist $A = A^*$ kompakt, so ist $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, wobei $\sigma_p(A) \setminus \{0\} = \sigma(A) \setminus \{0\}$. Insbesondere können wir $\sigma(A) \setminus \{0\}$ als $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}, n < N\}$ mit einem $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ anschreiben. Dabei sind die λ_n paarweise verschieden und wir wählen zweckmäßiger Weise die λ_n noch so, dass $|\lambda_m| \leq |\lambda_n|$ für $n \leq m$. Setzen wir $P_n = E(\{\lambda_n\})$, so ist gemäß Korollar 7.2.11 P_n die orthogonale Projektion auf $\ker(A - \lambda_n)$. Außerdem gilt (im starken Sinne)

$$\sum_{1 \leq n < N} P_n = \sum_{1 \leq n < N} E(\{\lambda_n\}) = E(\sigma(A) \setminus \{0\}) = I - E(\sigma(A) \cap \{0\}). \quad (7.2.6)$$

Insbesondere ist der Abschluss der linearen Hülle der Bildbereiche von den P_n genau das orthogonale Komplement von $\text{ran } E(\sigma(A) \cap \{0\}) = \ker A$ (vgl. Korollar 7.2.11). Damit gilt $0 \notin \sigma_p(A)$ genau dann, wenn die linearen Hülle der Bildbereiche der P_n dicht in H sind.

Setzen wir $f(t) = t$, $t \in \sigma(A)$, so erfüllt auf $\sigma(A)$ die Funktionenfolge $f_n(t) = t \mathbf{1}_{\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}}(t)$ für $n+1 < N$

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_\infty &= \sup_{t \in \sigma(A)} |t \mathbf{1}_{\sigma(A) \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}}(t)| = \sup_{t \in \sigma(A)} |t \mathbf{1}_{\{\lambda_j : n+1 \leq j < N\}}(t)| \\ &= \sup\{|\lambda_j| : n+1 \leq j < N\} = |\lambda_{n+1}| \end{aligned}$$

und im Falle $N < \infty$ und $n+1 = N$ sogar $\|f_n - f\|_\infty = 0$. Nun gilt $A = \int f dE$ sowie

$$\int f_n dE = \sum_{j=1}^n \int t \mathbf{1}_{\{\lambda_j\}}(t) dE(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j E(\{\lambda_j\}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j.$$

Wegen $f, f_n \in C(\sigma(A))$ folgt aus (7.2.5)

$$\|A - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j\| = \left\| \int f dE - \int f_n dE \right\| = \|f_n - f\|_\infty.$$

Im Fall $N < \infty$ ist also $A = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j P_j$ und sonst gilt $A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j$ bzgl. der Operatornorm.

Wählt man nun Orthonormalbasen $\{v_{n,1}, \dots, v_{n,d_n}\}$ von $\ker(A - \lambda_n I)$ – nach Satz 6.4.11 ist $\ker(A - \lambda_n I)$ ja endlichdimensional – und $\{w_j : j \in J\}$ von $\ker A$, falls $\ker A \neq \{0\}$, so folgt aus (7.2.6) (siehe auch Lemma 7.1.2), dass

$$\overline{\text{span}(\{v_{n,1}, \dots, v_{n,d_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{w_j : j \in J\})} = \text{ran} \left(\underbrace{\sum_{\lambda \in \sigma(A)} E(\{\lambda\})}_{=I} \right) = H.$$

Also haben wir ein Orthonormalsystem bestehend aus Eigenvektoren gefunden. Stellen wir ein $x \in H$ mit dieser ONB als Fourierreihe

$$x = \sum_{n,k} (x, v_{n,k}) v_{n,k} + \sum_j (x, w_j) w_j$$

dar, so gilt

$$Ax = A \left(\sum_{n,k} (x, v_{n,k}) v_{n,k} \right) = \sum_{n,k} (x, v_{n,k}) A v_{n,k} = \sum_{n,k} \lambda_n (x, v_{n,k}) v_{n,k}.$$

Somit haben wir folgende Version des Spektralsatzes für kompakte selbstadjungierte Operatoren bewiesen.

7.2.13 Korollar (Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren). *Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{B}(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Schreiben wir $\sigma(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ als endliche oder unendliche Folge mit paarweise verschiedenen λ_n , und bezeichnen wir mit P_n die orthogonale Projektion auf $\ker(A - \lambda_n I)$, so gilt $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $P_n P_m = P_m P_n = 0$, $m \neq n$, und*

$$A = \sum_{n \geq 1} \lambda_n P_n, \quad (7.2.7)$$

wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert.

Ist u_i , $i \in I$, eine ONB von H bestehend aus Eigenvektoren von A – eine solche gibt es immer – so gilt für jedes $x \in H$ entwickelt in eine Fourierreihe

$$x = \sum_{i \in I} \hat{x}(i) u_i,$$

dass

$$Ax = \sum_{i \in I} \lambda_{(i)} \hat{x}(i) u_i,$$

wobei die $\lambda_{(i)}$ jenen Eigenwert bezeichnet, zu dem u_i Eigenvektor ist.

Man erhält eine oft praktische Methode, die Eigenwerte von A zu berechnen.

7.2.14 Korollar. Sei H ein Hilbertraum, $A \in \mathcal{B}(H)$ kompakt und selbstadjungiert, sodass $\sigma(A) \subseteq [0, +\infty)$. Bezeichne mit λ_n , $n \in \mathbb{N}$, $n < N$, mit einem festen $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Folge der positiven Eigenwerte von A , wobei

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots > 0,$$

und wobei jeder Eigenwert gemäß seiner Vielfachheit oft aufgelistet wird, dh. für $\lambda \in \sigma(A) \cap (0, +\infty)$ stimmt die Anzahl der $k \in \mathbb{N}$, sodass $\lambda_k = \lambda$, mit $\dim \ker(A - \lambda)$ überein. Dann gilt

$$\lambda_n = \inf_{\substack{V \leq H \\ \dim V = n-1}} \sup_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} (Ax, x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n < N, \quad (7.2.8)$$

wobei das Infimum ein Minimum ist.

Beweis. Gemäß unserer Zählung der Eigenwerte finden wir ein Orthonormalsystem $\{u_k : 1 \leq k < N\}$ von H , sodass $Au_k = \lambda_k u_k$ und sodass $\text{span}\{u_k : \lambda_k = \lambda\} = \ker(A - \lambda I)$ für jedes $\lambda \in \sigma(A) \cap (0, +\infty)$. Setze $M_m := \text{span}\{u_1, \dots, u_m\}$, $1 \leq m < N$. Dann gilt gemäß Korollar 7.2.13

$$M_m^\perp = \overline{\text{span}\{u_k : m < k < N\}} \oplus \ker A.$$

Für $n < N$ und $x = y + \sum_{n \leq k < N} \alpha_k u_k \in M_{n-1}^\perp$ mit $y \in \ker A = \text{ran } A^\perp$ gilt

$$(Ax, x) = \sum_{n \leq k < N} \lambda_k |\alpha_k|^2 \leq \lambda_n \sum_{n \leq k < N} |\alpha_k|^2 \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Wegen $\dim M_{n-1} = n - 1$ sehen wir, dass die Ungleichung „ \geq “ in (7.2.8) gilt.

Umgekehrt, sei $\dim V = n - 1$, dann ist $V^\perp \cap M_n \neq \{0\}$. Für $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k \in M_n$ ist aber stets

$$(Ax, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\alpha_k|^2 \geq \lambda_n \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 = \lambda_n \|x\|^2.$$

□

Man zeigt unschwer mit ähnlicher Argumentation, dass für $N \in \mathbb{N}$ und $N \leq n \leq \dim H$ die rechte Seite von (7.2.8) immer Null ist.

7.3 Sturm-Liouville Differentialgleichungen

Sei q eine stetige reellwertige Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$, $f \in L^2(0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein komplexer Parameter, und $(\alpha, \alpha_1), (\beta, \beta_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -h'' + qh - \lambda h &= f \\ \alpha h(0) + \alpha_1 h'(0) &= 0, \quad \beta h(1) + \beta_1 h'(1) = 0, \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

und fragen nach der Existenz von Lösungen bzw. nach einer Beschreibung der Lösungsmenge. Randwertprobleme dieser speziellen Gestalt heißen auch *Sturm-Liouville Probleme*, und treten in vielen Fragestellungen der Physik auf.

7.3.1 Beispiel. Betrachte eine zwischen zwei festen Punkten $(0, 0)$ und $(1, 0)$ eingespannte, in der (x, y) -Ebene schwingende Saite. Sei $p \in C([0, 1])$, $p > 0$, die Massendichte der Saite. Weiters sei $u(t, x)$ die Auslenkungen der Saite an der Stelle x zum Zeitpunkt t . Dann erfüllt u die Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Da die Saite eingespannt ist, gilt für jedes t

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0.$$

Um eine Lösung $u(t, x)$ zu finden, versuchen wir einen Separationsansatz $u(t, x) = T(t)X(x)$. Setzt man in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\ddot{T}(t)X(x) = T(t)(p(x)X'(x))',$$

wobei Punkte die Ableitung nach der Zeitvariablen t und Striche die Ableitung nach der Ortsvariablen x bezeichnen. Weiters gelten die Randbedingungen $T(t)X(0) = T(t)X(1) = 0$ für alle t .

Setzt man voraus, dass keine der auftretenden Funktionen identisch Null ist, was ja ohnehin ein nicht sehr interessanter Fall wäre, so erhält man

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{(p(x)X'(x))'}{X(x)},$$

sowie $X(0) = X(1) = 0$. Die linke Seite dieser Beziehung hängt nur von t ab, die rechte nur von x , also müssen beide Seiten gleich ein und derselben Konstanten λ sein.

Die allgemeine Lösung der Gleichung $\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \lambda$ lässt sich sofort hinschreiben. Komplizierter ist die Gleichung die sich auf der rechten Seite ergibt:

$$\frac{(p(x)X'(x))'}{X(x)} = \lambda, \quad X(0) = X(1) = 0. \quad (7.3.2)$$

Wir stehen als allererstes vor dem Problem herauszufinden, für welche λ diese Gleichung überhaupt lösbar ist. Dass dieses Problem nicht trivial ist, zeigt uns schon der Spezialfall $p(x) = 1$, $x \in [0, 1]$. In diesem Fall sieht man elementar, dass es eine Lösung gibt genau dann, wenn λ von der Gestalt $\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$, ist, und dass die Lösung für $\lambda = \pi^2 n^2$ ein skalares Vielfaches von $\sin(n\pi x)$ ist.

Macht man eine geeignete Variablensubstitution, so kann man das Problem (7.3.2) in ein Sturm-Liouville Problem umformulieren. //

7.3.2 *Beispiel.* Betrachte ein Teilchen, dass sich in einem eindimensionalen Medium zwischen zwei Barrieren 0 und 1 unter dem Einfluss eines elektrischen Potentials $V(x)$, $x \in [0, 1]$, aufhält. Sei $\Psi(t, x)$, $\int_0^1 |\Psi(t, x)|^2 dx = 1$, jene Funktion, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen zum Zeitpunkt t sich im Abschnitt U des Leiters befindet gleich

$$P(t, U) = \int_U |\Psi(t, x)|^2 dx$$

ist. Dann besagt die Schrödinger Gleichung, dass

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

gilt. Dabei ist \hbar das Plank'sche Wirkungsquantum und m die Masse des Teilchens.

Wir machen wieder einen Separationsansatz $\Psi(t, x) = T(t)X(x)$, und erhalten

$$i\hbar \frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{X''(x)}{X(x)} + V(x),$$

also muss für eine gewisse Konstante λ

$$i\hbar \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \quad \text{und} \quad -\frac{\hbar}{2m} \frac{X''(x)}{X(x)} + V(x) = \lambda$$

gelten. Es folgt dass T ein skalares Vielfaches von $e^{i\lambda t}$ sein muss. Für X haben wir wieder ein Sturm-Liouville Problem erhalten. Aus physikalischen Gründen nimmt man wieder die Randbedingungen $X(0) = X(1) = 0$ hinzu.

Die in dieser Weise erhaltenen Lösungen (soferne man welche erhält), haben die interessante Eigenschaft, dass $P(t, U)$ nicht von der Zeit abhängt. Sie beschreiben also die stationären Zustände des Teilchens. Tatsächlich ist für diese Zustände nicht nur die Aufenthaltswahrscheinlichkeit von der Zeit unabhängig, sondern alle durch Messung ermittelbaren Größen. //

Wir kommen nun zu unserer Untersuchung des Randwertproblems (7.3.1). Als erstes müssen wir uns klar machen, welche Eigenschaften eine Funktion zumindest haben muß, damit der Differentialausdruck auf der linken Seite von (7.3.1) überhaupt wohldefiniert ist: Da wir $f \in L^2(0, 1)$ voraussetzen, muss die Funktion h differenzierbar sein, ihre Ableitung h' noch absolut stetig sein und h'' im $L^2(0, 1)$ liegen.

7.3.3 *Bemerkung.* Warum nehmen wir nicht $f \in C([0, 1])$ und betrachten zwei mal stetig differenzierbare Funktionen h ? Wir werden den Operator $L : h \mapsto -h'' + qh$ betrachten. Dieser würde dann $C^2[0, 1]$ nach $C([0, 1])$ abbilden, also zwischen unterschiedlichen Räumen agieren. Versieht man $C([0, 1])$ mit der Supremumsnorm und $C^2[0, 1]$ mit der Norm $\|f\| := \sum_{n=0}^2 \|f^{(n)}\|_\infty$, so hat man einen beschränkten Operator zwischen zwei Banachräumen. Es ist aber viel besser L als (nicht beschränkter) Operator vom $L^2(0, 1)$ in sich selbst zu betrachten, denn dann hat man das mächtige Instrument der Spektraltheorie in Hilberträumen zur Verfügung. //

7.3.4 Definition. Sei

$$D_0 := \{h \in C^1(0, 1) : h' \text{ absolut stetig}, h'' \in L^2(0, 1), \alpha h(0) + \alpha_1 h'(0) = 0\},$$

$D_1 := \{h \in C^1(0, 1) : h' \text{ absolut stetig, } h'' \in L^2(0, 1), \beta h(1) + \beta_1 h'(1) = 0\}$,
 $D := D_0 \cap D_1$, und sei $L : D \rightarrow L^2(0, 1)$ definiert als

$$Lh := -h'' + qh, \quad h \in D.$$

Der Operator L heißt auch *Sturm-Liouville Operator mit Potential q* .

Offenbar ist L eine lineare Abbildung. Wir machen im Folgenden stets die

Generalvoraussetzung: L ist injektiv, d.h. ist $h \in D$ und $Lh = 0$, so folgt $h = 0$.

Man kann zeigen, dass immer eine geeignete reelle Zahl α_0 existiert, sodass diese Voraussetzung für $q - \alpha_0$ (anstelle von q) gilt. Offenbar sind die Randwertprobleme für q und $q - \alpha_0$, bis auf eine Verschiebung des Eigenwertparameters λ äquivalent.

Wegen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes für Lösungen von linearen Differentialgleichungen, gibt es reellwertige Funktionen $h_0, h_1 \in C^2[0, 1]$ die nicht identisch Null sind, und die

$$Lh_0 = Lh_1 = 0, \quad h_0 \in D_0, h_1 \in D_1,$$

erfüllen. Wegen der Eindeutigkeitsaussage sind diese bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt, und es gilt $(h_0(x), h_0'(x)), (h_1(x), h_1'(x)) \neq (0, 0)$, $x \in [0, 1]$.

7.3.5 Lemma. *Sei W die Wronski-Determinante*

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ h_0' & h_1' \end{pmatrix}$$

der Funktionen h_0 und h_1 . Dann gilt $W(0) \neq 0$. Insbesondere sind h_0 und h_1 linear unabhängig.

Beweis. Angenommen es ist $W(0) = 0$. Dann existiert $(\mu_0, \mu_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, sodass

$$\mu_0(h_0(0), h_0'(0)) = \mu_1(h_1(0), h_1'(0)).$$

Da $(h_0(0), h_0'(0)) \neq (0, 0)$, muß $\mu_1 \neq 0$ sein. Wir erhalten, dass h_1 der Randbedingung bei 0 genügt, da ja $\frac{\mu_0}{\mu_1} h_0$ dies tut. Es folgt $h_1 \in D_1 \cap D_0 = D$, und wegen unserer Generalvoraussetzung folgt $h_1 = 0$, ein Widerspruch. \square

Es gilt

$$W'(x) = (h_0 h_1' - h_0' h_1)' = h_0' h_1' + h_0 h_1'' - h_0'' h_1 - h_0' h_1' = h_0 q h_1 - q h_0 h_1 = 0.$$

Also ist W eine von Null verschiedene Konstante.

Sei $g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{W} h_0(x) h_1(y) & , 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{W} h_1(x) h_0(y) & , 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Beachte, dass g wohldefiniert ist, reellwertig, stetig, und der Symmetriebedingung $g(x, y) = g(y, x)$ genügt. Sie heißt die *Green'sche Funktion für L* .

7.3.6 Satz. Sei g die Green'sche Funktion für L , und $G : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ der Integraloperator

$$(Gf)(x) := \int_0^1 g(x, y)f(y) dy, \quad f \in L^2(0, 1).$$

Dann ist G ein kompakter und selbstadjungierter Operator in $L^2(0, 1)$. Es gilt

$$\operatorname{ran} G = D, \quad LGf = f, \quad f \in L^2(0, 1), \quad GLh = h, \quad h \in D, \quad (7.3.3)$$

d.h. L^{-1} ist ein kompakter selbstadjungierter Operator am $L^2(0, 1)$. Ist $\lambda \in \sigma_p(G)$, so ist $\lambda \neq 0$ und es gilt $\dim \ker(G - \lambda) = 1$.

Beweis. Wir wissen aus den Übungsaufgaben, dass G kompakt und selbstadjungiert ist. Wir müssen zeigen, dass alle Gleichungen in (7.3.3) gelten.

Sei $f \in L^2(0, 1)$ und setze $h := Gf$. Setze

$$H_0(x) := \frac{1}{W} \int_0^x h_0(y)f(y) dy, \quad H_1(x) := \frac{1}{W} \int_x^1 h_1(y)f(y) dy,$$

dann sind H_0 und H_1 absolut stetig und $H'_0 = W^{-1}h_0f$, $H'_1 = -W^{-1}h_1f$, fast überall. Es gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^1 g(x, y)f(y) dy \\ &= W^{-1} \int_0^x h_0(y)h_1(x)f(y) dy + W^{-1} \int_x^1 h_0(x)h_1(y)f(y) dy \\ &= H_0(x)h_1(x) + H_1(x)h_0(x). \end{aligned}$$

Daher ist h absolut stetig, damit fast überall differenzierbar, und es gilt

$$h' = (W^{-1}h_0f)h_1 + H_0h'_1 + (-W^{-1}h_1f)h_0 + H_1h'_0 = H_0h'_1 + H_1h'_0, \quad \text{f.ü.}$$

Wir erhalten nach dem Hauptsatz der Differential-Integralrechnung

$$h(x) = h(0) + \int_0^x h'(y) dy = h(0) + \int_0^x (H_0(y)h'_1(y) + H_1(y)h'_0(y)) dy, \quad x \in [0, 1].$$

Die Funktion $H_0h'_1 + H_1h'_0$ ist stetig, also folgt dass h sogar überall differenzierbar ist und $h'(x) = H_0(x)h'_1(x) + H_1(x)h'_0(x)$ sogar für alle x gilt. Wir sehen, dass h' auch absolut stetig ist, und dass

$$h'' = (W^{-1}h_0f)h'_1 + H_0h''_1 + h''_0H_1 + h'_0(-W^{-1}h_1f) \in L^2(0, 1).$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} \alpha h(0) + \alpha_1 h'(0) &= \alpha [H_0(0)h_1(0) + H_1(0)h_0(0)] + \alpha_1 [H_0(0)h'_1(0) + H_1(0)h'_0(0)] \\ &= H_1(0)(\alpha h_0(0) + \alpha_1 h'_0(0)) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta h(1) + \beta_1 h'(1) &= \beta [H_0(1)h_1(1) + H_1(1)h_0(1)] + \beta_1 [H_0(1)h'_1(1) + H_1(1)h'_0(1)] \\ &= H_0(1)(\beta h_1(1) + \beta_1 h'_1(1)) = 0. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also $h \in D$. Weiters berechnet man

$$\begin{aligned} Lh &= -[(W^{-1}h_0f)h'_1 + H_0h''_1 + h''_0H_1 + h'_0(-W^{-1}h_1f)] + q(H_0h_1 + H_1h_0) \\ &= (-h''_1 + qh_1)H_0 + (-h''_0 + qh_0)H_1 + W^{-1}(h_1h'_0 - h_0h'_1)f = f. \end{aligned}$$

Es folgt dass $\text{ran } G \subseteq D$ und $LG = \text{id}_{L^2(0,1)}$.

Sei nun $h \in D$. Dann ist $Lh \in L^2(0,1)$, und wir erhalten $LGLh = Lh$. Da L injektiv ist, folgt $GLh = h$. Infolge haben wir $\text{ran } G = D$ und $GL = \text{id}_D$.

Klarerweise ist G injektiv, also $0 \notin \sigma_p(G)$. Sei $\lambda \in \sigma_p(G)$, und sei angenommen, dass zwei linear unabhängige Funktionen $h, \tilde{h} \in \ker(G - \lambda)$ gibt. Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung $-h'' + (q - \frac{1}{\lambda})h = 0$ eine Linearkombination von h und \tilde{h} , und erfüllt daher die Randbedingungen in (7.3.1). Nun kann man aber zu beliebig vorgegebenen x_0, x_1 eine Lösung y dieser Gleichung finden mit $y(0) = x_0, y'(0) = x_1$, ein Widerspruch. □

7.3.7 Korollar. *Es existiert eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ von $L^2(0,1)$, sodass*

- (i) $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, und $|\lambda_n| \rightarrow \infty$;
- (ii) $e_n \in D$ und $Le_n = \lambda_n e_n, n \in \mathbb{N}$;
- (iii) Ist $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \notin \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, dann hat die Gleichung $Lh - \lambda h = f$ für jedes $f \in L^2(0,1)$ eine eindeutige Lösung $h \in D$;
- (iv) Ist $\lambda = \lambda_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann hat die Gleichung $Lh - \lambda h = f$ genau dann eine Lösung in D , wenn $f \perp e_n$ ist. In diesem Fall unterscheiden sich je zwei Lösungen nur um ein skalares Vielfaches von e_n .

Beweis. Ist $h \in D, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und $Lh = \lambda h$, so folgt $Gh = \frac{1}{\lambda}h$. Umgekehrt ist für jede Funktion $h \in L^2(0,1), \lambda \neq 0$, mit $Gh = \frac{1}{\lambda}h$ schon $h \in D$ und $Lh = \lambda h$. Die Behauptung folgt also aus dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren, Korollar 7.2.13. □

7.3.8 Bemerkung. Besonders interessant ist die Tatsache, dass man eine Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen erhält. Dazu denken wir wieder an das Beispiel der schwingenden Saite, Beispiel 7.3.1. Hat man eine Anfangslage der Saite gegeben, $u(0,x) = u_0(x) \in L^2(0,1)$, und entwickelt man diese in eine Reihe nach den Eigenfunktionen, $u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n e_n, \gamma_n = \int_0^1 u_0(x) \overline{e_n(x)} dx$, so erhält man die Lösung der Schwingungsgleichung (wieder durch Variablensubstitution) explizit aus dieser Reihe. Um dies zu rechtfertigen, muss man beachten, dass diese Reihe hinreichend gut konvergiert. //

7.3.9 Beispiel. Betrachte den Fall, dass $q = 0$ und $(\alpha, \alpha_1) = (1,0), (\beta, \beta_1) = (1,0)$. Dann betrachtet man also gerade die Gleichung $(L - \lambda)h = -h'' - \lambda h = 0$ mit den Randbedingungen $h(0) = h(1) = 0$. In diesem Fall kann man die Eigenwerte λ_n und zugehörigen Eigenfunktionen e_n natürlich explizit ermitteln: Es gilt $\lambda_n = \pi^2 n^2, n \in \mathbb{N}$, und $e_n(x) = \sin(\pi n x)$. Man erhält also eine Orthonormalbasis bezüglich derer die Reihendarstellung eines Elementes $f \in L^2(0,1)$ gerade die bekannte Fourier-Entwicklung einer $L^2(0,1)$ -Funktion in eine reine Sinusreihe ist. //

Zum Abschluss betrachten wir noch ein Beispiel welches zeigt, dass man oft auch noch viel mehr Theorie benötigt, als in den bisher betrachteten Fällen.

7.3.10 Beispiel. Wir betrachten die Bewegung eines Elektrons im Wasserstoffatom, also unter dem Einfluss des elektrischen Potentials des Wasserstoffkernes. Sei wieder $\Psi(t, \vec{x})$ die L^2 -Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit, d.h.

$$P(t, U) = \int_U |\Psi(t, \vec{x})|^2 d\vec{x}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron zum Zeitpunkt t im Bereich U befindet. Die dreidimensionale Schrödingergleichung besagt dann

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi$$

Schreibt man $\Psi(t, \vec{x})$ in Polarkoordinaten (r, ϕ, θ) an, und macht einen Separationsansatz, so kommt man für $R(r)$ wieder auf eine Gleichung von der Gestalt eines Sturm-Liouville Problems. Allerdings sucht man nun Lösungen nicht auf einem endlichen Intervall, sondern für $r \in [0, \infty)$.

Die von uns entwickelte Theorie von Sturm-Liouville Problemen lässt sich nun nicht mehr so einfach anwenden, denn der Operator G ist zwar noch selbstadjungiert, aber nicht mehr kompakt. Sein Spektrum kann also neben Eigenwerten noch andere Spektralpunkte enthalten. Das Punktspektrum ist aber auch hier wieder von besonderer Bedeutung, denn es gibt uns wieder stationäre Zustände des Elektrons. Die Eigenwerte beschreiben die stabilen Energieniveaus des Elektrons. //

Anhang A

Topologien / Dualräume

Einige verschiedene Topologien, die im Laufe der Untersuchung von topologischen Vektorräumen, normierten Räumen und Hilberträumen aufgetreten sind.

X Menge	\mathcal{T} Topologie
	d Metrik \dashrightarrow von der Metrik induzierte Topologie
X Vektorraum	$\ \cdot\ $ Norm, Normtopologie
	(\cdot, \cdot) Skalarprodukt \dashrightarrow Norm, Normtopologie
	Familie von Seminormen \Leftrightarrow lokalkonvexe Topologie
	Teilraum von linearen Funktionalen \dashrightarrow lokalkonvexe Topologie
X normierter Raum	$\mathcal{T}_{\ \cdot\ }$ Normtopologie
	schwache Topologie $\mathcal{T}_w = \sigma(X, X') \subseteq \mathcal{T}_{\ \cdot\ }$
$X = Y'$ Dualraum eines normierten Raumes	$\mathcal{T}_{\ \cdot\ }$ Normtopologie
	schwache Topologie $\mathcal{T}_w = \sigma(X', X'') \subseteq \mathcal{T}_{\ \cdot\ }$
	schwach-* Topologie $\mathcal{T}_{w*} = \sigma(X', \iota(X)) \subseteq \mathcal{T}_w$
$X = \mathcal{B}(X, Y)$, X, Y normierte Räume	Operatornorm \dashrightarrow Normtopologie
	Konvergenz im starken Sinne
	Konvergenz im schwachen Sinne
$X = \mathcal{B}(H)$, H Hilbertraum	Konvergenz im schwachen Sinne

Einige Beispiele von Banachräumen und ihren Dualräumen

X	$Y \cong X'$	$\varphi : Y \rightarrow X'$
$L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$. μ positives Maß auf Ω	$L^q(\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$	$(\varphi g)(f) = \int_{\Omega} fg \, d\mu$
$L^1(\mu)$. μ positives σ -endliches Maß auf Ω	$L^\infty(\mu)$	$(\varphi g)(f) = \int_{\Omega} fg \, d\mu$
$C_0(L)$. L lokalkompakter Hausdorffraum	$M(L)$	$(\varphi \mu)(f) = \int_L f \, d\mu$
$M(L)$. L lokalkompakter Hausdorffraum	$L^\infty(M(L)) := \{F \in \prod_{\mu \in M(L)} L^\infty(\mu) : F(\mu) = F(\nu) \text{ } \mu\text{-f.}\ddot{u}.\text{ wenn } \mu \ll \nu \}$	$(\varphi F)(\mu) = \int_L F(\mu) \, d\mu$
$c_0 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \rightarrow 0\}$	ℓ^1	$\varphi((b_n)_{n \in \mathbb{N}})((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$
$c = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \text{konvergent}\}$	ℓ^1	
$L^\infty(\mu)$. μ positives Maß auf M	Raum der endlichen-additiven μ -absolut stetigen Maße auf M	

Literaturverzeichnis

- [R1] W.RUDIN: *Functional Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, 2nd Edition, McGraw-Hill 1991.
- [R2] W.RUDIN: *Real and Complex Analysis*, International Edition, 3rd Edition, McGraw-Hill 1987.
- [C] J.B.CONWAY: *A Course in Functional Analysis*, GTM 96, Springer 1985.
- [W] D.WERNER: *Funktionalanalysis*, Springer Verlag, 1997.
- [Y] K.YOSHIDA: *Functional Analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 123, Springer Verlag, 1997.
- [H] H.HEUSER: *Funktionalanalysis*, Mathematische Leitfäden, Teubner Verlag, 1975.
- [DS] N.DUNFORD, J.SCHWARTZ: *Linear Operators 1–3*, Wiley Interscience, New York 1971–1988.
- [S] H.SCHÄFER: *Topological vector spaces*, GTM 3, Springer Verlag 1999.
- [M] R.MEGGINSON: *An Introduction to Banach space Theory*, GTM 183, Springer Verlag, 1998.
- [GGK] I.GOHBERG, S.GOLDBERG, M.KAASHOEK: *Classes of Linear Operators*, OT 49, Birkhäuser Verlag, 1990.
- [AG] N.ACHIESER, I.GLASMANN: *Theorie der Linearen Operatoren im Hilbertraum*, Akademie Verlag, 1968.
- [LT] J.LINDENSTRAUSS, L.TZAFRIRI: *Classical Banach spaces I,II*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 92, Springer Verlag, 1977.
- [D] R.DOUGLAS: *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, GTM 179, Springer Verlag, 1998.
- [B] A.BALAKRISHNAN: *Applied Functional Analysis*, Applications of Mathematics 3, Springer Verlag, 1976.
- [CN] B.CHOUDHARY, S.NANDA: *Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.
- [Co] J.B.CONWAY: *Functions of a complex variable I*, GTM 11, Springer Verlag 1978.
- [Hu] CH.HUND: *Fixpunktsatz von Brouwer*, Bachelorarbeit, Uni Bielefeld.
- [Go] GOCKEL: *Lokalkonvexe Räume und Fixpunktsätze*, <http://matheplanet.com/default3.html?article=1162>.

Index

- $(T1)$, 22
- $(T2)$, 18
- $(T3)$, 22
- $A + B$, 17
- C^* -Algebra, 132
- $C_0(L)$, 29
- $C_{00}(L)$, 29
- $K_\epsilon(x)$, 18
- $L^2(\mu)$, 45
- M° , 82
- M^\perp , 82
- M_ϕ , 98
- S^d , 90
- $U_\epsilon(x)$, 18
- \mathbb{R} -lineares Funktional, 71
- $\text{co}(E)$, 94
- $\ell^2(A)$, 45
- $\mathcal{B}(X, Y)$, 23
- *-Homomorphismus, 133
- $^\circ N$, 82
- $^\perp N$, 82
- c_0 , 28
- $x + A$, 17
- $\mathcal{K}(X, Y)$, 114
- \mathcal{A} -Partition, 136

- $\mathcal{K}(X)$, 116

- Abbildung
 - offene, 60
- absolut stetig, 129
- Algebra, 103
 - kommutative, 104
 - normiert, 104
- Algebra Homomorphismus, 106
- analytisch, 110
- Annihilator, 82
- Assoziativität, 103

- Banachalgebra, 104
- Banachalgebra mit Eins, 104

- beschränkt
 - Funktion, 28
 - lineare Abbildung, 23
- Besselsche Ungleichung, 53
- Bidualraum, 86

- Dichte-Funktion, 130
- direkte Summe, 47
- Dreiecksungleichung, 42
 - nach unten, 67
- duales Paar, 82
- Dualraum, 24
 - algebraischer, 24
 - topologischer, 24

- Eigenraum, 106
- Eigenvektor, 106
- Eigenwert, 106
- Einheitssphäre, 90
- Einselement, 104
 - normiertes, 104
- Einsetzhomomorphismus, 107
- Element
 - invertierbar, 105
- essentielle Supremum, 28
- Extremalpunkt, 89

- Faktorraumnorm, 33
- Filter
 - feiner, 11
 - größer, 11
 - konvergent, 12
- Fixpunktsatz von Brouwer, 93
- Fixpunktsatz von Schauder, 94
- Fourier-Koeffizienten, 53
- Fourierreihe, 55
 - bzgl. Orthonormalbasis, 54
- Fredholmsche Alternative, 120
- Funktionalkalkül, 143

- Gram-Operator, 51
- Graph, 62

- Green'sche Funktion, 151
- inneres Produkt, 41
- invertierbar, 105
- kanonische Einbettung, 86
- konvexe Hülle, 94
- Lax-Milgram, 50
- Legendre-Polynom, 56
- lineare Funktionale, 23
- lokalkonvex, 65
- Menge
 - G_δ -, 58
 - absorbierende, 19
 - extremale, 89
 - gesättigte, 14
 - konvexe, 19
 - kreisförmige, 19
 - magere, 58
 - nirgends dichte, 58
 - polare, 82
 - symmetrische, 19
 - von 1. Kategorie, 58
 - von 2. Kategorie, 58
- Minkowski-Funktional, 68
- Multiplikationsoperator, 98
- Norm
 - euklidische, 25
 - Maximums-, 32
 - Summen-, 32
- numerische Wertebereich, 123
- offene Abbildung, 10
- ONB, 51
- ONS, 51
- Operator
 - adjungierter, 121
 - kompakter, 114
 - konjugierter, 97
 - Multiplikations-, 98
 - normaler, 122
 - positiver, 124
 - selbstadjungierter, 122
 - Sturm-Liouville, 151
 - unitärer, 122
- Operatornorm, 23
- Operatortopologie
 - schwache, 81
 - starke, 70
- orthogonal, 46
- orthogonale Komplement, 46
- orthogonale Summe, 47
- Orthogonalisierungsverfahren
 - von Gram-Schmidt, 55
- Orthonormalbasis, 51
- Orthonormalsystem, 51
 - vollständiges, 51
- Paar
 - duales, 82
- Parallelogrammregel, 42
- Parsevalsche Gleichung, 54
- polare Menge, 82
- Polarformel, 42
- principle of uniform boundedness, 59
- Projektion, 47
 - orthogonale, 47, 48
- Punktauswertung, 56
- punktetrennend
 - lineare Funktionale, 63
- Pythagoras, 42
- quadratisch integrierbar, 45
- quadratisch summierbar, 45
- Raum
 - $C(K)$ -, 29
 - L^p -, 27
 - $\ell^p(\Omega)$ -, 28
 - der komplexen Borelmaße, 29
 - Hardy-, 56
 - Hilbert-, 44
- reflexiv, 86
- regulär, 130
- Resolvente, 105
- Resolventengleichung, 109
- Resolventenmenge, 105
- Ring, 104
- Satz
 - Baire, 57
 - Baire'scher Kategoriensatz, 58
 - Banach-Alaoglu, 87
 - Banach-Steinhaus, 58
 - Darstellungssatz
 - von Riesz-Fischer, 49
 - Darstellungssatz
 - von Riesz-Markov, 30

- Fixpunktsatz von Brouwer, 93
- Fixpunktsatz von Schauder, 94
- Goldstine, 87
- Hahn-Banach
 - geometrisch, 74
 - komplex, 73
 - reell, 72
 - Trennungssatz, 74
- Krein-Milman, 89
- Liouville, 110
- principle of uniform boundedness, 59
- Spektralabbildungssatz, 107
- Spektralsatz
 - beschränkte selbstadjungierte, 140
 - kompakte selbstadjungierte, 147
 - vom abgeschlossenen Bild, 101
 - vom abgeschlossenen Graphen, 62
 - von der offenen Abbildung, 60
 - von Tychonoff, 11
- schwache Topologie, 78
- Schwarzsche Ungleichung, 41
- Seminorm, 66
- separierend, 67
- Sesquilinearform, 50
 - beschränkte, 50
- Skalarprodukt, 41
- Spektralmaß, 127
 - Integral diesbezüglich, 132
 - von A , 140
- Spektralradius, 110
- Spektralzerlegung, 140
- Spektrum, 105
 - Punkt-, 106
 - Residual-, 106
 - stetiges, 106
- Sturm-Liouville Operator, 151
- Sturm-Liouville Problem, 149
- Supremumsnorm, 29
- Symbol, 98
- Teilraum, 8
- Topologie
 - $\sigma(X, Y)$, 78
 - w -, 80
 - euklidische, 25
 - finale, 13
 - initiale, 6
- Produkt-, 9
- Quotienten-, 14
- schwache (von (X, \mathcal{T})), 80
- Spur-, 8
- topologischer Vektorraum, 17
 - im Allgemeinen nicht Hausdorffscher, 22
- Totalvariation eines komplexen Maßes, 129
- Träger, 29
- Translation, 18
- Ultrafilter, 11
- Unteralgebra, 104
- Variation eines komplexen Maßes, 129
- Vervollständigung
 - innerer Produktraum, 44
 - isomorphe, 3, 44
 - metrischer Raum, 3
 - normierter Raum, 36
 - normierter Raum, isomorphe, 36
- zyklischen Vektor, 145